Uniwersytet Rzeszowski
Wydział Pedagogiki i Filozofii
Instytut Pedagogiki

Małgorzata Turczyńska

Wspieranie rozwoju wybranych składników kultury matematycznej uczniów klas 1-3 szkoły podstawowej za pomocą fotografii

Praca doktorska
napisana pod kierunkiem
Prof. dr hab. Marty Wrońskiej

Rzeszów 2026

SPIS TREŚCI

Wstęp 4

Rozdział I. Dziecko rozpoczynające naukę w szkole podstawowej i jego matematyczny świat 11

1.1. Charakterystyka rozwojowa dziecka w wieku wczesnoszkolnym i jego potrzeby poznawcze 12
1.2. Matematyka jako nauka i jej teorie/strategie nauczania 26
1.3. Poziom dojrzałości szkolnej a trudności w uczeniu się matematyki 37
1.4. Matematyka dziecka – przegląd propozycji dydaktycznych pomocnych w rozwijaniu zainteresowań matematycznych..... 46

Rozdział II. Kultura matematyczna 71

2.1. Wieloaspektowość kultury 71
2.2. Złożoność i wielowymiarowość kultury matematycznej 80
2.3. Komponenty kultury matematycznej 96
2.4. Fotoedukacja matematyczna jako koncepcja dydaktyczna determinująca rozwijanie kultury matematycznej uczniów..... 119

Rozdział III. System edukacji w rozwoju kultury matematycznej 133

3.1. Rys historyczny rozwoju systemu oświaty w Polsce 133
2.2. Podstawa programowa – konstytutywny dokument polskiej edukacji 149
3.3. Edukacja matematyczna w klasach 1-3 szkoły podstawowej w świetle podstawy programowej 167
3.4. Krytyka edukacji matematycznej, realizowanej w przedszkolu i w klasach początkowych 180

Rozdział IV. Założenia metodologiczne badań własnych 195

4.1. Przedmiot i cele badań 195
4.2. Problemy badawcze..... 197
4.3. Zmienne i wskaźniki badań..... 198
4.4. Metody, techniki i narzędzia badań własnych..... 201
4.5. Organizacja badań, charakterystyka próby badawczej..... 203

Rozdział V. Kultura matematyczna uczniów klas 1-3 szkoły podstawowej – analiza wyników badań własnych..... 208

5.1. Sprawności matematyczne badanych uczniów klas I-III..... 209
5.1.1. Sprawności matematyczne uczniów klasy I szkoły podstawowej 209
5.1.2. Sprawności matematyczne uczniów klasy II szkoły podstawowej..... 213
5.1.3. Sprawności matematyczne, uczniów klasy III szkoły podstawowej 219
5.2. Język matematyczny badanych uczniów klas I-III..... 226
5.2.1. Język matematyczny uczniów klas pierwszych szkoły podstawowej 226
5.2.2. Język matematyczny uczniów klas drugich szkoły podstawowej..... 232
5.2.3. Język matematyczny uczniów klas trzecich szkoły podstawowej 237

5.3.Wyobraźnia matematyczna uczniów 242
5.3.1. Wyobraźnia matematyczna uczniów klas pierwszych szkoły podstawowej 243
5.3.2. Wyobraźnia matematyczna uczniów klas drugich szkoły podstawowej 246
5.3.3. Wyobraźnia matematyczna uczniów klas trzecich szkoły podstawowej 250
5.4. Elegancja matematyczna uczniów 254
5.4.1. Elegancja matematyczna uczniów klas pierwszych szkoły podstawowej 254
5.4.2. Elegancja matematyczna uczniów klas drugich szkoły podstawowej 258
5.4.3. Elegancja matematyczna uczniów klas trzecich szkoły podstawowej 262
5.5. Twórczość matematyczna uczniów 267
5.5.1. Twórczość matematyczna uczniów klas pierwszych szkoły podstawowej 268
5.5.2. Twórczość matematyczna uczniów klas drugich szkoły podstawowej 272
5.5.3. Twórczość matematyczna uczniów klas trzecich szkoły podstawowej 277

Zakończenie 282

Bibliografia 298

Spis fotografii 319

Spis tabel 321

Spis infografik 324

Aneksy 326

Streszczenie 412

Wstęp

Współczesna edukacja i jej realizacja związana jest z licznymi wyzwaniami wynikającymi z dynamicznych przemian społecznych, technologicznych czy kulturowych. W tym kontekście szczególnego znaczenia nabiera nauczanie matematyczne, ponieważ „pomyślne opanowanie wiedzy i umiejętności z zakresu matematyki, nauki i techniki na pierwszym etapie kształcenia umożliwia osiąganie sukcesów na kolejnych szczeblach edukacji. Jest to ważne, gdyż te dziedziny wiedzy postrzegane są jako relatywnie trudne w stosunku do innych, a pominięcie choćby jednego elementu w budowaniu tych kompetencji może poważnie zachwiać całą konstrukcją kompetencji kluczowych”[1].

Nauczanie matematyki na pierwszym etapie edukacyjnym ma duże znaczenie w kontekście dalszego kształcenia się. Powinno zapewnić uczniom rudymentarne wiadomości i umiejętności, które staną się podstawą dla bardziej rozbudowanych treści matematycznych, realizowanych w kolejnych latach edukacji. Nauczyciele powinni pamiętać, że pierwsze pozytywne doświadczenia matematyczne będą odpowiadały za kształtowanie afirmatywnych postaw uczniów względem uczenia się tego przedmiotu. Mogą motywować uczniów do dalszej nauki. Natomiast negatywne działania mogą zablokować w uczniu ochotę do uczenia się matematyki, a nawet wywołać fobię matematyczną, która w przyszłości może zahamować rozwój kariery zawodowej. Osoby odczuwające lęk przed matematyką, mając do wykonania zadanie matematyczne, doświadczają pewnych obaw, które związane są z osiąganiem słabych wyników podczas wykonywania tego typu zadań. Obawy te blokują prawidłowe myślenie i rozumowanie niezbędne do wykonania danego zadania[2]. Niestety, kiedy edukacja matematyczna zaczyna być uwikłana w szkolne procedury, zanika uczniowska ciekawość poznawcza, satysfakcja z rozwiązywania zagadek logicznych, z posługiwania się liczbami, czy z wymyślania autorskich strategii mierzenia się z problemami matematycznymi. Uczniowie przestają pytać, analizować czy zgłębiać temat. Jest to wynikiem braku rozmowy nauczyciela z uczniami podczas lekcji, na których wyposaża się ich tylko w gotowy zestaw pojęć i modeli matematycznego działania. Taki sposób nauczania matematyki prowadzi do blokowania gotowości i zdolności do myślenia matematycznego i zastępowany

[1] Dudel B., M. Głoskowska-Sołdatow M., Kompetencje matematyczne i podstawowe kompetencje naukowo-techniczne w edukacji wczesnoszkolnej – studium empiryczne, Toruń 2020, s.5.
[2]Beilock S.L, Maloney E.A., Math Anxiety: A Factor in Math Achievement Not to Be Ignored, Behavioral and Brain Sciences, 2015, Vol. 2(1), s.4-12.

jest mechanistycznym zapamiętywaniem reguł czy określonych algorytmów matematycznych[3].

Matematyka jest jednym z trudniejszych przedmiotów nauczania, a trudność tę pogłębia ogólnie panujący pogląd, że wiedza matematyczna dostępna jest tylko nielicznym osobom. Matematyka nieraz bywa narzędziem selekcji uczniów, a czasem nawet ich szykanowania[4]. Stąd na jakość edukacji matematycznej niewątpliwy wpływ ma wiedza merytoryczna, pedagogiczna, dydaktyczna i psychologiczna nauczycieli. „Kompetentny nauczyciel powinien przede wszystkim mieć świadomość, że nie tylko uczy matematyki, ale uczy za pomocą matematyki, dostarczając uczniom narzędzi służących poznaniu i rozumieniu rzeczywistości oraz jej aktywnemu przeobrażaniu”[5]. Jean Piaget pisał, że: „uczymy się matematyki tak, jakby chodziło o prawdy dostępne wyłącznie za pomocą abstrakcyjnego, a nawet specjalnego języka, jakim jest język symboli operacyjnych. Tymczasem matematyka obejmuje przede wszystkim działania wykonywane na przedmiotach, operacje zaś są zawsze działaniami ściśle między sobą powiązanymi, tyle że wyobrażanymi, nie zaś wykonywanymi w sensie fizycznym. (…) Fizyczna rzeczywistość dostarcza tworzywa, które ludzki mózg przekłada na matematykę”[6]. Z kolei, jak twierdzi Stanisław Dylak, uczenie się matematyki to aktywne radzenie sobie z informacją/wiadomością, która jest przedmiotem działania poznawczego. Identyfikowanie jej, kategoryzowanie w ramach posiadanych struktur pojęciowych, a także organizowanie pola poszukiwań, badań, doświadczeń obejmujących ciąg czynności prowadzących do wychwycenia regularności, odkrycia prawidłowości, skonstruowania pojęć matematycznych, rozwiązania problemów z użyciem modelowania matematycznego[7].

W tym miejscu można sformułować pytanie: co w praktyce edukacji matematycznej jest najważniejsze? Ciekawą koncepcję w tym obszarze prezentuje dokument opisujący narodową strategię edukacji matematycznej w Wielkiej Brytanii[8]. Strategia ta obejmuje cztery elementy: „1) matematyka jest zbudowana z pojęć, uogólnień, definicji, które swoje źródło mają w obserwacji świata, odkrywaniu zasad nim rządzących i nadawaniu im określonej

[3] Klus-Stańska D., Nowicka M., Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej, Warszawa 2005, s. 105.
[4] Freudenthal H., O strukturach w nauce i nauczaniu. Fragmenty z referatu H. Freudenthala wygłoszonego przez niego w czasie wizyty w krakowskiej WSP w 1984. Spisał i tłumaczył Stefan Turnau, [w:] www.if.uj.edu.pl/~meyer/psychologia/w5.doc (dostęp: 21.05.2019).
[5] Ibidem
[6] Piaget J., Dokąd zmierza edukacja?, tłum. M. Domańska, Warszawa 1977, s. 87.
[7] Dylak S., Architektura wiedzy w szkole, Warszawa 2013, s. 55.
[8] Zob. National Strategies, Children thinking mathematically: PSRN essential knowledge for early years practitioners. 2009, [w:] https://birthto5matters.org.uk/wp-content/uploads/2021/03/Children_thinking_mathematically_PSRN_essential_knowledge_for_Early_Years_practitioners.pdf (dostęp: 24.08.2020).

formuły; 2) matematyka obejmuje mierzenie, porównywanie i klasyfikowanie/porządkowanie obiektów, natomiast dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie pełnią służebną funkcję w stosunku do wymienionych działań, umożliwiają ich wykonanie; 3) matematyka opisuje relacje, reguły, właściwości, uogólnione zasady, które można odkryć dzięki zróżnicowanej aktywności; 4) matematyka zapewnia dotarcie do abstrakcyjnego myślenia i działania z wykorzystaniem wyobraźni. Potencjał, jaki tkwi w edukacji matematycznej i aktywnościach z tego zakresu podejmowanych przez dzieci, od najmłodszych lat, powinien znaleźć odzwierciedlenie w praktyce szkolnej czy przedszkolnej. A to wymaga zrozumienia, że matematyka może być atrakcyjnym obszarem działań społecznych, które wiążą się ściślej z twórczością i odkrywaniem świata niż odtwarzaniem gotowej wiedzy i umiejętności”[9].

Nauczanie matematyki i związane z tym rozwijanie zainteresowań matematycznych uczniów wymagają od nauczycieli poszukiwania efektywnych i atrakcyjnych dla dzieci metod i form pracy, które muszą być dostosowane do możliwości rozwojowych uczniów w klasach młodszych. Stąd tematyka mojej dysertacji dotyczy wspierania rozwoju wybranych składników kultury matematycznej uczniów klas 1-3 szkoły podstawowej za pomocą fotografii, która może być formą wyrażania własnej osoby poprzez interpretowanie otaczającej rzeczywistości. Fotografowanie obiektów związanych z matematyką pozwoli dziecku zobaczyć matematykę w realnej przestrzeni, czyli zacznie ono postrzegać liczby, kształty, symetrię czy wzory na przykład w przyrodzie, architekturze, w przedmiotach codziennego użytku. To z kolei może determinować rozwój myślenia matematycznego. Fotografowanie może sprzyjać także kształtowaniu umiejętności obserwacji i analizy. Uczeń musi świadomie wybrać obiekt, zauważyć jego cechy, na przykład proporcje, powtarzalność, kąty, a następnie uchwycić je na zdjęciu. Łączenie matematyki z fotografią pokazuje, że linia prosta, czy figura geometryczna przestaje być rysunkiem w zeszycie, a może być fragmentem, sfotografowanego krajobrazu lub kompozycją zdjęcia. A to z kolei może rozwijać kreatywność dziecka i wzmocnić poczucie jego sprawczości. Fotografowanie matematyki sprzyja łączeniu wiadomości z różnych dziedzin, takich jak matematyka, sztuka i technologia. Sprzyja także uczeniu się poprzez działanie, a tym samym lepsze zapamiętywanie pojęć matematycznych, gdyż są one osadzone w konkretnych doświadczeniach. Nauczanie matematyki nie może ograniczać się tylko do przekazywania wiadomości i algorytmów, ale powinno prowadzić do budowania szeroko rozumianej kultury matematycznej uczniów. W mojej dy-

[9] National Strategies, Children thinking mathematically: PSRN essential knowledge for early years practitioners. 2009…, op. cit.

sertacji przedmiotem badań empirycznych uczyniłam wybrane składniki kultury matematycznej uczniów klas 1-3 szkoły podstawowej. Prowadząc badania poszukiwałam relacji zachodzących pomiędzy fotoedukacją matematyczną i rozwojem wybranych elementów kultury matematycznej. Sformułowany przeze mnie główny problem naukowy zmierzał do pokazania: *w jakim stopniu wprowadzenie do procesu realizacji zajęć z obszaru edukacji matematycznej fotoedukacji determinuje rozwój wybranych elementów kultury matematycznej uczniów klas I-III szkoły podstawowej?* Natomiast problemy szczegółowe miały zobrazować: *w jakim stopniu zajęcia z wykorzystaniem fotoedukacji determinują poziom sprawności matematycznej uczniów klas I-III szkoły podstawowej? w jakim stopniu zajęcia z wykorzystaniem fotoedukacji matematycznej kształtują język matematyczny uczniów klas I-III szkoły podstawowej? w jakim stopniu zajęcia z wykorzystaniem fotoedukacji matematycznej kształtują wyobraźnię matematyczną uczniów klas I-III szkoły podstawowej? w jakim stopniu zajęcia z wykorzystaniem fotoedukacji matematycznej determinują rozwój elegancji matematycznej uczniów klas I-III szkoły podstawowej? w jakim stopniu zajęcia z wykorzystaniem fotoeduakcji matematycznej determinują rozwój twórczości matematycznej uczniów klas I-III szkoły podstawowej?* Diagnoza i ocena wybranych składników kultury matematycznej uczniów klas 1-3 szkoły podstawowej została dopełniona eksperymentem pedagogicznym, który był realizowany techniką grup równoległych (grupy eksperymentalne i grupy kontrolne). Ważnym etapem realizacji eksperymentu było opracowanie, we współpracy z nauczycielami edukacji wczesnoszkolnej, innowacyjnych scenariuszy zajęć opartych na koncepcji fotoedukacji matematycznej autorstwa prof. Małgorzaty Makiewicz[10]. Konstrukcja tych propozycji dydaktycznych została zaprojektowana w taki sposób, aby poprzez różnorodność aktywności wyjść poza ramy tradycyjnego nauczania i umożliwić pełne, podmiotowe zaangażowanie uczniów klas I–III. Przykłady wybranych scenariuszy lekcji umieszczono w aneksie niniejszej pracy. Przyjęte podejście ściśle wpisuje się w nurt pedagogiki konstruktywistycznej. U jej podstaw leży przekonanie, że uczeń samodzielnie buduje swoją wiedzę poprzez aktywną eksplorację oraz nadawanie indywidualnych znaczeń otaczającej go rzeczywistości. Jak podkreśla Małgorzata Makiewicz, „fotografia może stanowić doskonały środek dydaktyczny, pozwalający na skorelowanie edukacji matematycznej z edukacją plastyczną, przyrodniczą i techniczną, co sprzyja całościowemu rozwojowi dziecka”[11].

[10]Makiewicz M., O fotografii w edukacji matematycznej. Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów, Szczecin 2013.
[11]Makiewicz M., Matematyka w obiektywie. Fotografia wspomagająca edukację matematyczną, Szczecin 2010, s.12.

W pracy podjęłam próbę ujęcia tej problematyki w różnych aspektach, które opisałam w pięciu rozdziałach. W rozdziale pierwszym przedstawiłam charakterystykę rozwoju dziecka na etapie edukacji wczesnoszkolnej, ze szczególnym uwzględnieniem jego potrzeb poznawczych. Omówiłam również wybrane teorie nauczania matematyki, a także zagadnienie dojrzałości szkolnej w kontekście trudności i niepowodzeń w uczeniu się tego przedmiotu. Ponadto zaprezentowałam przegląd wybranych rozwiązań dydaktycznych, sprzyjających rozwijaniu zainteresowań uczniów.

W rozdziale drugim w sposób szczegółowy dokonałam analizy zjawiska kultury matematycznej. Rozpoczęłam od wieloaspektowości i złożoności samego pojęcia *kultury,* które stanowi obecnie jedno z najczęściej przywoływanych i używanych pojęć, a jego znaczenie nieustannie ewoluuje. Ponadto zjawisko kultury jest jednym z najbardziej istotnych czynników mających wpływ na powstanie i rozwój życia społecznego. „Kultura jest zjawiskiem wieloaspektowym, złożonym i interdyscyplinarnym, obejmuje całokształt materialnego i duchowego dorobku ludzkości, który jest wytworzony w ogólnym rozwoju. Rozwija się nieustannie dzięki zbiorowej i indywidualnej działalności twórczej”[12]. „Każda kultura ma swoje wartości. Kształtuje człowieka, ale i człowiek ma wpływ na jej charakter. Każda urzeczywistniona przez ludzi edukacja opiera się na kulturze. Jest to zasadnicza zależność. Chociaż edukacja wzbogaca kulturę, to najpierw z niej czerpie”[13]. Również kultura matematyczna podlega tym prawom. Dostrzegajmy ją na co dzień w otaczającym świecie, w zachowaniach ludzi, wytworach pracy w każdej funkcjonującej dziedzinie. Z kulturą ogólną powiązane jest pojęcie *kultury matematycznej.* Jest to ważne zagadnienie, ponieważ obecna rzeczywistość wymaga zastosowania matematycznych narzędzi do jej kształtowania. W kolejnym podrozdziale dokładnie scharakteryzowałam poszczególne komponenty kultury matematycznej, którymi są sprawność, język, wyobraźnia, elegancja matematyczna i twórczość matematyczna. Na koniec tego rozdziału zaprezentowałam koncepcję dydaktyczną, którą jest fotoedukacja matematyczna. To nowatorskie podejście do nauczania-uczenia się matematyki. Łączy fotografię z różnorodnymi zagadnieniami matematycznymi. Ma duże znaczenie w rozwoju kultury matematycznej u uczniów.

W kolejnym rozdziale konstytutywnym aspektem prowadzonej przeze mnie narracji jest system edukacji i jego znaczenie w rozwoju kultury matematycznej. System edukacji poprzez obowiązujące regulacje prawne, organizację procesu nauczania, dobór treści i metod

[12] Wrońska M., Kultura medialna adolescentów. Studium dostępu i zastosowań, Rzeszów 2012, s. 74-75.
[13] Łomny Z., W intencji przetrwania i rozwoju, Warszawa 1998, s.71.

nauczania oraz przygotowanie nauczycieli wyznacza ramy sprzyjające zrozumieniu matematyki przez uczniów. Analiza ważności systemu oświaty w kształtowaniu kultury matematycznej wymaga uwzględnienia zarówno perspektywy historycznej, jak i normatywnej. W pierwszym podrozdziale przedstawiłam zarys rozwoju systemu edukacji w Polsce, ukazujący przemiany strukturalne, wpływające na organizację nauczania matematyki. W drugim podrozdziale omówiłam podstawę programową, która jako ważny dokument systemowy określa cele, treści oraz wymagania edukacyjne, a także wyznacza kierunki pracy nauczyciela i rozwoju ucznia. Jej analiza pozwoliła zaprezentować znaczenie matematyki w edukacji uczniów klas I-III w procesie budowania kultury matematycznej. W kolejnym podrozdziale zaprezentowałam edukację matematyczną, realizowaną z uczniami z klas początkowych w świetle podstawy programowej. Edukacja wczesnoszkolna to ważny etap w rozwoju emocjonalnym, poznawczym i społecznym dziecka. To właśnie wtedy kształtują się u jednostki podstawowe struktury myślenia. Dziecko uczy się nie tylko wykonywania działań, ale przede wszystkim ich rozumienia. Zaczyna dostrzegać zależności, klasyfikować, porządkować oraz operować pojęciem liczby. Stąd analiza zapisów podstawy programowej w odniesieniu do tego etapu edukacji pozwoli ocenić, na ile sprzyjają one rozwijaniu kultury matematycznej. Na koniec tego rozdziału przedstawiłam krytyczną refleksję nad stanem edukacji matematycznej realizowanej, w przedszkolu oraz w klasach początkowych.

Założenia metodologiczne badań własnych zostały szczegółowo zaprezentowane w rozdziale czwartym. W tej części dysertacji dokonano precyzyjnego określenia przedmiotu oraz celów badań, które wyznaczają kierunek prowadzonych analiz i stanowią podstawę dla dalszych rozważań empirycznych. Następnie sformułowałam problemy badawcze - główne i szczegółowe, umożliwiające systematyczne zgłębianie podjętej problematyki. Istotnym elementem tego rozdziału jest również charakterystyka zmiennych oraz odpowiadających im wskaźników. Ponadto przedstawiłam metody, techniki oraz narzędzia badawcze, jednocześnie uzasadniając ich dobór w kontekście przyjętych celów i problemów badawczych. Rozdział ten zawiera także opis organizacji oraz przebiegu badań, obejmujący między innymi charakterystykę badanej grupy, warunki realizacji badań oraz etapy ich przeprowadzania.

Kolejny, piąty rozdział pracy poświęcony jest szczegółowej analizie oraz interpretacji wyników uzyskanych w trakcie badań własnych. W tej części dokonałam uporządkowanego przedstawienia zgromadzonych danych empirycznych, ich opracowania oraz interpretacji w odniesieniu do postawionych wcześniej problemów badawczych i celów pracy. Analiza wyników została przeprowadzona z uwzględnieniem przyjętych zmiennych i wskaźników, co

umożliwiło wyciągnięcie wniosków dotyczących badanych zjawisk. Uzyskane rezultaty stanowią podstawę do formułowania uogólnień oraz wniosków końcowych, które zostały przedstawione w dalszej części pracy.

Podjęta w niniejszej dysertacji problematyka ma istotne znaczenie zarówno poznawcze, jak i praktyczne. Uzyskane wyniki mogą stanowić podstawę do dalszych badań nad kulturą matematyczną uczniów oraz inspirować nauczycieli do poszukiwania nowych, bardziej efektywnych rozwiązań dydaktycznych, wspierających rozwój kompetencji matematycznych dzieci na etapie edukacji wczesnoszkolnej.

Rozdział I. Dziecko rozpoczynające naukę w szkole podstawowej i jego matematyczny świat

Rozpoczęcie nauki w szkole podstawowej to dla dziecka ważny moment. W tym czasie dziecko wkracza w przestrzeń uporządkowanej edukacji, która będzie oddziaływać na jego funkcjonowanie nie tylko społeczne, ale także i emocjonalne, a przede wszystkim poznawcze. Natomiast matematyka stanie się jednym z istotnych obszarów jego rozwoju intelektualnego. Dla dziecka w wieku 6–7 lat matematyka jest elementem do rozumienia świata. Na tym etapie to nie jest jeszcze zbiór abstrakcyjnych reguł. Dziecko zaczyna liczyć przedmioty, porównywać wielkości, rozpoznawać kształty. Uczy się dostrzegać regularności i zależności przestrzenne, czyli to wszystko, czego doświadcza na co dzień w otaczającej go rzeczywistości. Matematyka pozwoli mu rozwinąć logiczne myślenie, umiejętność przewidywania i rozwiązywania problemów. Oczywiście już w przedszkolu realizowana jest edukacja matematyczna, która odbywa się głównie poprzez zabawę. W szkole podstawowej dziecko spotyka się z formalnym podejściem do nauki tego przedmiotu. Nauczyciel w edukacji wczesnoszkolnej musi być świadomy, że zmiana środowiska, z sali zabaw do ławki szkolnej, wymaga adaptacji, zarówno emocjonalnej, jak i poznawczej. Dlatego nauczyciel musi dostosować metody pracy do wieku rozwojowego uczniów. Powinien także budować pozytywne nastawienie do nauki i wiary we własne możliwości. W tym czasie dziecko musi nauczyć się skupiać uwagę przez dłuższy czas, rozwiązywać zadania według otrzymanej instrukcji i zacząć pracować samodzielnie. Dzieci najlepiej uczą się przez praktykę i eksperymentowanie, a to sprzyja rozwijaniu kreatywności i współpracy w grupie. W niniejszym rozdziale zostanie zaprezentowana charakterystyka rozwojowa dziecka w wieku wczesnoszkolnym i jego potrzeby poznawcze, teorie nauczania matematyki, a także poziom dojrzałości szkolnej w kontekście niepowodzenia w uczeniu się matematyki oraz przegląd propozycji dydaktycznych pomocnych w rozwijaniu zainteresowań.

1.1. Charakterystyka rozwojowa dziecka w wieku wczesnoszkolnym i jego potrzeby poznawcze

„Dziecko nie jest małym dorosłym, ale myśli i postrzega świat w sposób, który jest specyficzny dla jego rozwoju[1]". Dlatego, aby dostosować program do możliwości uczniów, niezbędne jest poznanie faz rozwoju dzieci i młodzieży. Jak pisze W. Okoń[2], problematyką zależności programu od możliwości dzieci zajmował się S. Hessen, który wskazał na kluczowe okresy rozwoju psychologicznego[3], takie jak:

- fazę wczesnego dzieciństwa, obejmującą czas od urodzenia do piątego roku życia, czyli okres intensywnego rozwoju;
- fazę średniego dzieciństwa, trwającą od 5 do 7 lat, w której następuje zwolnienie tempa rozwoju dziecka. Jest to okres „pierwszego zastoju";
- fazę późnego dzieciństwa - od 7 do 11 lat – to okres intensywnego rozwoju;
- faza drugiego zastoju - od 11 do 14 lat, zwana wiekiem przekory;
- faza zwana okresem dojrzewania- od 14 do 17 lat – będąca trzecią fazą intensywnego rozwoju;
- faza harmonizacji – od 17 do 21 lat - jako okres zwolnionego rozwoju, bywa również nazwana wiekiem młodzieńczym.

Do powyższej kwalifikacji S. Hessen wprowadził pewne modyfikacje i przyjął, że „faza późnego dzieciństwa odpowiadać będzie wiekowi pierwszego stopnia szkoły, kiedy dziecko siedmioletnie przechodzi od zabawy do pracy pojmowanej jako podjęcie obowiązków szkolnych, a jednocześnie kiedy zainteresowania dzieci „domagają się „realistycznego objaśniania" świata, którego zakres stopniowo się rozszerza"[4]. Patrząc na rozwój dzieci, zauważamy, że stają się one coraz mądrzejsze, bardziej świadome i samodzielne. Coraz lepiej orientujące się w otaczającej rzeczywistości i potrafiące w niej działać i oddziaływać na nią w sposób coraz bardziej celowy i świadomy. Jak pisze M. Żebrowska[5], pomimo indywidualnych cech rozwojowych każdego dziecka, są cechy charakterystyczne i typowe dla poszczególnych okresów życia dziecka, zwane właściwościami, które pozwalają na wyznaczenie okresów rozwoju dzieci.

[1] Piaget J., Studia z psychologii dziecka, Warszawa 1966, s.9.
[2] Okoń W., Wprowadzenie do dydaktyki ogólnej, Warszawa 2003, s.89.
[3] Hessen S., Struktura i treści szkoły współczesnej, 1957, [w:] W. Okoń, Wprowadzenie do dydaktyki ogólnej, Warszawa 2003, s. 89.
[4] Podaję za Okoń W., Wprowadzenie do dydaktyki ogólnej, Warszawa 2003, s.89.
[5] Żebrowska M. (red), Psychologia rozwojowa dzieci i młodzieży, Warszawa 1977, s.172.

Podział okresów rozwoju S. Hessena, jest jedną z wielu klasyfikacji, które mogą być stosowane w psychologii rozwojowej. M. Żebrowska podaje alternatywną, która może być zastosowana do analizy i zrozumienia tych okresów. Obejmuje ona: sposób poznawania i uświadamiania sobie przez dziecko otaczającej rzeczywistości; dominujący rodzaj aktywności dziecka, a także specyficzne formy i metody oddziaływania wychowawczego[6]. Jak podkreśla autorka, rozwój procesów psychicznych i świadomości dzieci dokonuje się w toku ich działania, a procesy te kształtują się w dużym stopniu pod wpływem wychowania, dlatego wymienione wyżej procesy są ze sobą ściśle powiązane i warunkują się wzajemnie.

Natomiast M. Przetacznikowa w swojej klasyfikacji rozwoju człowieka wyróżnia pięć głównych etapów życia, które charakteryzują się specyficznymi cechami rozwojowymi oraz psychospołecznymi. Należy do nich: okres niemowlęcy - 0-1 rok życia; wiek poniemowlęcy - 1-3 lata; wiek przedszkolny - 3-7 lat; młodszy wiek szkolny - 7-11/12 lat; wiek dorastania - 12-13 do 17-18 lat, oraz wiek młodzieńczy – 17/18 – 23/25 lat[7]. W każdym z tych okresów, można wyróżnić jeszcze, podokresy, które cechują drobniejsze zmiany ilościowe[8].

Z kolei J. Piaget[9] wymienia sześć faz albo okresów rozwoju. Pierwszy, to faza pierwszych odruchów albo konstruktów wrodzonych oraz pierwszych tendencji instynktownych (pokarmowych) i pierwszych emocji. Drugi to faza pierwszych nawyków ruchowych, zorganizowanych spostrzeżeń oraz zróżnicowanych uczuć. Trzeci to faza inteligencji sensoryczno- motorycznej (praktycznej) elementarnych regulacji afektywnych i pierwszych zewnętrznych fiksacji afektywnych. Wszystkie trzy fazy J. Piaget zaliczył do okresu niemowlęctwa, który trwa do drugiego roku życia. Czwarta to faza intuicyjnej inteligencji, spontanicznych uczuć, międzyosobistych i społecznych stosunków podporządkowania się dorosłym. Trwająca od 2 do 7 roku życia, czyli druga część wczesnego dzieciństwa. Piąta faza - to faza konkretnych operacji intelektualnych (początki logiki) oraz moralnych i społecznych uczuć współdziałania. Trwa ona od 7 do 11/12 roku życia. Następna faza szósta - to faza abstrakcyjnych operacji intelektualnych, kształtowania się osobowości oraz afektywnego i intelektualnego wchodzenia w społeczeństwo dorosłych. Nazwana jest przez J. Piageta okresem młodzieńczym[10]. Te sześć faz sprowadził do czterech okresów rozwoju, które odzwierciedlają rosnący poziom złożoności ich myślenia (trzy pierwsze fazy wliczył do okresu niemowlęctwa – stąd cztery fazy rozwoju).

[6] Ibidem, s.186.
[7] Przetacznikowa M., Rozwój psychiczny dzieci i młodzieży, Warszawa 1967, s. 54.
[8] Ibidem, s.54.
[9] Piaget J., Studia z psychologii dziecka, Warszawa 1966, s. 10.
[10] Ibidem, s. 9-10.

Znajomość przez nauczycieli etapów rozwoju dzieci jest bardzo ważnym elementem, który pozwoli na zaplanowanie zajęć zgodnie z rozwojem uczniów i ich potrzebami i oczekiwaniami.

W tej części pracy omówione zostanie stadium inteligencji konkretno - operacyjnej, które według J. Piageta przypada na okres od 7 do 11/12 roku życia - czyli od momentu rozpoczęcia edukacji szkolnej do ukończenia trzeciej/czwartej klasy szkoły podstawowej[11]. Jest to okres, w którym dzieci stają w obliczu nowych wyzwań, mających istotny wpływ na ich rozwój poznawczy, emocjonalny, społeczny i fizyczny. Zmiany te są wynikiem przejścia z fazy wczesnego dzieciństwa do młodszego wieku szkolnego, co wiąże się z nowymi wymaganiami i oczekiwaniami ze strony otoczenia. Jak pisze J. Piaget - w każdym ze złożonych aspektów życia psychicznego pojawiają się nowe formy organizacji, które wieńczą konstrukcje zarysowane w poprzednich okresach, a jednocześnie zapoczątkowują szereg nowych[12] .

Pierwszym i najważniejszym aspektem rozwoju dziecka w tym okresie jest adaptacja do środowiska szkolnego. W młodszym wieku wczesnoszkolnym u dzieci możemy zauważyć intensywne przeżycia natury społecznej. Jak pisze L. Wołoszyna, w wieku 7-8 lat szukają oparcia u dorosłych. Szczególną rolę odgrywa nauczyciel- wychowawca, którego autorytet przewyższa autorytet rodziców. Ich relacje odbywają się na zasadzie konfliktów indywidualnych, stopniowo ucząc się współdziałania, współpracy i wspólnych gier zespołowych. W wieku 9-10 lat następują zmiany w stosunkach dzieci z rówieśnikami i dorosłymi. Zmniejsza się autorytet dorosłych, mimo iż szukają u nich wsparcia i życzliwości. Zwiększa się u dzieci potrzeba kontaktu z rówieśnikami, co powoduje, że liczą się z normami i zasadami obowiązującymi w grupie. Następuje wzrost aktywności i współpracy dzieci w grupie[13].

Około 10 – 11 roku życia dzieci zaczynają coraz częściej przejawiać tzw. moralność autonomiczną, w której liczy się raczej duch reguły, niż jej litera. Ten rodzaj moralności nakazuje postępować zgodnie z wyznawanymi przez siebie normami, bez względu na okoliczności (tzn. nie z powodu przymusu, obawy przed karą czy w oczekiwaniu na nagrodę), ale dlatego, że postępowanie to uważa się za słuszne. Satysfakcjonujące dla dziecka jest samo postępowanie zgodne z normą, dlatego okres ten zwykło się też nazywać okresem

[11] Piaget J., Studia z psychologii dziecka, Warszawa 1966, s. 9-10.
[12] Ibidem, s. 45.
[13] Wołoszynowa L., Młodszy wiek szkolny [w:] M. Żebrowska (red.) Psychologia rozwojowa dzieci i młodzieży, Warszawa 1977, s. 530.

moralnego pryncypializmu. W ocenach moralnych dzieci zaczynają brać pod uwagę czynniki psychologiczne, takie jak np. zamiar sprawcy, jego intencje, motywy, a także (z czasem) realne możliwości zgodnego z normą zachowania”[14].

„Kontakty społeczne umożliwiają dzieciom uzyskanie większego wglądu w siebie i we własne, rozwijające się osobowości. Poprzez interakcje z innymi i wyciąganie wniosków z ich osobistych doświadczeń zdobywają one poczucie osobistej świadomości”[15]. Ta samoświadomość pojawiała się już wcześniej, ale wtedy dzieci oceniały siebie głównie przez pryzmat wyglądu czy posiadanych zabawek. Natomiast w wieku wczesnoszkolnym zaczynają budować obraz samego siebie na podstawie swoich umiejętności oraz tego, jak widzą je inni ludzie.

W okresie wczesnoszkolnym zmienia się nastawienie dziecka na inne osoby. Dostosowują oni swoje zachowania, opinie i przekonania do norm społecznych i oczekiwań innych osób, zwłaszcza rówieśników. Jak pisze J. Piaget, „są zdolne do współdziałania, ponieważ „nie mieszają już własnego punktu widzenia z punktem innych”[16].

W tym okresie dzieci zaczynają również odróżniać pracę indywidualną od zbiorowej. Wynika to z potrzeby akceptacji, niwelowania niepewności oraz potrzeby przynależności do grupy. Zjawisko to jest naturalne i stanowi część procesu socjalizacji, w którym dzieci uczą się zasad współżycia społecznego[17].

W coraz większym stopniu dzieci są zdolne do koncentracji uwagi, do spostrzegania i obserwacji zjawisk.

Dzieci w młodszym wieku szkolnym cechuje duże zróżnicowanie pod względem wzrostu, ciężaru ciała i sprawności fizycznej. „Cechą charakterystyczną sylwetki dziecka w okresie wczesnoszkolnym jest rozrost wewnętrzny, co sprawia, że staje się ono masywniejsze w porównaniu z pajączkowatą sylwetką z okresu przedszkolnego. Następuje w dalszym ciągu rozwój głowy i mózgu oraz ogólny rozrost ciała. Pojawiają się prawie wszystkie zęby stałe”[18]. „W dalszym ciągu rozwijają się serce i płuca, wzrasta poziom hemoglobiny, a narządy rozrodcze przygotowują się do rozwoju”[19]. Analizatory wzrokowy i słuchowy, osiągają w tym okresie rozwojowym taką sprawność, jak u dorosłego człowieka.

[14] Stefańska-Klar R., Późne dzieciństwo. Młodszy wiek szkolny, [w:] Psychologia rozwoju człowieka, t. 2, red. B. Harwas-Napierała, J. Trempała, Warszawa 2001, s. 137.
[15] Turner J. S., Donald B. Helms, Rozwój człowieka, Warszawa 1999, s.308.
[16] Piaget J., Studia z psychologii dziecka, Warszawa 1966, s.44-45.
[17] Stefańska -Klar R., Późne dzieciństwo. Młodszy wiek szkolny [w:] B. Harwas-Napierała, J. Trempała, (red.) Psychologia rozwoju człowieka. Charakterystyka okresów człowieka, Warszawa 2020, s. 135.
[18] Becelewska D., Repetytorium z rozwoju człowieka, Jelenia Góra 2006, s. 180.
[19] Ibidem, s. 180.

Dzieci w tym okresie nadal cechują się dużą ruchliwością i wysoką spontaniczną aktywnością fizyczną. Opanowały już wszystkie podstawowe formy ruchu: bieganie, skakanie, obroty. Bezproblemowo opanowują jazdę na rowerze czy rolkach. „W dalszym ciągu następuje rozwój w zakresie motoryki dużej, na skutek czego pojawia się celowość i ekonomia ruchów, a także poprawia się szybkość i sprawność ruchów całego ciała oraz wzrasta siła mięśni. Wzmożona aktywność fizyczna, przejawiająca się w tak lubianych przez dzieci szkolne grach zespołowych, zawodach czy zabawie, stanowi doskonały bodziec stymulujący dalszy rozwój fizyczny”[20].

„Dzieci w tym okresie są zdolne do ruchów silnych, zamaszystych i taka aktywność sprawia im przyjemność. Natomiast ruchy precyzyjne męczą je, szczególnie w początkach tego okresu rozwojowego. Ten fakt winien być brany pod uwagę przez pedagogów i nauczycieli” (szczególnie języka polskiego, muzyki, wf -u)[21].

W dalszym ciągu następuje rozwój w zakresie motoryki małej, przejawiający się we wzroście sprawności i precyzji drobnych ruchów nadgarstka i palców ręki, które umożliwiają posługiwanie się długopisem i naukę pisania, a także wykonywanie prac techniczno-plastycznych, takich jak na przykład rysowanie, kolorowanie, wycinanie nożyczkami, czy wyklejanie. Postępy w tym zakresie możemy zauważyć w zmianie wyglądu rysunków. Są one bardziej uporządkowane i subtelne. Jak pisze A. Kamza,[22] rozwój fizyczny dziecka stanowi istotny czynnik z punktu widzenia wzrostu możliwości skutecznej realizacji działania zorientowanego na cel. Wzrost szybkości, dokładności i płynności ruchów oraz zwiększona sprawność fizyczna pozwalają bowiem wykonywać czynności w sposób szybki i elastyczny oraz wspierają umiejętność posługiwania się potrzebnym narzędziem, by uzyskać zamierzony efekt działania. W wyniku opisanych powyżej zmian polepsza się zdolność do celowego działania. Poprzez aktywność fizyczną i poznawczą dziecko poznaje swoje możliwości. Uczy się kontrolować podejmowane aktywności dzięki sukcesom i ciekawości. Wykształca się gotowość do podejmowania nowych złożonych działań, służących poznaniu”[23]. „Szczególne duże znaczenie w pierwszych latach nauki szkolnej ma rozwój u dzieci wrażeń stawowo- mięśniowych. Odgrywają one specjalną rolę w powstawaniu nawyków ruchowych”[24].

[20] Kamza A., Rozwój dziecka. Wczesny wiek szkolny [w:] Niezbędnik Dobrego Nauczyciela Redakcja: prof. dr hab. Anna Izabela Brzezińska, Seria I Rozwój w okresie dzieciństwa i dorastania. TOM 3, Warszawa 2014, s.18.
[21] Becelewska D., Repetytorium z rozwoju człowieka, Jelenia Góra 2006, s. 181.
[22] Kamza A., Rozwój dziecka. Wczesny wiek szkolny, [w:] Niezbędnik Dobrego Nauczyciela, op. cit., s.18.
[23] Becelewska D., Repetytorium z rozwoju człowieka…, op. cit., s. 181.
[24] Wołoszynowa L., Rozwój i wychowanie dzieci w młodszym wieku szkolnym, Warszawa 1967, s. 77.

W wieku wczesnoszkolnym również sfera emocjonalna „jako swoista dziedzina życia psychicznego, ulega wielkim przeobrażeniom w kierunku coraz większej intelektualności emocji oraz rozwoju uczuć wyższych, co pozostaje z rozwojem całej osobowości dziecka”[25]. Wiąże się to z poszerzeniem ilości przedmiotów, zjawisk, zdarzeń i spraw oraz zmianą charakteru emocjonalnego dzieci. W pierwszych latach wieku szkolnego w klasie pierwszej i drugiej, dzieciom zdarzają się jeszcze sytuacje demonstrowania w sposób burzliwy swoich emocji, mimo, że starają się je pohamować i zapanować nad nimi. Mimo wszystko w średnim dzieciństwie, dzieci coraz lepiej radzą sobie z kontrolowaniem swoich emocji, co pozwala im dłużej i z większym zaangażowaniem skupiać się na wykonaniu powierzonego zadania. Średniemu dzieciństwu towarzyszy większa dojrzałość emocjonalna.

Kolejno, następuje przejście od bezradności do niezależności i samowystarczalności oraz kontrolowania własnych emocji, dzięki którym dzieci dłużej koncentrują się na wykonywanych zadaniach. Zachodzi spadek lęków związanych z zapewnieniem ciału bezpieczeństwa. Jednak nie ulegają istotnemu zmniejszeniu lęki odnoszące się do sił nadprzyrodzonych. Pojawiają się nowe, które w większości dotyczą szkoły i rodziny. Dzieci obawiają się też kpin ze strony rodziców, nauczycieli i przyjaciół, podobnie jak przed odrzuceniem i dezaprobatą.

Agresja i złość w okresie wczesnoszkolnym nadal wyrażane jest fizycznie. W tym czasie powszechne są takie zachowania jak kopanie, popychanie, i bicie. Ale dzieci uczą się także, że złość może być wyrażona w formie obelg, kłótni, przeklinania. Złość może być także ukryta i wyrażona za pomocą dąsania lub nienawistnego i nieprzyzwoitego wpatrywania się w kogoś[26].

Istotnym elementem w rozwoju emocjonalnym w tym okresie, jak podkreśla L. Wołoszyna „są rozwijające się uczucia wyższe-jako trwały, określony i już w znacznym stopniu uświadomiony przez dzieci stosunek emocjonalny do ludzi, przedmiotów, zjawisk. Rozwój uczuć wyższych pozostaje w ścisłym związku z kształtowaniem się osobowości dzieci w wieku wczesnoszkolnym[27]”. Rozwój dziecka „w sferze poznawczej ściśle wiąże się z rozwojem umiejętności odbierania, przetwarzania i przyswajania informacji płynących ze środowiska, w którym dziecko funkcjonuje. Umiejętności te pozwalają jednostce na analizę otaczającej rzeczywistości, formułowanie o niej wniosków oraz określają sposób, w jaki się

[25] Wołoszynowa L., Młodszy wiek szkolny, [w:] Psychologia rozwojowa dzieci i młodzieży, red. M. Żebrowska, Warszawa 1997, s. 627.
[26] Turner J. S., Donald B. Helms, Rozwój człowieka, Warszawa 1999, s. 309.
[27] Wołoszynowa L, Młodszy wiek szkolny, [w:] Psychologia rozwojowa dzieci i młodzieży, red. M. Żebrowska, Warszawa 1997, s. 626.

uczymy. Rozwój poznawczy dziecka we wczesnej edukacji dostrzegamy w zmianach sprawności percepcyjnej, rozwoju funkcji zarządzających poznaniem, rozwoju pamięci i uwagi, a także w obrębie dziecięcego myślenia”[28]. Po ukończeniu przedszkola dzieci zazwyczaj wkraczają w fazę intensywnego rozwoju poznawczego. Pojawiają się zdolności do operacji umysłowych, czyli czynności umysłowych, które są odwracalne i umożliwiają łączenie przeciwstawnych czynności w całość[29].

Kształtują się strategie poznawcze oraz początki metapoznania. Dziecko w tym okresie posiada umiejętności prowadzenia operacji umysłowych prostych i złożonych, mających nadal swoje źródła w działaniach konkretnych. W miarę rozwoju pojawia się u dzieci umiejętność posługiwania się pojęciami abstrakcyjnymi. W dalszym ciągu odwracalność operacji myślowych jest możliwa tylko w przypadku czynności uprzednio obserwowanych. Jest to niezwykle istotna cecha, bo właśnie dzięki niej dzieci zaczynają posługiwać się coraz bardziej złożonymi strategiami poznawczymi i organizacyjnymi, a także opanowują umiejętność czytania i pisania[30].

Poziom rozwoju mowy okresie wczesnoszkolnym nadal podlega doskonaleniu. Rozszerza się jej funkcja symboliczna i następuje coraz silniejszy związek z myśleniem. „Jednym z ważnych dla rozwoju dziecka kierunków przeobrażeń, dokonujących się w wieku szkolnym w funkcjach mowy, jest włączenie się mowy do działania. Wyraża się to w umiejętności myślowej analizy sytuacji, uświadomieniu sobie celu i planu działania oraz środków do jego realizacji”[31]

W okresie średniego dzieciństwa wzrasta również zdolność rozróżniania barw i odcieni barwnych. „Dzieci opanowują nazwy kolorów i poprawnie stosują je w odniesieniu do barw podstawowych. Wzrasta również wrażliwość słuchowa i to zarówno w zakresie słuchu muzycznego, jak i fonetycznego”[32]. „W wieku 7-8 lat dzieci, zanim zaczną działać - myślą - i tym sposobem zaczynają refleksyjne zachowania”[33]. Pamięć w tym wieku jest przede wszystkim obrazowa, konkretna. L. Wołoszyna pisze, że „uczenie się dzieci w początkach

[28] Pawlusińska L., Psychopedagogiczne podstawy poznania matematycznego, Szczecin 2021, s.26-27.
[29] Marekwia M., Polewczyk I., Znaczenie diagnozy gotowości szkolnej w zakresie matematyki w kontekście diagnozy umiejętności matematycznych po klasie I., s. 136, w: https://journals.us.edu.pl/index.php/CHOWANNA/article/view/21229, (dostęp: 12.02.2025).
[30] Pawlusińska L., Psychopedagogiczne podstawy poznania matematycznego, Szczecin 2021, s. 18-19.
[31] Wołoszynowa L, Młodszy wiek szkolny, [w:] Psychologia rozwojowa dzieci i młodzieży, red. M. Żebrowska, Warszawa 1997, s. 626.
[32] Stefańska-Klar R., Późne dzieciństwo. Młodszy wiek szkolny, [w:] Psychologia rozwoju człowieka, t. 2, red. B. Harwas-Napierała, J. Trempała, Warszawa 2001, s. 86.
[33] Piaget J., Studia z psychologii dziecka, Warszawa 1966, s. 47.

nauki szkolnej jest skuteczne, jeśli treści kształcenia podane są w sposób konkretny, poglądowy”[34]. W okresie wczesnoszkolnym ponownie dzieci zainteresowane są światem, następuje stopniowa obiektywizacja poznania, zaczynają również posługiwać się logiką zbliżoną do tej, której używają dorośli. Pojawiają się w rozumowaniu pierwsze operacje konkretne, dotyczące pojęć liczbowych.

„Powszechne u dzieci w okresie średniego dzieciństwa nastawienie na dosłowne zapamiętanie wyuczanego materiału, zaczyna ulegać zmianom. Dzieci szkolne coraz częściej starają się zrozumieć to, czego się uczą, dokonują samodzielnej analizy, przekształcenia i organizacji informacji zawartych w materiale. Wykorzystują przy tym rozmaite strategie pamięciowe”[35].

Następuje również postęp w funkcjonowaniu uwagi, która jest podstawowym elementem mającym wpływ na rozwój procesów poznawczych. Staje się ona bardziej kognitywna. Jest to efektem dojrzewania centralnego układu nerwowego oraz uczenia się.

Jak pisze M. Żebrowska - okres wczesnoszkolny to stadium myślenia pojęciowego i konformizmu[36], ponieważ „uwaga mimowolna, sterowana przez emocjonalny charakter bodźców, staje się coraz bardziej zależna od celu oraz struktury czynności poznawczej”[37].

U dzieci w tym okresie rozwijają się również podstawowe funkcje sfery intelektualnej takie, jak: analiza, synteza wzrokowa, słuchowa kinestetyczno- ruchowa, a osiągnięcie odpowiedniego ich poziomu warunkuje opanowanie umiejętności czytania i pisania, które jest niezmiernie istotne w dwóch pierwszych latach nauki. W tym okresie dzieci przyswajają również pojęcie liczby naturalnej i podstawowe działania arytmetyczne.

W wieku 9 i 10 lat intensywnie rozwija się mowa i myślenie. Opanowanie przez dzieci umiejętności pisania i czytania rozszerza możliwości konstruowania wiedzy o świecie. Również w tym okresie „dziecko przyswaja sobie pojęcie ułamka i umie operować nim, szczególnie w sytuacjach praktycznych, opanowuje podstawowe zasady dziesiętnego systemu miar i pojęcie ułamka dziesiętnego, jak też elementarne wiadomości z geometrii”[38].

W końcu młodszego wieku szkolnego dzieci dokonują operacji logicznych na podstawie „rzeczywistego lub wyobrażonego manipulowania przedmiotami. Osiągnięciem tego okresu

[34] Wołoszynowa L., Rozwój i wychowanie dzieci w młodszym wieku szkolnym, Warszawa 1967, s. 67.
[35] Stefańska -Klar R., Późne dzieciństwo. Młodszy wiek szkolny, (w) B. Harwas-Napierała, J. Trempała, (red:) Psychologia rozwoju człowieka. Charakterystyka okresów człowieka, Warszawa 2020, s. 135.
[36] Żebrowska M., Psychologia rozwojowa dzieci i młodzieży, Warszawa 1977, s. 180.
[37] Stefańska -Klar, R. Późne dzieciństwo. Młodszy wiek szkolny, op. cit., s. 135.
[38] Wołoszynowa L., Młodszy wiek szkolny, [w:] M. Żebrowska, (red) Psychologia rozwojowa dzieci i młodzieży, Warszawa 1977, s. 530 -231.

jest opanowanie pierwszego zespołu operacji myślowych, zwanych konkretnymi”[39]. Następuje również zwiększenie samoświadomości, która powoduje, że motywacja do uczenia się rozwija się coraz bardziej w kierunku uwewnętrzniania się (interioryzacji)[40]. Późne dzieciństwo to okres, w którym zgodnie z poglądami Jeana Piageta następuje przejście od stadium myślenia przedoperacyjnego do stadium operacji konkretnych. W tym czasie operacyjne rozumowanie dziecka wyraźnie się rozszerza, zaczynając obejmować logiczne kategorie przyczyny i skutku oraz pojęcia przestrzeni i czasu[41]. Wraz z tymi zmianami poznawczymi u dzieci następuje również intensywne poszerzanie zasobu słownictwa.

Komunikacja słowna staje się coraz bardziej złożona pod względem semantycznym, stylistycznym oraz lingwistycznym. W bardziej płynny sposób wyrażają własne myśli. Zwiększa się także zasób słownictwa abstrakcyjnego, terminologii naukowej oraz języków obcych.

„Spostrzeganie i wyodrębnianie cech przedmiotów umożliwia dziecku zrozumienie ich funkcji oraz ich porównywanie z innymi obiektami. Proces ten prowadzi stopniowo do uogólniania i abstrahowania. W związku z tym, zarówno mowa, jak i myślenie dziecka są ściśle związane z procesami spostrzegania, zauważania, kodowania i pamięci, a także z wykorzystaniem wcześniejszych doświadczeń, które opierają się na odruchu orientacyjno-badawczym”[42].

W dalszej części tego podrozdziału zostaną opisane potrzeby poznawcze dzieci. Cechą każdej jednostki jest odczuwanie potrzeb. Wincenty Okoń definiuje potrzeby „jako stan, w którym jednostka odczuwa chęć zaspokojenia jakiegoś braku np. w zapewnieniu sobie warunków życia, utrzymania gatunku, osiągnięciu pozycji społecznej i in. Potrzebie zwykle towarzyszy silna motywacja, niekiedy utożsamia się ją więc z motywem, kiedy indziej znów z popędem lub instynktem”[43]. Z kolei Heliodor Muszyński przedstawia „potrzebę jako dyspozycję do przeżywania stanu napięcia psychonerwowego pod wpływem braku jakiegoś dotychczas występującego stale warunku; napięcie to pobudza i kieruje aktywnością człowieka”[44]. Jeszcze inna definicja mówi o tym, że „potrzeba, to termin rozumiany w dwóch znaczeniach: przedmiotowym — jako zewnętrzna wobec organizmu rzecz lub jej cecha, której wystąpienie lub brak wpływa na poprawę dobrostanu i funkcjonowania organizmu, oraz

[39] Ibidem s. 231.
[40] Stefańska-Klar R., Późne dzieciństwo. Młodszy wiek szkolny, w: B. Harwas-Napierała, J. Trempała, (red:) Psychologia rozwoju człowieka . Charakterystyka okresów człowieka, Warszawa 2020, s. 135.
[41] Piaget J., Studia z psychologii dziecka, Warszawa 1966, s. 48–51, 59.
[42] Becelewska D., Repetytorium z rozwoju człowieka, Jelenia Góra 2006, s. 185.
[43] Okoń W., Słownik pedagogiczny, Warszawa 1981, s. 236-237.
[44] Muszyński H., Zarys teorii wychowania, 1977, s. 77.

podmiotowym — jako wewnętrzny stan organizmu, który odczuwa pewien brak lub nadmiar, powstały w wyniku zakłócenia optimum życiowego” [45]. Wśród wszystkich potrzeb znajdują się potrzeby poznawcze, które K. Obuchowski definiuje jako „właściwości jednostki ludzkiej, które powodują, że nie może ona żyć bez wiedzy o świecie ani rozwijać się bez jego rozumienia”[46]. W niniejszej pracy potrzeba poznawcza definiowana będzie jako właściwość jednostki ludzkiej, która jest przyczyną nabywania nowej wiedzy i doskonalenia posiadanej.

Potrzeby poznawcze należą do podstawowych ludzkich potrzeb. Są powszechne, występują we wszystkich kulturach. Mają one charakter rozwojowy, domagają się ich ciągłego zaspokajania w coraz to nowych obszarach wiedzy i rozumienia. Problem potrzeb poznawczych człowieka to problem jego ciekawości, intelektualnej aktywności, nabywania nowej wiedzy i uzupełniania wiedzy już posiadanej[47].

Wiek wczesnoszkolny jest okresem intensywnego rozwoju poznawczego dziecka. Rozpoczęcie przez dziecko nauki szkolnej wiąże się z nowymi wymaganiami intelektualnymi, społecznymi oraz emocjonalnymi, a te z kolei wpływają na sposób poznawania świata. Potrzeby poznawcze dziecka w tym okresie odnoszą się do zdobywania wiadomości, rozumienia zjawisk, rozwijania umiejętności myślenia oraz samodzielnego rozwiązywania problemów. Potrzeby poznawcze dziecka w tym okresie można analizować w oparciu o klasyczne teorie rozwoju poznawczego, w szczególności koncepcje Jeana Piageta, Lwa Wygotskiego oraz Jerome’a Brunera.

Teoria rozwoju J. Piageta zakłada, że „Dziecięce widzenie świata, dziecięca logika jest początkowo zupełnie różna od tego, co występuje u dorosłych. Od aktywności fizycznej, związanej z przedmiotami materialnymi przechodzi dziecko do aktywności wyobrażeniowej, a w końcu do aktywności typu logiczno - matematycznej”[48]. J. Piaget wychodzi z założenia, że dzieci w procesie uczenia się powinny samodzielnie „konstruować” swoją wiedzę. Zdobyte w działaniu doświadczenia pozwalają im tworzyć struktury poznawcze. Powstające w umyśle dziecka schematy poznawcze, a więc reprezentacje rzeczywistości, są systematycznie eksplorowane, modyfikowane, łączone, rozdzielane i zmieniane. Stają się coraz bar-

https://rapid.com/sites/default/files/streams/689c1880-fa54-4a9e-90d2-85e63655af63/content

[45] Encyklopedia PWN, https://encyklopedia.pwn.pl/haslo/potrzeba;3961121.html, (dostęp: 12.02.2025).
[46] Obuchowski K., Psychologia dążeń ludzkich, Warszawa 1983, s. 178.
[47] Gołek B., Poznawcze Potrzeby nauczycieli, Kraków 2010, s. 26,
, (dostęp: 12.03.2025).
[48] Podaję za Gałwiaczek E., Psychologiczne podstawy kształtowania pojęć matematycznych, https://www.profesor.pl/publikacja,8648,Artykuly,Psychologiczne-podstawy-ksztaltowania-pojec-matematycznych-referat,(dostęp:12.03.2025).

dziej skomplikowane dzięki realizacji kilku komplementarnych procesów, takich jak: asymilacja, akomodacja, równoważenie i nierównoważenie[49]. Asymilacja polega na włączaniu do istniejących już schematów zmysłowo-ruchowych lub pojęciowych nowego, pochodzącego z zewnątrz elementu. Koncentruje się na uzupełnianiu funkcjonujących schematów umysłowych o nowe informacje i wzmacnianiu ich. Akomodacja zaś wymusza konieczność modyfikacji istniejących struktur poznawczych w celu uwzględnienia odmiennych od już ukształtowanych systemów umysłowych. Akomodacja i asymilacja są procesami ściśle skorelowanymi.

Z kolei w swojej kulturowo-historycznej teoria rozwoju Lew Wygotski zwracał uwagę na społeczne uwarunkowania rozwoju poznawczego i rolę interakcji w procesie uczenia się. Centralnym pojęciem jego teorii jest strefa najbliższego rozwoju. Jest ona definiowana jako obszar pomiędzy aktualnym poziomem rozwoju dziecka a poziomem, który może ono osiągnąć przy wsparciu dorosłych lub bardziej kompetentnych rówieśników. To, co dziecko robi dziś przy pomocy dorosłych, zrobi jutro samodzielnie. Strefa najbliższego rozwoju pomaga więc określić dynamiczny stan rozwoju dziecka, który uwzględnia nie tylko to, co dziecko w tym procesie już osiągnęło, lecz również to, co w nim dopiero dojrzewa[50]. W takim ujęciu potrzeby poznawcze dziecka obejmują potrzebę współpracy oraz stopniowego wsparcia dydaktycznego, dialogu, który umożliwia internalizację nowych umiejętności i strategii poznawczych. Istotną rolę w rozwoju potrzeb poznawczych u dziecka odgrywa nauczyciel. Poprzez swoje działania daje początek wielu wewnętrznym procesom rozwojowym u dziecka, rozwija i uruchamia te procesy, które w pierwszym etapie nauczania są dostępne dziecku tylko w sferze obcowania z otoczeniem i współpracy z kolegami, a potem, po przejściu rozwoju wewnętrznego stają się wewnętrznym dorobkiem samego dziecka[51]. Teoria strefy najbliższego rozwoju L.Wygotskiego ma istotne znaczenie dla edukacji. Aby nauczanie było efektywne i skuteczne, nauczyciel powinien bazować w pracy z uczniem na rozwijających się w nim potrzebach rozwojowych, nowych doświadczeniach, kształtującej się dopiero wiedzy, a także uwzględniać jego możliwości i rodzące się dopiero zainteresowania. Ważne jest poznawanie specyfiki dyskretnych często zmian w funkcjonowaniu ucznia, w

[49] Gałaś M., (Re)konstruowanie edukacji, [w:] Refleksje, Zachodniopomorski Dwumiesięcznik Oświatowy, nr.6, listopad/grudzień 2016, s. 11.
[50] Wygotski, L.S., Nauczanie a rozwój w wieku przedszkolnym. [w:] Wygotski L.S., Wybrane prace psychologiczne, Wybór i tłumaczenie: Edda Flesznerowa i Józef Fleszner, redaktor naukowy Edward Franus, Warszawa 1971, s. 530-542.
[51] Ibidem, s.545.

jego stylu bycia i działania, obserwowanie jego działalności i zaangażowania w rozwiązywanie określonego zadania.

Natomiast Jerome Bruner podkreślał aktywną rolę ucznia w procesie uczenia się oraz znaczenie uczenia się przez odkrywanie. Uważał, że uczenie się jest procesem ciągłym, w którym dziecko konstruuje swoją wiedzę, poszerza ją, samodzielnie dochodzi do rozwiązań, formułuje hipotezy i porządkuje informacje. Podkreśla, że uczenie się przez odkrywanie pomaga dziecku przyjąć odpowiedzialność za własne uczenie się, rozwija bardziej złożone myślenie, pozwala koncentrować się na wewnętrznej, a nie zewnętrznej motywacji i pomaga dziecku zapamiętywać i przetwarzać ważne informacje. „Im bardziej dziecko potrafi traktować uczenie się jako odkrywanie czegoś, a nie uczenie się o czymś, tym silniej wystąpi u niego tendencja do uczenia się na zasadzie autonomicznego samonagradzania, a jeszcze lepiej na zasadzie nagrody, jaką stanowi samo odkrycie”[52].

Do rozwoju poznawczego przyczynia się także edukacja matematyczna, która wzmacnia podstawowe umiejętności takie, jak na przykład obserwacja, umiejętność reprezentowania danych, interpretowania ich, analizowania i syntetyzowania, ale też oceniania zaplanowanych działań. Ponadto podstawowe umiejętności poznawcze takie, jak kierunkowość, wizualizacja, wyczucie czasu/rytm i pamięć wizualno-przestrzenna stanowią istotę umiejętności matematycznych. J. Piaget twierdzi, że każdy uczeń jest zdolny do poprawnego rozumowania matematycznego, jeżeli odwołamy się do jego aktywności i usuniemy zaburzenia emocjonalne[53]. W okresie wczesnego wieku szkolnego dzieci przeprowadzają proste i złożone operacje umysłowe, ale nadal bazują na konkretach. „Stopniowo pojawia się umiejętność operowania pojęciami abstrakcyjnymi. Odwracalność operacji myślowych, których zaczątki mogliśmy obserwować już we wcześniejszym stadium, w dalszym ciągu jest możliwa tylko w przypadku czynności uprzednio obserwowanych. Jest to niezwykle istotna cecha, bo właśnie dzięki niej dzieci zaczynają posługiwać się coraz bardziej złożonymi strategiami poznawczymi i organizacyjnymi, a także opanowują umiejętność czytania i pisania”[54]. W tym okresie dzieci rozumieją pojęcie stałości, dzięki decentralizacji oraz odwracania swoich operacji umysłowych. „Decentracja umożliwia ujmowanie rzeczywistości z różnych perspektyw. W aspekcie poznawczym oznacza to zdolność do łączenia i jednoczesnego porównywania więcej niż jednej cechy badanego obiektu oraz rozpatrywania sytuacji problemowej

[52] Bruner J.S., Akt dokonywania odkrycia. W: J.S. Bruner, Poza dostarczone informacje. Studia z psychologii poznawania. PWN, Warszawa 1978, s. 670.
[53] Piaget, J., Studia z psychologii dziecka. Warszawa 2006, s. 8-12.
[54] Pawlusińska L., Kierowane odkrywanie matematyki we współczesnej edukacji, Szczecin 2021, s. 19,

w kontekście kilku rozwiązań”[55]. W okresie przedoperacyjnym dzieci uzyskują wiedzę o tym, że „jakościowa natura obiektów jest niezmienna. W stadium operacji konkretnych dziecko opanowuje różne postaci pojęcia stałości ilości: wiedzą, że ilościowe cechy obiektów są niezmienne”[56]. Inną oznaką rozwoju poznawczego, który zachodzi u dzieci w wieku wczesnoszkolnym, jest proces klasyfikowania. Dzieci znają pojęcia zbioru, podzbioru, łączenia zbiorów. Dzieci w wieku wczesnoszkolnym, które są w stadium operacji konkretnych, w wieku 7-8 lat, posiadają zdolność do porządkowania obiektów według nich wielkości – czyli szeregowania[57]. Coraz lepiej różnicują cechy rzeczywistości, rozwijają zdolności do porównywania przedmiotów oraz ich klasyfikowania według dowolnych kryteriów, definiowania i uogólniania . „Kształtuje się więc stopniowo myślenie kategorialne (pojęciowe), coraz lepsze zrozumienie stosunków przestrzennych, obiektywnych związków przyczynowych”[58] .

Ponadto w okresie późnego dzieciństwa uczniowie wykazują się większą świadomością zrozumienia pojęć kształtu i wielkości oraz ich powiązania ze środowiskiem. „W szczególności dzieci lepiej rozumieją kształt i wielkość w powiązaniu z odległością i mogą rozpoznawać znane sobie formy w zmienionym lub obcym otoczeniu”[59]. Dzieci po ukończeniu 7 lat rozumieją perspektywę przestrzenną. Wiedzą, że te same obiekty mogą wyglądać inaczej w zależności od punktu widzenia[60]”. W okresie średniego dzieciństwa dzieci posiadają zdolność do rozumienia relacji między przedmiotami. Poprawnie wskazują prawą i lewą stronę, w górę, w dół, w przód, w tył, nad, pod, obok, między. Rozwija się również pojęcie ilości. Jak wskazują Barrody i Coslick (cytowane za: Turnerem, Helmsem, 1999) „Większość dzieci jest zdolna do pojmowania trwałości liczb i nie będzie się ograniczała do ich funkcjonalnego i niewerbalnego rozumienia”[61]. Znajomość tego pojęcia ułatwi dzieciom wykonywanie dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia. Są one ponadto podstawą do opanowania terminów z zakresu miar długości, masy i objętości oraz obliczeń pieniężnych. Dzieci w tym okresie rozwoju znają i posługują się już pojęciem czasu zegarowego, znają dni tygodnia, miesiąca, pory roku.

Dzieci uczą się matematyki poprzez rozwiązywanie problemów. Zdolność do ich rozwiązywania rozwija się wraz z wiekiem oraz wzrastającymi zdolnościami pamięciowymi.

[55] Ibidem, s.19.
[56] Vasta R., Marshall M. Haith, Skott A. Miller, Psychologia dziecka, Warszawa 1995, s. 291.
[57] Jeffery S. Turner, Donald B. Helms, Rozwój człowieka, Warszawa1999, s. 292.
[58] Żebrowska M., Psychologia rozwojowa dzieci i młodzieży, (red:)M. Żebrowska, Warszawa 1977, s. 181.
[59] Jeffery S. Turner, Donald B. Helms, Rozwój człowieka…, op. cit., s. 294.
[60] Ibidem, s. 294.
[61] Ibidem, s. 295.

W wieku wczesnoszkolnym dzieci „stają się bardziej sprawne w organizowaniu, poszukiwaniu oraz wydobywaniu informacji, które zostały zakodowane lub umieszczone w magazynie pamięciowym”[62]. Rozwiązują problemy poznawcze w zależności od posiadanych stylów poznawczych, dzięki którym jest organizowana informacja i są znajdowane drogi rozwiązania zadań[63].

Przedstawione wybrane zagadnienia związane z rozwojem poznawczym dzieci, który obejmuje kształtowanie się pojęć, zdolności do rozwiązywania problemów oraz style poznawcze, mają znaczący wpływ na postępy uczniów. Obligują nauczycieli do zaspokojenia ich potrzeb w tym zakresie. Rolą nauczycieli jest pokazanie dzieciom, iż „matematyka, to nie tylko arytmetyka i geometria, to nie tylko obliczenia praktyczne związane z wykonywaniem prac i rozwiązywaniem problemów życiowych. Matematyka to również, a może przede wszystkim, umiejętność dostrzegania zależności, wnioskowania, argumentowania, uzasadniania, uogólniania, czyli to, co określa się czasem myśleniem matematycznym”[64]. Warto także dodać, że myślenie lub rozumowanie jest złożonym procesem, polegającym na odnajdywaniu zależności między pojęciami i wyciąganiu wniosków. Posługiwanie się elementami pamięci, oraz umiejętnościami z reguły wiąże się z tworzeniem nowej wiedzy[65]. Myślenie matematyczne jest myśleniem konkretnym, które oparte jest na określonych założeniach, prawach logicznych, definicjach, twierdzeniach, ale również na stawianiu pytań-hipotez. Wymaga umiejętności analizowania i syntetyzowania[66]. Zaspokojenie potrzeb w tym zakresie zależy od etapu rozwoju dzieci. Integracja założeń teorii J. Piageta, L. Wygotskiego i J. Brunera pozwala lepiej zrozumieć mechanizmy rozwoju poznawczego dziecka i stanowi ważną podstawę dla skutecznej praktyki edukacyjnej.

Reasumując, jedną z podstawowych potrzeb poznawczych dziecka w wieku wczesnoszkolnym jest potrzeba ciekawości i eksploracji. Dzieci interesują się otaczającą rzeczywistością i chętnie szukają sensownych wyjaśnień obserwowanych zjawisk poprzez zadawanie różnorodnych pytań. Dlatego istotne jest, aby nauczyciele stwarzali warunki, które sprzyjają eksperymentowaniu, odkrywaniu i tym samym aktywnemu uczestnictwu w procesie edukacyjnym. Ważna jest także potrzeba rozumienia i porządkowania wiedzy. Dzieci uczą się analizować, klasyfikować, porównywać i wyciągać wnioski. A to związane jest z procesem

[62] Ibidem, s. 296-297.
[63] Ibidem, s. 297.
[64] Ibidem, s.545.
[65] Ibidem, s. 10.
[66] Ibidem, s. 10.

stopniowego przechodzenia od myślenia intuicyjnego do coraz bardziej logicznego i operacyjnego. Istotne staje się dla nich zrozumienie sensu wykonywanych przez nie zadań, a nie tylko mechaniczne zapamiętywanie informacji. Dzieci w wieku wczesnoszkolnym wykazują również silną potrzebę aktywności poznawczej poprzez działanie. Nauka oparta na działaniu sprzyja trwałemu zapamiętywaniu oraz rozwijaniu umiejętności praktycznych. Dzieci skutecznie uczą się, gdy mogą wykonywać doświadczenia, a także biorą udział w różnych grach dydaktycznych. Istotną rolę odgrywa także potrzeba sukcesu poznawczego i poczucia kompetencji. Pozytywne doświadczenia edukacyjne wzmacniają motywację wewnętrzną dziecka i wiarę we własne możliwości intelektualne. Każde dziecko potrzebuje informacji zwrotnej, która potwierdza jego postępy oraz możliwości odnoszenia sukcesów adekwatnych do jego możliwości rozwojowych. Nie można pominąć także potrzeby wsparcia dorosłych w procesie poznawczym. Nauczyciele i rodzice pełnią funkcję facylitatorów, którzy pomagają dziecku zrozumieć nowe treści, formułują różne wyzwania i zachęcają do samodzielnego myślenia. W procesie kształcenia merytoryczne wsparcie nauczyciela sprzyja rozwijaniu samodzielności poznawczej i umiejętności uczenia się.

1.2. Matematyka jako nauka i jej teorie/strategie nauczania

Termin „matematyka", pochodzi od starogreckich słów *mathēmatikḗ*, *máthēma* 'poznanie', 'umiejętność' i oznacza przede wszystkim uczenie się przez rozmyślanie. To nauka dedukcyjna, której celem jest badanie konsekwencji przyjętych założeń[67]. Samo myślenie matematyczne to przede wszystkim operowanie abstrakcyjnymi pojęciami, za pomocą których dokonuje się wyrażanie reprezentacji konkretnych problemów[68]. „Matematyka jest wyrazem myśli ludzkiej, odzwierciedlającym czynną wolę, kontemplacyjny rozum i dążenie do doskonałości estetycznej. Jest narzędziem stworzonym specjalnie do wszelkich abstrakcyjnych koncepcji i nie ma ograniczeń dla jej potęgi w tym zakresie, a jej podstawowymi elementami są: logika i intuicja, analiza i konstrukcja, uogólnianie i indywidualizowanie. Różne kultury podkreślały różne spośród tych aspektów, jednak tylko interakcja tych przeciwstawnych sił, walka o syntezę, stanowi o ich żywotności, użyteczności i ogromnym znaczeniu matematyki umożliwiającej znajdowanie analogii między twierdzeniami, dowodami, a także między samymi

[67] Zob. Matematyka, w: Encyklopedia Powszechna PWN, https://encyklopedia.pwn.pl/haslo/matematyka; 3938552.html, (dostęp: 22.03.2025).
[68] Ibidem

teoriami”[69].

Warto w tym miejscu przytoczyć słowa Stanisława Ulama, przedstawiciela lwowskiej szkoły matematycznej, który skonstatował, że wiele osób próbowało podać precyzyjną definicję *matematyki*, ale nikomu to się nie udało: „Ona jest zawsze czymś innym. Ludzie wiedzą, mniej więcej, że zajmuje się ona liczbami, figurami, relacjami, działaniami i przekształceniami oraz, że jej procedury formalne takie jak aksjomaty, dowody i twierdzenia nie zmieniły się od czasów Archimedesa”[70]. Natomiast inny wybitny matematyk Stefan Banach napisał, że „Mimo swojego podstawowego znaczenia dla dzisiejszej kultury, matematyka jest nauką, której istota i rola dla niewielu tylko jest zrozumiała. (…) Do wiadomości ogółu docierają tylko pewne ciekawostki matematyczne podawane przez gazety i książki popularne, które zaciemniają prawdziwą istotę matematyki i dają wręcz fałszywy jej obraz”[71]. Z kolei polski filozof Jan Such stwierdził, że „Matematyka jest w pewnym sensie nauką bezprzedmiotową w tym znaczeniu, że jej przedmiotem badania nie jest żaden realnie i niezależnie od człowieka istniejący przedmiot”[72].

Co to jest matematyka? Tak swoją pracę zatytułował Michał Heller, filozof przyrody, teolog, fizyk, kosmolog, pierwszy polski laureat Nagrody Templetona w 2008, przyznawanej za pokonywanie barier między nauką i religią. Autor stwierdził, że światu należy przypisać pewną obiektywną cechę, dzięki której skutecznie można go badać przy pomocy matematyki. Tę właśnie cechę M. Heller nazwał matematycznością świata, zakładając tym samym obiektywizm istnienia struktur matematycznych. Przez matematykę powinniśmy rozumieć abstrakcyjne prawidłowości, które nasze formuły i równania tylko w jakiś sposób ujmują, wtedy tak rozumianej matematyce możemy przypisywać przynajmniej pewien stopień niezależności od naszego umysłu. Gdyby nie matematyka, świata by po prostu nie było[73].

Przytoczone przeze mnie wypowiedzi znanych naukowców wyraźnie podkreślają, że matematyka jest pełna nieograniczonych możliwości i wiedza matematyczna jest unikatowa. A prawdy matematyczne są obiektywne i konieczne, dlatego też nie można ich porównać z niczym innym. Stąd Edward Frenkl, rosyjsko-amerykański matematyk, wyraźnie podkreślił, że nie można opatentować wzoru matematycznego, ponieważ należy on do wszystkich, a po-

[69] Remża P., Uwarunkowania niepowodzeń szkolnych z matematyki, Białystok 2025, s. 26.
[70] Ulam S., Przygody matematyka. Autobiografia, A. Górnicka (tł.), Kraków 2021, s.28.
[71] Banach S., Przedmowa [w:] E. Colerus, Od tabliczki do różniczki. Matematyka dla wszystkich, Kraków 1938, s. V - VI.
[72] Such J., Wstęp do metodologii ogólnej nauk, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, Poznań 1969, s. 316.
[73] Heller M., Co to jest matematyka? Zagadnienia Filozoficzne w Nauce, XXVIII-XXIX, 2001, s. 71–82.

nadto nie ma nic innego, co byłoby tak istotne i wspaniałe, a jednocześnie dostępne dla każdego. Wprost trudno uwierzyć, że taki zasób wiedzy naprawdę istnieje[74].

Matematyka służy badaniu wielu zjawisk związanych z codziennym, jednostkowym życiem oraz jego powiązaniami z szerszymi układami społecznymi[75]. Dzięki matematyce uczniowie nabywają umiejętności krytycznego myślenia i postrzegania świata w sposób logiczny i uporządkowany. Jak konstatuje Eric Gutstein, matematyka nie jest potrzebna tylko po to, aby umieć liczyć i logicznie myśleć, ale także po to, by rozumieć relacje władzy, źródła społecznych nierówności i nierównych możliwości, zrozumieć dyskryminację rasową, płciową czy klasową[76]. Za pomocą określonych praw matematycznych można antycypować różne zjawiska, które dzieją się w przestrzeni publicznej. Znajomość matematyki to istotny element wyposażenia intelektualnego każdego wykształconego człowieka. Obecnie, rozwiązywanie ciągle pojawiających się problemów nie tylko naukowych, ale kulturalnych czy gospodarczych wymaga i będzie wymagać w przyszłości nowego podejścia i nowych pojęć, których trzeba będzie szukać w coraz subtelniejszych wynikach dociekań matematycznych. To przyczynia się do ciągłego poszerzania i pogłębiania wykształcenia matematycznego na wszystkich szczeblach kształcenia i to ogółu społeczeństwa[77].

Pojęcie teoria kształcenia matematyki używane jest często zamiennie z dydaktyką matematyki. Jest to dziedzina nauki, która zajmuje się badaniem i opracowywaniem zasad, metod i strategii efektywnego nauczania i uczenia się matematyki na różnych poziomach edukacji. Istotne tutaj są cele i treści kształcenia matematyki, stosowane przez nauczycieli metody i formy, środki dydaktyczne, system oceniania i ewaluacji oraz uwarunkowania społeczne, psychologiczne i kulturowe.

W nauczaniu-uczeniu się matematyki w klasach 1-3 szkoły podstawowej niezbędne są teorie/strategie, które uwzględniają specyfikę rozwoju poznawczego, emocjonalnego, fizycznego i społecznego dzieci w młodszym wieku szkolnym. Ze względu na funkcjonowanie różnych modeli matematycznych w codziennym otoczeniu każdej jednostki, rozwiązywanie realistycznych problemów jest ważne i istotne, ponieważ pomaga dzieciom i nastolatkom w rozumieniu świata, a także wspiera naukę matematyki w kontekście motywacji, tworzenia pojęć i rozumienia terminów; pomaga w rozwoju kompetencji matematycznych

[74] Frenkel E., Miłość i matematyka. Istota ukrytej rzeczywistości, Warszawa 2015, s. 4.
[75] Gutstein E., Reading and Writing the World with Mathematics: Toward a Pedagogy of for Social Justice (Critical Social Thought), Routledge Taylor & Francis Group, New York 2006, s. 25.
[76] Ibidem, s. 26.
[77] Zob. Remża P., Niepowodzenia szkolne w dziedzinie matematyki a efektywność procesu dydaktycznego [w:] A. Karpińska, M. Zińczuk (red.), Dydaktyczna refleksja o edukacyjnych priorytetach, Warszawa 2014, s. 133-143.

i odpowiadających im umiejętności oraz pomaga w rozumieniu matematyki jako dyscypliny[78]. Takie podejście do nauczania matematyki nie jest łatwe dla nauczycieli, ponieważ oprócz wiedzy matematycznej wymaga również wiedzy i doświadczenia zdobywanego w życiu codziennym. Z reguły nauczyciele uważnie planują swoje nauczanie i antycypują dokładny przebieg lekcji niemal co do minuty. Zapisują nawet pytania i odpowiedzi, jakich oczekują od swoich uczniów. Jednak nauczanie z rozwiązywaniem realistycznych problemów nie może być tak przewidywalne i wtedy nauczanie staje się bardziej elastyczne. Nauczanie matematyki na poziomie klas I-III powinno odbiegać od tradycyjnie rozumianego nauczania. W edukacji matematycznej na tym etapie kształcenia istnieje możliwość dostarczenia dziecku takich doświadczeń, dzięki którym będzie ono przygotowane do matematyzowania świata – czyli do budowania swojej własnej matematyki. Stąd na tym właśnie etapie rozwoju dziecka, ważną rolą nauczyciela jest odpowiednie sterowanie procesem uczenia się poprzez właściwe organizowanie środowiska, w którym dziecko może zdobywać doświadczenia istotne dla prowadzenia rozumowań matematycznych[79]. Również na tym etapie rozwoju istotną cechą związaną z uczeniem się matematyki jest sam charakter pojęć matematycznych oraz sposób ich przyswajania. Trudno podawać dzieciom w klasach I-III gotowe pojęcia matematyczne, które są wieloaspektowe i wymagają od uczniów ich wyuczenia się na pamięć bez zrozumienia. Na tym etapie pojęcia muszą funkcjonować na poziomie intuicyjnym, i to w różnych sytuacjach. Dlatego nauczyciele w klasach początkowych powinni znać teorie/strategie nauczania matematyki, które ułatwią im pracę i spowodują, że dziecko na tym etapie rozwoju utworzy odpowiednią reprezentację matematycznego pojęcia i zrozumie związki między różnymi pojęciami.

W nauczaniu matematyki inspirującą strategią jest podejście konstruktywne**.** W edukacji matematycznej konstruktywizm jest rozumiany na kilka sposobów. Szczególnie widoczne jest zróżnicowane oddziaływanie konstruktywizmu rozwojowego i socjokulturowego, choć obecnie coraz częściej jest preferowana społeczna koncepcja Lwa S. Wygotskiego w nauczaniu matematyki, o czym już wspomniałam w poprzednim podrozdziale. Niemniej jednak, konstruktywizm ma istotne znaczenie dla nabywania umiejętności uogólniania i transformacji znaczeń w matematyce szkolnej, uczenia się przyjętych form retorycznych szkolnego języka matematycznego. Odgrywa także kluczową rolę w pracy nauczyciela

[78] Blum W., Borromeo Ferri R., Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt?, "Journal of Mathematical Modelling and Application" 2009, Vol. 1 (1), s. 45–58.
[79] Zob. Swoboda E., O przygotowaniu do nauczania matematyki wczesnoszkolnej – krytycznie, „Edukacja – Technika – Informatyka" nr 4/22/2017, s. 73.

polegającą na odchodzeniu od przekazywania wiedzy do wspierania samodzielnego konstruowania wiedzy przez ucznia[80]. Jak twierdzi Dorota Klus-Stańska, dydaktyka konstruktywistyczna matematyki należy do najsilniej rozwijanego paradygmatu, zwłaszcza w teoretycznych założeniach. Jej popularność związana jest z czytelnymi założeniami i określoną opozycją wobec dydaktyk pozytywistycznych[81]. Dydaktyka konstruktywistyczna matematyki koncentruje się przede wszystkim na uczeniu się, a nie nauczaniu. Istotne jest, jak uczeń myśli i w jaki sposób rozumie pojęcia matematyczne, czyli ważne jest jego zaangażowanie w to, co dzieje się na lekcji. Podkreśla się także znaczenie ogólnego kontekstu społecznego klasy matematycznej jako zorganizowanej formy życia obejmującej: osoby, relacje i role; zasoby materialne; dyskurs szkolnej matematyki, treści i sposoby komunikacji[82]. Ważny jest także wystrój i organizacja przestrzenna klasy, czyli odpowiednie ustawienie ławek do pracy w małych grupach, a także swobodny dostęp uczniów do wielu przedmiotów i możliwość ich wykorzystania w działaniach praktycznych. Istotny jest również kontakt uczniów z problemami matematycznymi, które wymuszają na nich konstruowanie własnych koncepcji, a następnie ich prezentowanie i uzasadnianie. „Koncepcje błędne jako etapowe, nie tylko nie są przeszkodą w powstawaniu rzetelnej wiedzy matematycznej, ale także są niezbędne do jej utworzenia. Jest to ważne założenie, które pojawiło się w konstruktywistycznej koncepcji uczenia się matematyki. (…) Poznawanie w szkole wyłącznie poprawnych koncepcji matematycznych jest charakterystyczne dla behawiorystycznego podejścia edukacyjnego. Uczeń natomiast musi nauczyć się rozpoznawać, gdzie jest granica między wiedzą błędną a poprawną, aby móc korzystać z wiedzy matematycznej. W ten sposób uczniowie rozbudowują osobiste znaczenia nadawane pojęciom oraz zakresy wiedzy poprawnej i niepoprawnej”[83]. Strategia konstruktywistyczna mocno podkreśla rozwijanie samodzielnej aktywności poznawczej ucznia, co ma przyczynić się do budowania umiejętności uczenia się matematyki. Rezygnuje z procedur automatycznego zapamiętywania przekazywanych informacji na rzecz rozwiązywania problemów i rozumienia procedur i pojęć. Ważny jest także nauczyciel. Według J.Piageta, nauczyciel ma być „niezbędnym animatorem, którego zadaniem bę-

[80] Ernest P., Social constructivism and the psychology of mathematics education. W: P. Ernest (ed.), Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematics Education. London, Falmer Press 1994, s. 62.
[81] Klus-Stańska D., Paradygmaty matematyki. Myśleć teorią o praktyce. Warszawa 2018, s. 131.
[82] Ernest P., Social constructivism and the psychology of mathematics education…, op. cit., s. 63-64.
[83] Podaję za Kalinowska-Iżykowska A., Konstruktywistyczna dydaktyka w edukacji matematycznej, [w:] Problemy Wczesnej Edukacji 4 (51)/2020, s. 118.

dzie stwarzanie odpowiednich sytuacji i opracowywanie wytycznych, umożliwiających stawianie problemów użytecznych dla dziecka oraz wysuwanie przeciwstawnych przykładów, zmuszających do refleksji i do kontroli rozwiązań niedostatecznie przemyślanych”[84]. Konstruktywistyczny nauczyciel to przede wszystkim facylitator, który inspiruje uczniów do działania, respektuje prawo do własnej inicjatywy oraz do popełnienia błędu, a także akceptuje ich autonomię.

Reasumując, konstruktywizm skupia się na procesach myślowych uczniów. Proces uczenia się zależy nie tylko od tego, co robi nauczyciel na lekcji, ale także od tego, co robi uczeń, a przede wszystkim w jaki sposób integruje on nowe pomysły i idee ze swoim doświadczeniem oraz wcześniejszą wiedzą. Nauczyciele powinni być także świadomi tego, że konstruktywizm w nauczaniu matematyki, pomimo, że promuje aktywne uczenie, niesie ryzyko powstawania błędów koncepcyjnych. Dzieje się to wtedy, gdy uczniowie samodzielnie konstruują wiedzę bez odpowiedniego wsparcia merytorycznego ze strony samego nauczyciela. Ponadto proces samodzielnego odkrywania przez uczniów zasad matematycznych jest czasochłonny, dlatego nauczyciel powinien w odpowiednim momencie zareagować i naprowadzić ucznia, ale bez udzielania gotowych odpowiedzi. Konstruktywizm bywa także mało efektywny przy nauce abstrakcyjnych pojęć, gdzie intuicja ucznia może nie być wystarczającym czynnikiem i wtedy niezbędne jest wprowadzenie przez nauczyciela formalnych dowodów.

Kolejną istotną strategią w nauczaniu matematyki jest nauczanie realistyczne *(ang.Realistic Mathematics Education*) Hansa Freudenthala[85]. Według tej strategii uczniowie powinni budować pojęcia i operacje matematyczne na drodze naturalnej, w sytuacjach dla nich bliskich ich doświadczeniom, czyli wychodzić od sytuacji rzeczywistych i sensownych. Teoria realistycznego nauczania matematyki Hansa Freudenthala traktuje uczenie się jako aktywny proces, który opiera się na przechodzeniu od konkretnych sytuacji do bardziej abstrakcyjnych modeli, wykorzystując przy tym schematy materialne, diagramy czy grafy. Pojęcie realistyczne nie oznacza tylko sytuacji z życia codziennego, ale sytuacje, które są dla ucznia realne, sensowne, czyli wyobrażalne i konkretne. Uczeń nie jest biernym odbiorcą treści matematycznych, lecz aktywnie „matematyzuje” własną rzeczywistość, czyli przecho-

[84] Piaget J., Dokąd zmierza edukacja?, Warszawa 1977, s. 25.
[85] Podaję za Gravemeijer K., Terwel J., Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory, „Journal of curriculum studies” 2000, 32.6, s. 777-796.

dzi ze świata rzeczywistego do świata symboli, np. zamiana problemu zakupowego na równanie matematyczne[86]. Istotą tej strategii jest przekonanie, że matematyka nie powinna być przekazywana jako gotowy system abstrakcyjny, lecz jako proces odkrywania. Nauczyciel powinien wynajdywać takie sytuacje, które wymuszają na uczniu skonstruowania konkretnego pojęcia matematycznego. Natomiast zadaniem ucznia jest rozpocząć swoje działania od własnych nieformalnych strategii np. rysunków, które z czasem, pod kierunkiem nauczyciela będą ewoluować w stronę formalnych zapisów matematycznych. To oznacza, że nauczyciel nie podaje gotowego wzoru, lecz prowadzi ucznia tak, by ten poczuł się autorem rozwiązania. Teoria H. Freudenthala[87] zrewolucjonizowała nauczanie matematyki przede wszystkim w Holandii i miała ogromny wpływ na międzynarodowe badania PISA (Programme for International Student Assessment, międzynarodowe badanie koordynowane przez Organizację Współpracy Gospodarczej i Rozwoju, które kładą duży nacisk na umiejętność stosowania matematyki w praktyce).

Podsumowując, w teorii realistycznego nauczania matematyki Hansa Freudenthala istotne jest, aby uczniowie aktywnie odkrywali, budowali pojęcia i struktury matematyczne. Aktywność ta powinna być związana z działaniem, podczas którego wykorzystywane są doświadczenia uczniów ich wyobraźnia i intuicja. To właśnie prowadzi do nauczania tzw. matematyki praktycznej, która pozwoli uczniom analizować zebrane informacje, wyciągać wnioski z przyjętych założeń i sprawdzać uzyskane wyniki w nowych okolicznościach. W praktycznej realizacji koncepcja to nie jest prosta, ponieważ wymaga od nauczycieli nie tylko kompetencji merytorycznych, ale także pasji pedagogicznej. Należy także dodać, że nauczanie realistyczne odwołuje się do nauczania czeskiego pedagoga Jana Amosa Komeńskiego, który zalecał przekazywać wspólną wiedzę z życia codziennego, społecznego, przyrody, kultury, etyki czy geometrii[88]. Natomiast na gruncie polskim ideę realistycznego nauczania matematyki Hansa Freudenthala popularyzował Stefan Turnau, który wspólnie z Iwoną Turnau opracował program *Matematyka realistyczna*. Była to pierwsza próba adaptacji teorii *Realistic Mathematics Education* do polskiego systemu szkolnego [89]. Koncepcja

[86] Zob. Freudenthal H., Niejawna filozofia historii i dydaktyki matematyki, tłum. Anna Sierpińska, [w:] Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego Seria V: Dydaktyka Matematyki 5(1985), s.7-25.
[87] Zob. Freudenthal H., Mathematics as an Educational Task, D. Reidel Publishing Company Dordrecht-Holland 1973; Hans Freudenthal, Nowa matematyka czy nowe jej nauczanie? Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria II: Wiadomości matematyczne XXV, nr 1, 1983, s,123-141.
[88] Dzida G., Edukacja człowieka w zakresie nauk przyrodniczych i ścisłych według koncepcji Jana Amosa Komeńskiego, „Siedleckie Zeszyty Komeniologiczne" seria „Pedagogika" 2015 nr 2, s. 207-2014.
[89] Turnau I., Turnau S.. Matematyka realistyczna. Program nauczania matematyki dla II etapu edukacyjnego - klasy IV-VI szkoły podstawowej, Ośrodek Rozwoju Edukacji, Warszawa 2012, s. 1-23.

programu i związanych z nią, potrzebnych metod, środków dydaktycznych i form organizacji pracy nauczyciela z uczniami odbiegają od szkolnej tradycji. W programie uwzględniono między innymi posługiwanie się kontekstem i modelami, a także własnymi produktami i konstrukcjami uczniów, interaktywność oraz przeplatanie się linii tematycznych[90]. W programie postulowano stosowanie zdobytej wiedzy w sytuacjach realnych i konstruowanie przez ucznia pojęć i operacji matematycznych na drodze naturalnej.

Ważną strategię w nauczaniu matematyki opracowała Anna Zofia Krygowska[91]. To koncepcja czynnościowego nauczania matematyki[92], która jest jedną z podstawowych teorii nauczania matematyki w pracy z uczniem w młodszym wieku szkolnym. „Czynnościowe nauczanie matematyki jest postępowaniem dydaktycznym, uwzględniającym stale i konsekwentnie operatywny charakter matematyki równolegle z psychologicznym procesem interioryzacji prowadzącym od czynności konkretnych i wyobrażeniowych do operacji abstrakcyjnych. (…) Opiera się na wydobyciu przez analizę teoretyczną z materiału nauczania podstawowych operacji w każdej definicji, twierdzeniu, dowodzie, świadomym organizowaniu sytuacji problemowych, sprzyjających procesowi interioryzacji i kształtowaniu myślenia matematycznego ucznia jako specyficznego działania, swobodnego i świadomego posługiwania się przyswajanymi stopniowo operacjami oraz na konsekwentnym stosowaniu zabiegów dydaktycznych, mających na celu zapewnienie prawidłowości i efektywności tego procesu” [93]. A.Z. Krygowska, aby zapewnić prawidłowe i efektywne kształcenie z zastosowanie jej koncepcji, przedstawiła zadania dydaktyczne, które powinny być realizowane przez nauczycieli. Należą do nich: „wiązanie treści matematycznych z wyraźnie formułowanymi schematami postępowania, wiązanie operacji z operacjami do nich odwrotnymi, wiązanie operacji z różnych dziedzin matematyki w bardziej złożone schematy, uwzględnianie różnych ciągów operacji, prowadzących do tego samego rezultatu, stawianie ucznia w sytuacjach konfliktowych, w których przyswojone mu schematy postępowania zawodzą i w których uczeń musi przekształcić (zaadaptować) dawny schemat lub wypracować nowy. Opis słowny operacji, którymi uczeń myśli, szczególnie w niższych klasach, algorytmizacja roz-

[90] Ibidem, s. 2.

[91] Anna Zofia Krygowska, była pierwszym w Polsce profesorem dydaktyki matematyki. Jej dzieło *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 1, 2, 3, 1969, 1977, 1980 stanowi jedną z najistotniejszych publikacji naukowych związanych z dydaktyką tego przedmiotu. Pani Profesor przez wiele lat łączyła pracę naukową z praktyką dydaktyczną. W swoich licznych pracach naukowych prezentowała konkretne rozwiązania dydaktyczne, mające na celu poszerzenie rozumienia pojęć matematycznych przez uczniów.

[92] Krygowska A.Z., Zarys dydaktyki matematyki. Cz. 1. Warszawa 1979, s. 127-129.

[93] Ibidem, s. 127.

wiązania zadania z zastosowaniem różnych form zapisu, właściwe i celowe wiązanie czynności konkretnych (zapis symboliczny, rysunek, czynności rzeczywiste wykonywane na przedmiotach materialnych) z myślowymi operacjami, przy czym czynność konkretna: może być źródłem procesu interioryzacji, w którym jako jej odbicie powstaje określona operacja myślowa, może być wykonywana równolegle z operacjami myślowymi, wspierać je i stabilizować – przez odbicie w konkrecie i równocześnie je pobudzać, może być weryfikacją w konkrecie efektywności pomyślanego ciągu operacji, konsekwentne uczenie swobodnego posługiwania się poznanymi operacjami, (…) zwrócenie uwagi na to, aby stosowana symbolika miała również charakter operatywny, aby wizualnie sugerowała operację (np. strzałki jako symbol przyporządkowania)"[94]. Głównym zadaniem nauczyciela, który wykorzystuje tę strategię jest stawianie ucznia w sytuacjach, w których znane mu schematy postępowania zawodzą i musi wymyślić nowe, konsekwentne uczenie swobodnego posługiwania się poznanymi operacjami, przyzwyczajanie ucznia do tego, iż wyłącznie określone planowe działanie, a nie bierne oczekiwanie na pomysł prowadzi do rozwiązania zadania, celowe i właściwe wiązanie czynności konkretnych z myślowymi operacjami, a to oznacza, że uczeń konstruuje swoją wiedzę w interakcji z materiałami i zadaniami na drodze bogatych doświadczeń pod kierunkiem nauczyciela i we współpracy z innymi uczniami[95]. „Prawie każdy temat programowy można tak opracować z uczniami, że będą oni aktywni i na ich miarę twórczy"[96].

Warto wspomnieć także o strategii György Polya, wybitnego matematyka węgierskiego pochodzenia. Matematyk ten uważany jest za pioniera nowoczesnej heurystyki. G. Polya wnioskował, iż celem nowoczesnej heurystyki jest zrozumienie procesu rozwiązywania zadań, a w szczególności tych operacji myślowych, które są najczęściej wykorzystywane w tym procesie. Jego zdaniem heurystykę powinno budować się na doświadczeniach w rozwiązywaniu zadań oraz na doświadczeniach w obserwowaniu innych ludzi, którzy zadania rozwiązują. Twierdził, że ważny jest każdy rodzaj zadań i należy wyszukiwać wspólne cechy tych zadań i wyszukiwać ogólne zasady postępowania obowiązujące dla zadań różnego rodzaju i różnej tematyki[97]. Pomysłem G.Polya było opracowanie takiego schematu, który sprawdzi się przy zadaniach prostych, i tych bardziej skomplikowanych. Strategia G. Polya

[94] Krygowska Z., Zarys dydaktyki matematyki, cz.1, Warszawa 1977, s. 127–128.
[95] Ibidem
[96] Krygowska A.Z., Zarys dydaktyki matematyki; część 3, Warszawa, 1977, s. 85.
[97] Zob. Polya G., Odkrycie matematyczne: o rozumieniu, uczeniu się i nauczaniu rozwiązywania zadań. Przeł. A. Góralski. Warszawa 1975.

jest uniwersalną metodą rozwiązywania problemów, idealnie sprawdzającą się przy rozwiązywaniu zadań matematycznych, kiedy to zachodzi potrzeba „świadomego poszukiwania środka, za pomocą którego można osiągnąć dobrze widoczny, ale chwilowo nieuchwytny cel”[98]. Odnalezienie tego środka to właśnie rozwiązanie zadania. Natomiast głównymi elementami zadania wedle założeń G. Polya są warunek, czyli założenie oraz wniosek. To te właśnie elementy bierze się pod uwagę przy rozwiazywaniu zadania. W trakcie używania tej metody poznanie wszystkich warunków danego zadania jest elementem niezbędnym do wytwarzania pomysłów przez osobę, która próbuje rozwiązać to zadanie[99]. Według tej metody, rozwiązywanie zadań to poszukiwanie drogi pokonania trudności, która pozwala na ominięcie przeszkód i osiągnięcie celu, którego nie sposób od razu osiągnąć. Natomiast heurystyczny charakter metody pokazuje, że istnieje wiele dróg, aby osiągnąć wyznaczony cel[100]. Z reguły w edukacji wczesnoszkolnej mamy do czynienia głównie z zadaniami typu znaleźć. To na tym etapie zadaniem uczniów jest najczęściej odszukiwanie niewiadomych. Stąd w klasach I-III metoda G. Pola może być wykorzystywana przez nauczycieli. Ogólny charakter metody zaproponowanej przez G. Polya może być rozwiązaniem znakomicie wpisującym się w sposób rozumowania uczniów pierwszego etapu edukacyjnego[101].

Reasumując, podstawowym celem strategii G. Polya jest to, by nauczyć uczniów myśleć, natomiast sednem nauczania matematyki jest to, by uczniowie odkrywali samodzielnie tak dużo, jak to jest możliwe w danych warunkach[102]. W kontekście edukacji matematycznej nauczyciel powinien zapewnić swoim uczniom takie warunki, które będą sprzyjać ich samodzielności. Z kolei samodzielność myślenia może zaistnieć w sytuacji, gdy uczeń będzie miał możliwość przejęcia części odpowiedzialności za własny proces uczenia się. Istotne jest również to, aby nauczyciel nie narzucał uczniom swojego zdania, a tylko sugerował możliwe warianty postępowania, by nie wyręczał ich w myśleniu. Zgodnie z tą metodą w nauczaniu matematyki w klasach początkowych zasadnym jest zastosowanie w jej ramach wybranych heurystycznych strategii rozwiązywania zadań, takich jak stosowanie graficznych schematów, wykonywanie rysunków pomocniczych, czy tworzenie tabel zawierających dane. Strategie te ułatwiają uczniom zrozumienie treści zadania oraz uporządkowanie zawartych w zadaniu informacji. Metoda G. Polya jest ciekawą i wartościową propozycją.

[98] Ibidem, s. 145.
[99] Ibidem, s. 145-150.
[100] Ibidem, s. 13.
[101] Stucki E., Heurystyczna metoda Polya w początkowym nauczaniu matematyki. „Życie szkoły”, nr 10, 1992, s. 588.
[102] Polya G., Odkrycie matematyczne: o rozumieniu, uczeniu się i nauczaniu…, op. cit., s. 296.

Niewątpliwie ważną strategią bazującą na teorii rozwoju poznawczego J. Piageta oraz J.S.Brunera jest koncepcja dojrzałości dziecka do uczenia się matematyki Edyty Gruszczyk-Kolczyńskiej, znanej też pod nazwą *Dziecięca matematyka*[103]. Zaproponowane w książce rozwiązania metodyczne są wciąż aktualne i nadal przydatne podczas rozwijania kompetencji matematycznych uczniów. W ostatnich latach założenia *Dziecięcej matematyki* zostały wzbogacone o elementy koncepcji Friedricha Wilhelma Fröbela[104]. Obserwując codzienne zachowania małych dzieci E. Gruszczyk-Kolczyńska zauważyła, że dzieci najszybciej uczą się poprzez bezpośrednie doświadczenia, a zabawa ułatwia im przyswajanie pojęć abstrakcyjnych. Natomiast interakcja w grupie sprzyja rozwojowi umiejętności społecznych. Główne cele opracowanej metody to zaspokajanie potrzeb edukacyjnych najmłodszych poprzez budowanie mocnych fundamentów do dalszej nauki; rozwijanie kompetencji matematycznych poprzez wprowadzanie dzieci w świat liczb, kształtów i zależności matematycznych; stymulowanie logicznego myślenia poprzez różne zadania wymagające analizowania, porównywania i poszukiwania rozwiązań; wspieranie kreatywności poprzez zapewnienie dzieciom możliwości samodzielnego rozumowania i eksperymentowania przy wykorzystaniu różnych zabaw matematycznych[105]. Autorka opracowała także wskaźniki dojrzałości do uczenia się matematyki w szkole oraz sposoby diagnozowania tej dojrzałości przez nauczyciel[106]. Reasumując, wykorzystanie metody E. Gruszczyk-Kolczyńskiej w nauczaniu matematyki sprzyja aktywności własnej dziecka. Zadaniem nauczycieli jest zapewnienie odpowiednich warunków w szkole, dostarczając takich zdań, które sprawią przyjemność dziecku, a równocześnie będą kształtować odporność emocjonalną każdego ucznia.

Organizowanie edukacji matematycznej, w oparciu o wyżej zaprezentowane (oczywiście arbitralnie wybrane przeze mnie) strategie/teorie, sprzyja kształtowaniu ucznia wielowymiarowego, samodzielnego w myśleniu i pomysłowego. Tworzy warunki do rozwijania u uczniów nawyku samokształcenia i samorozwoju, wyposaża uczniów w takie procedury umysłowe, które pomagają w racjonalnej interpretacji otaczającej rzeczywistości. Opisane

[103] Gruszczyk-Kolczyńska E., Zielińska E., Dziecięca matematyka: książka dla rodziców i nauczycieli. Warszawa 1997.

[104] Gruszczyk – Kolczyńska E., Zastosowanie darów Froebla w dziecięcej matematyce. Treści kształcenia, komentarze metodyczne oraz opisy zajęć wspomagających rozwój umysłowy i edukację matematyczną przedszkolaków, Lublin 2017.

[105] Zob. Gruszczyk-Kolczyńska E., Zielińska E., Dziecięca matematyka. Dwadzieścia lat później. Książka dla rodziców i nauczycieli, Kraków 2015.

[106] Gruszczyk-Kolczyńska E., Zielińska E., Nauczycielska diagnoza edukacji matematycznej dzieci. Metody, interpretacja i wnioski. Warszawa 2013.

powyżej strategie/teorie pokazują inny sposób podejścia do nauczania matematyki, zwłaszcza w klasach młodszych.

1.3. Poziom dojrzałości szkolnej a trudności w uczeniu się matematyki

Miernikiem przejścia z wieku przedszkolnego do szkolnego jest osiągnięcie przez dziecko tzw. dojrzałości szkolnej, a więc „takiego stanu rozwoju psychicznego i fizycznego, który czyni je podatny i wrażliwym na oddziaływania szkoły umożliwiając regularną naukę w klasie”[107]. Według W. Okonia dojrzałość szkolna to „osiągnięcie przez dziecko takiego stopnia rozwoju umysłowego, emocjonalnego, społecznego i fizycznego, który umożliwia mu udział w życiu szkolnym i opanowanie treści programowych klasy I”[108]. Z kolei T. Pilch definiuje dojrzałość szkolną, której synonimem jest gotowość szkolna (ang. school readiness) „jako poziom rozwoju fizycznego, intelektualnego i społecznego dziecka, który umożliwia mu w życiu szkolnym opanowanie wiadomości, umiejętności i nawyków określonych programem nauczania klasy pierwszej. Dziecko osiągające dojrzałość szkolną powinno posiadać umiejętności spostrzegania, klasyfikowania, rozumienia relacji między zbiorami, odtwarzania prostych znaków graficznych, rozumienia i wykonywania poleceń, a także umiejętności współżycia i współdziałania w grupie”[109].

Włodzimierz Szewczuk definiuje dojrzałość szkolną, zwaną też gotowością szkolną, w następujący sposób: „Jest to osiągnięcie przez dziecko takiego stopnia rozwoju psychicznego, jaki pozwala mu sprostać obowiązkom szkolnym”[110]. Gotowość szkolna w ujęciu B. Wilgockiej - Okoń pojmowana jest jako „proces i efekt współdziałania aktywności dziecka i aktywności dorosłych tworzących warunki do uczenia się, jako efekt interakcji, „współgry” właściwości dziecka i właściwości szkoły”[111]. Definicja ta traktuje dojrzałość szkolną – „jako wynik interakcji między zdatnym do szkoły dzieckiem a środowiskiem rodzinnym i wychowaniem przedszkolnym (…). I u nas coraz częściej używa się terminu gotowość szkolna dla określenia nie tylko do szkoły, lecz do uczenia się”[112].

[107] Nowik J., Kształcenie matematyczne w edukacji wczesnoszkolnej. Wydanie II rozszerzone. Poradnik dla nauczycieli, Opole 2013, s. 30.
[108] Okoń W., Nowy słownik pedagogiczny, Warszawa 2007, s.81.
[109] Pilch T., Encyklopedia pedagogiczna XXI wieku, t. 1, Warszawa 2003, s. 722–723.
[110] Szewczuk W., Dojrzałość szkolna, [w:] Encyklopedia pedagogiczna, red. W. Pomykało, Warszawa 1993, s. 110.
[111] Wilgocka-Okoń B., Gotowość szkolna dzieci sześcioletnich. Warszawa 2003, s. 12.
[112] Ibidem, s. 12.

„Gotowość i dojrzałość szkolna traktowane są czasami jako odrębne znaczeniowo pojęcia, coraz częściej jednak odstępuje się od takowego ich rozróżnienia”[113]. W tej pracy sformułowania te traktowane są równoważnie. Definicje dojrzałości szkolnej przedstawione powyżej podkreślają, że dojrzałość szkolna odnosi się do osiągnięcia określonego poziomu rozwoju, który obejmuje aspekty psychiczne, emocjonalne, społeczne oraz fizyczne. Istotnym elementem w każdej definicji jest zdolność przystosowania się dziecka do nowych wymagań i form działalności, jakie niesie za sobą życie szkolne. Podkreślono również, że dojrzałość szkolna wiąże się z umiejętnością sprostania obowiązkom szkolnym i opanowaniem treści programowych. Wspólną cechą przedstawionych wyżej definicji dojrzałości szkolnej jest to, że odnoszą się one do osiągnięcia przez dzieci określonego poziomu rozwoju, który gwarantuje im sukces edukacyjny.

Na potrzeby mojej pracy przyjmuję, że dojrzałość szkolna to osiągniecie przez dziecko takiego stopnia rozwoju psychicznego, który pozwala mu sprostać obowiązkom szkolnym. „Osiągnięcie przez dziecko gotowości szkolnej ma znaczącą rolę dla jakości jego startu szkolnego. Dziecko rozpoczynające naukę w szkole bez osiągnięcia dostatecznej dojrzałości narażone jest na szereg trudności. Konsekwencjami braku gotowości szkolnej mogą zatem być trudności w nauce, te natomiast, gdy zostaną napotkane już na etapie wczesnoszkolnym, mogą pogłębiać się na kolejnych etapach edukacji”[114]. Dziecko osiągające dojrzałość szkolną jest dostatecznie rozwinięte fizycznie i ruchowo, zwłaszcza w zakresie precyzyjnych ruchów rąk i palców. Posiada dobrą orientację w otoczeniu oraz określony zasób wiedzy ogólnej o świecie, jak również na tyle rozwinięte zdolności komunikacyjne, aby móc porozumiewać się w sposób zrozumiały dla rozmówcy, zarówno dorosłego, jak i rówieśnika. Potrafi działać intencjonalnie, tzn. podejmuje celowe czynności i wykonuje je do końca. Jest też uspołecznione w stopniu pozwalającym na zgodne i przyjazne współdziałanie z rówieśnikami, liczenie się z chęciami i życzeniami innych oraz wykonywanie poleceń kierowanych przez dorosłych do całej grupy dzieci. Jest dojrzałe emocjonalnie na tyle, aby rozstać się z matką na czas pobytu w szkole oraz kontrolować doświadczane emocje takie jak lęk, złość i inne, nie uzewnętrzniając ich w sposób zbyt gwałtowny[115].

Osiągnięcie dojrzałości szkolnej wpływa na osiągnięcia edukacyjne dzieci. Znaczące badania dotyczące kwestii związku dojrzałości szkolnej z umiejętnościami matematycznymi

[113] Marekwia M., Polewczyk I,, Znaczenie diagnozy gotowości szkolnej w zakresie matematyki w kontekście diagnozy umiejętności matematycznych po klasie I,"Chowanna",T.1, 2018, s. 133,
[114] Ibidem, s. 134.
[115] Stefańska-Klar R., Późne dzieciństwo. Młodszy wiek szkolny, [w:] B. Harwas-Napierała, J. Trempała, (red:) Psychologia rozwoju człowieka. Charakterystyka okresów człowieka, Warszawa 2020, s. 135.

przeprowadziła E. Gruszczyk-Kolczyńska[116], o czym już wspomniałam w poprzednim podrozdziale. Autorka analizowała różnorodne czynniki mogące mieć wpływ na wystąpienie trudności. „Dotyczyły one między innymi umiejętności związanych z gotowością do uczenia się matematyki: dziecięce liczenie, dojrzałość emocjonalna, operacyjne rozumowanie na poziomie konkretnym, zdolność do odrywania się od konkretów i posługiwanie się reprezentacjami symbolicznymi oraz zdolność do syntetyzowania oraz zintegrowania funkcji percepcyjno-motorycznych”[117]. Nauczyciele edukacji przedszkolnej, znając obszary związane z dojrzałością szkolną do uczenia się matematyki w szkole, powinni realizować zajęcia w taki sposób, by dzieci były nimi zainteresowane, a jednocześnie mogły osiągnąć tę dojrzałość. Co obrazuje tabela nr 1.

Tabela 1. Zakres dojrzałości do uczenia się matematyki w warunkach szkolnych

Zakres dojrzałości do uczenia się matematyki w warunkach szkolnych	Dziecięce liczenie
	Dziecięce liczenie to: - umiejętność liczenia poprawnie i rozpoznawania błędów w liczeniu; - umiejętność dodawania i odejmowania w zakresie 10, w pamięci lub na palcach.
	Rozumowanie operacyjne na poziomie konkretnym
	Rozumowanie operacyjne na poziomie konkretnym obejmuje dwa główne aspekty: - uznanie stałości ilości nieciągłych (zdolność do wnioskowania o równoliczności mimo obserwowanych zmian w układzie elementów porównywanych zbiorów); - wyznaczanie konsekwentnych serii (zdolność do ujmowania każdego z porządkowych elementów jako mniejszego od nieuporządkowanych i jednocześnie jako największego w zbiorze już uporządkowanym).
	Zdolność do odrywania się od konkretów i posługiwania się reprezentacjami symbolicznymi

[116] E. Gruszczyk-Kolczyńska, Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki. Warszawa 1997.
[117] Ibidem, s. 19.

	Umiejętność abstrahowania od szczegółów i korzystania z reprezentacji symbolicznych w kontekście: - pojęć liczbowych (aspekt językowo-symboliczny); - operacji arytmetycznych (formuła arytmetyczna i jej transformacje); - schematów graficznych (grafy strzałkowe, drzewka, tabele oraz inne uproszczone wizualizacje).
	Dojrzałość emocjonalna
	Dojrzałość emocjonalna przejawia się w: - pozytywnym podejściu do samodzielnego stawiania czoła wyzwaniom; - zdolności do zachowania odporności emocjonalnej w trudnych sytuacjach intelektualnych, co pozwala na racjonalne zarządzanie swoim zachowaniem mimo odczuwanych napięć.
	Zdolność do syntetyzowania oraz zintegrowania funkcji percepcyjno-motorycznych
	Zdolność do syntetyzowania oraz zintegrowania funkcji percepcyjno-motorycznych wyraża się w: - sprawnym odwzorowywaniu złożonych kształtów, - rysowaniu, - konstruowaniu.

Źródło: E. Gruszczyk-Kolczyńska: Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki[118].

Przedstawione w tabeli składniki dojrzałości matematycznej dzieci są ściśle powiązane z kręgami tematycznymi, realizowanymi przez nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej, które są zawarte w podstawie programowej kształcenia ogólnego. Pokazują one, że na dojrzałość szkolną mają wpływ nie tylko wewnętrzne procesy dojrzewania, ale również środowisko przedszkolne i szkolne. Ważne jest także to, że dojrzałość do uczenia się matematyki zawarta jest w dojrzałości szkolnej. Brak jej powoduje zaburzenia w zakresie uczenia się matematyki w warunkach szkolnych. E. Gruszczyk-Kolczyńska wskazała, że około 43% dzieci w wieku sześciu lat nie dysponuje odpowiednimi kompetencjami intelektualnymi, które są niezbędne

[118] Gruszczyk-Kolczyńska E., Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki. Warszawa 1992, s. 20.

do efektywnego uczenia się matematyki. Braki te mogą stanowić istotne źródło niepowodzeń szkolnych[119].

Dzieci, które nie osiągnęły odpowiedniego poziomu rozwoju poznawczego, mogą mieć problemy związane z uczeniem się matematyki w klasach I-III. „Specyfiką myślenia matematycznego jest to, że bazuje ono na myśleniu konkretnym, opartym na określonych założeniach, prawach logicznych, definicjach, twierdzeniach, a jednocześnie na stawianiu pytań – hipotez"[120]. Myślenie matematyczne charakteryzuje się również między innymi operacjami analizowania i syntetyzowania oraz abstrahowania, uogólniania i dedukowania, których stosowanie umożliwia budowanie teorii matematycznych, rozumienie matematyki i radzenie sobie z abstrakcją związaną z matematyką[121] . Rozpoczynanie nauki szkolnej przez dzieci bez osiągnięcia dojrzałości operacyjnego rozumowania, które, jak pisze Z. Krygowska, jest podstawą rozwiązywania problemów matematycznych, prowadzi do porażki w uczeniu się matematyki [122].

Do pojawienia się trudności w uczeniu się matematyki mogą przyczynić się zaburzenia sfery poznawczej u ucznia. „Przyczyna ich może wynikać z nieharmonijnego rozwoju psychoruchowego, który przejawia się opóźnieniem rozwoju określonych funkcji: wzrokowo-przestrzennych, słuchowo-językowych, motorycznych. Zaburzenia umiejętności matematycznych wywodzą się z nieprawidłowości przebiegu procesów poznawczych, nie są zaś wywołane obniżonymi możliwościami intelektualnymi"[123].

Powodem trudności dzieci może być także posiadanie przez nich niższej inteligencji niż przeciętna, występująca z uwagi na niepełnosprawność intelektualną, dysfunkcję narządów zmysłu, schorzeń neurologicznych lub zaniechań środowiskowych lub pedagogicznych. Trudności te mogą być związane z niskim poziomem rozwoju społeczno-emocjonalnego dzieci. Dojrzałość emocjonalna wyraża się u dzieci w pozytywnym nastawieniu do samodzielnego rozwiązywania zadań. Dlatego dzieci, które zaczynają edukację szkolną, powinny być pozytywnie nastawione do samodzielnego rozwiązywania zadań oraz powinny mieć odporność emocjonalną na pokonywanie trudności związanych z nabywaniem wiadomości i umiejętności matematycznych. Niska odporność emocjonalna sprawia, że dzieci nie potra-

[119] Ibidem, s.14.
[120] Nowik J., Kształcenie matematyczne w edukacji wczesnoszkolnej. Opole 2009, s. 10.
[121] Ibidem, s. 10.
[122] Krygowska Z., Zarys dydaktyki matematyki, Warszawa 1997, s.59.
[123] Kowalczyk G,, Wybrane przykłady trudności w uczeniu się matematyki na początku klasy czwartej z perspektywy nauczyciela, s.151, https://www.matematykadlawszystkich.pl/mednr2/Kowalczyk.pdf, (dostęp: 12.02.2025).

fią wytrzymać napięć, które towarzyszą rozwiązywaniu nawet najprostszych zadań matematycznych. Jak pisze E. Gruszczyk – Kolczyńska „do efektywnego uczenia się matematyki w warunkach szkolnych dziecko musi umieć znosić przykre podniecenia i napięcia. Musi być odporne emocjonalnie tak, aby mimo narastających napięć potrafiło rozwiązać zadanie”[124].

Trudności w uczeniu się matematyki spowodowane mogą być też obniżoną sprawnością manualną. Dzieci te, borykają się z narysowaniem grafów, tabel, a nawet z czytelnym zapisaniem działania. Pomimo starań i dużego nakładu pracy - czasami na granicy swoich możliwości, osiągają niskie wyniki. Dzieci, które doznają takich trudności, potrzebują fachowej pomocy. Jeśli nie otrzymają jej w odpowiednim momencie, pojawiają się blokady i niepowodzenia w uczeniu matematyki. Towarzyszą temu silne uczucia, które ujemnie wpływają na rozwój emocjonalny tych dzieci. Zanika ich motywacja do nauki matematyki. Tracą wiarę we własne możliwości poznawcze i wykonawcze. Następuje obniżenie samooceny. „Pojawia się nerwowość i spowolnienie rozwoju umysłowego. Powstają silne napięcia emocjonalne, zanika motywacja do nauki, a co za tym idzie – niechęć do przedmiotu, do nauczyciela, a czasami do całej szkoły, utrata wiary we własne siły i możliwości. Obawa przed niepowodzeniem zmusza te dzieci do wycofania się z zadań wymagających wysiłku intelektualnego. Następuje spowolnienie rozwoju umysłowego”[125]. Innym „elementem wpływającym na proces uczenia się matematyki, a związanym z osiągnięciem dojrzałości szkolnej jest prawidłowo rozwinięty słuch fonematyczny. Zaburzenia jego poważnie utrudniają lub czasem uniemożliwiają naukę dziecka w każdym wieku. Powstają trudności w rozumieniu instrukcji, w zapamiętywaniu i powtarzaniu dłuższych wypowiedzi”[126].

Trudności związane z nauką matematyki mają swoje różnorodne konsekwencje. Czasami skłaniają do działania i zwiększają aktywność dziecka, ale też hamują te poczynania. Niestety, nagromadzone trudności mogą w konsekwencji prowadzić do pojawiania się nowych, powodować obniżenie motywacji do nauki i ogólnej odporności nerwowej, a także pogarszać ogólną sprawność umysłową uczniów. „Podstawową przyczyną złych wyników

[124] Gruszczyk-Kolczyńska E., Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki, Warszawa 1992, s. 21.
[125] Kandzia J., Aspekty trudności i niepowodzeń dzieci w uczeniu się matematyki, [w:] Kultura – Przemiany – Edukacja, tom specjalny 2024, s. 59.
[126] Krygowska A. Z., Zarys dydaktyki matematyki, Warszawa 1997, s. 59.

nauczania matematyki w klasach najmłodszych jest to, iż szkoła w wielu wypadkach ogranicza się do autorytarnego nauczania, nie doceniając uczenia się opartego na samodzielnym myśleniu i eksperymentowaniu przez dzieci”[127].

Ciekawe obserwacje na temat trudności w nauce matematyki w szkolnictwie niemieckim przedstawił Ernst Schubert, wskazując błędy dydaktyczne, takie jak na przykład niewłaściwe metody nauczania, zbyt silne powiązanie liczenia z pomocami dydaktycznymi, jako źródła powstawania blokad matematycznych oraz problemy psychiczne, wśród których wymienił między innymi zbyt wysokie wymagania stawiane dziecku, domowy przymus i nieustanne stawianie osiągnięć w nauce jako priorytetu czy też stygmatyzowanie niepowodzeń[128]. To wszystko może prowadzić do stanów lękowych. W literaturze przedmiotu wyróżnia się dwa rodzaje lęku przed matematyką. Pierwszy spowodowany jest psychiczną blokadą w procesie uczenia się matematyki i odnosi się do różnych wyzwalaczy, takich jak symbole czy pojęcia występujące podczas uczenia się matematyki. Drugi to rezultat socjokulturowego wpływu i pojawia się jako konsekwencja panujących przekonań kulturowych o matematyce, np. twierdzenie, że do nauki matematyki należy mieć szczególne zdolności. Ten rodzaj lęku może prowadzić do fobii matematycznej[129]. Lęk przed matematyką obniża poczucie własnej wartości i może prowadzić do ogólnych niepowodzeń szkolnych[130].

Lęk przed matematyką prowadzi także do unikania przez dzieci wszystkich aktywności związanych z matematyką. O ważności aktywności matematycznych pisała Anna Zofia Krygowska, wymieniając siedem aktywności, które powinny być zawarte w podstawie programowej kształcenia ogólnego w celu zapewnienia odpowiedniego poziomu kształcenia matematycznego. Są to dostrzeganie i wykorzystywanie analogii, matematyzacja, której jednym z etapów jest schematyzowanie, definiowanie, czyli interpretowanie danej definicji i używanie racjonalnie danej definicji, dedukowanie i redukowanie, kodowanie tj. konstruowanie i posługiwanie się w sposób racjonalny językiem symbolicznym, posługiwanie się językiem matematycznym, algorytmizowanie - posługiwanie się w sposób racjonalny algorytmami, a także formułowanie i rozwiązywanie problemów[131].

---

[127] Semadeni Z., Trudności i niepowodzenia w uczeniu się matematyki, [w:] Nauczanie matematyki w klasach początkowych. Podręcznik dla nauczyciela, red. Z. Semadeni, Warszawa 1991, s. 113.
[128] Zob. Schuberth E., Matematyka w szkołach waldorfskich, Kraków 2013.
[129] Chinn S., Mathematics Anxiety in Secondary Students in England, “Dyslexia: An International Journal of Research and Practice”, 2009, Vol. 15 (1), s. 61-68.
[130] Akin A., Kurbanoglu I.N., The relationship between math anxiety, math attitudes, and self-efficacy: A structural equation model, “Studia Psychologica”, 2011, Vol. 53(3).
[131] Krygowska A. Z., Zarys dydaktyki matematyki, cz.1, Warszawa 1969, s. 127.

Wielu uczniów sądzi, że nigdy nie zdołają zrozumieć matematyki, co najwyżej są w stanie nauczyć się jej w taki sposób, aby wywołać złudzenie, że ją rozumieją. „Strach przed matematyką to tradycja przekazywana z pokolenia na pokolenie jeszcze z tych czasów, kiedy to większość nauczycieli wiedziała niewiele o naturze ludzkiej, o naturze zaś samej matematyki – w ogóle nie miała pojęcia”[132].

Stąd tak ważne są działania nauczycieli, aby w porę i skutecznie przeciwdziałać różnorodnym trudnościom i wywołanym przez nie lękom. Już na samym początku edukacji wczesnoszkolnej to nauczyciel odgrywa kluczową rolę w rozwijaniu ważnych kompetencji uuczniów, dostarczając im niezbędnych narzędzi i stosując metody pracy, które sprzyjają nabywaniu tych umiejętności. Konstytutywne znaczenie ma tu dokładna diagnoza poziomu kompetencji kluczowych uczniów i określenie kierunku ich rozwoju, uwzględniające przy tym indywidualne potrzeby w kontekście dynamicznie zmieniającego się świata. Dlatego nauczyciele mają za zadanie przygotować uczniów do przyszłości poprzez edukację skoncentrowaną na rozwijaniu tych kompetencji[133]. Ponadto rolą nauczycieli jest wytworzenie u uczniów motywacji do nauki. Aby rozwijać ją podczas lekcji matematyki, nauczyciele powinni wskazywać na powiązanie nauki z sytuacjami życiowymi, podkreślać zastosowanie matematyki w życiu codziennym, a także odwoływać się do porównań, które mają dla uczniów istotne znaczenie. Odwoływać się do naturalnej ciekawości uczniów oraz rozwijać ich zainteresowania i podkreślać sukcesy odnoszone przez uczniów. Należy w tym miejscu podkreślić, że połączenie wiedzy teoretycznej z praktyką przez włączenie jej w sytuacje z życia codziennego zwiększa skuteczność nauczania matematyki. W przypadku edukacji wczesnoszkolnej, „pomyślne opanowanie wiedzy i umiejętności z zakresu matematyki, nauki i techniki na pierwszym etapie kształcenia umożliwia osiąganie sukcesów na kolejnych szczeblach edukacji. Jest to ważne, ponieważ te dziedziny wiedzy postrzegane są jako relatywnie trudne w stosunku do innych, a pominięcie choćby jednego elementu w budowaniu tych kompetencji może poważnie zachwiać całą konstrukcją kompetencji kluczowych”[134].

Reasumując, poziom dojrzałości szkolnej danego ucznia determinuje jego sukcesy, bądź wywołuje trudności w uczeniu się matematyki. Podjęcie nauki bez odpowiedniej gotowości często skutkuje trudnościami w uczeniu się już w pierwszych tygodniach szkoły. Dziecko

[132] Sawyer W.W., Matematyka nauką przyjemną, Warszawa 1988, s. 8.
[133] Dudel B., Matematyka w centrum uwagi. Jak możemy pomóc dziecku w uczeniu się?, J. Nikitorowicz, Piwowarski R. , Kryńska E. J.,. Dudel, B Głoskowska-Sołdatow M., Kienig A., Śmietało K., Kupka J. Szarkowska A. , Wróblewska U., (red.) Wyrównywanie szans edukacyjnych polskiej wsi. Internetowe Centra Edukacyjno-Oświatowe na wsi, Białymstok, 2008, s. 87-106.
[134] Dudel B., Głoskowska-Sołdatow M., Kompetencje matematyczne i podstawowe kompetencje naukowo-techniczne w edukacji wczesnoszkolnej – studium empiryczne, Toruń 2020, s. 5.

może mieć problem ze zrozumieniem sensu działań matematycznych, wykonaniem poleceń kierowanych do całej grupy, czy też samodzielnym rozwiązywaniem zadań tekstowych. Istotne jest to, że matematyka nie jest wiedzą, którą uczeń może po prostu zapamiętać. Jest to skomplikowana struktura, która powinna być zrozumiana przez ucznia. Nauczyciel musi być świadomy, że to nie brak talentu wobec matematyki zazwyczaj wywołuje trudności, ale niedopasowanie wymagań programu do etapu rozwoju dziecka. Jeśli uczeń osiągnął wysoki poziom dojrzałości szkolnej, to wówczas nauka jest naturalnym etapem odkrywania różnorodnych reguł. Jeśli jego poziom dojrzałości szkolnej jest niski, to niestety nauka staje się utrapieniem dla ucznia, a powstałe braki w trakcie nauki kumulują się lawinowo. Brak dojrzałości na starcie generuje tzw. lukę kompetencyjną. Jeśli na przykład dziecko nie rozumie struktury dziesiątkowej, bo jest niedojrzałe operacyjnie, to w drugiej klasie nie zrozumie dodawania z przekroczeniem progu dziesiątkowego, a w trzeciej klasie nie zrozumie mnożenia.

Dojrzałość do uczenia się matematyki to specyficzny aspekt gotowości szkolnej, który determinuje, czy dziecko poradzi sobie z wymaganiami programu nauczania w klasie pierwszej. Objawem braku dojrzałości może być niska tolerancja na frustrację. Dziecko płacze, drze kartkę z zadaniami, albo też odmawia pracy, gdy nie zna natychmiast wyniku. Objawem braku dojrzałości jest również to, że kiedy dziecko uważa, że 7 klocków to "więcej", gdy są rozrzucone, a "mniej", gdy leżą blisko siebie. Dziecko uczy się liczyć na pamięć, ale nie rozumie istoty dodawania i odejmowania, a każda zmiana formy zadania powoduje zagubienie.

Wspieranie dojrzałości matematycznej dziecka powinno opierać się na aktywnym działaniu i zabawie. Dla przykładu, manipulowanie przedmiotami, czyli liczenie kasztanów, guzików czy klocków pomaga w budowaniu konkretnych wyobrażeń liczbowych. Z kolei gry planszowe, puzzle i zabawy ruchowe rozwijają orientację przestrzenną oraz odporność na porażki. To pokazuje, jak ważne jest nauczanie matematyki. Jak stwierdza Erich Wittmann: „dydaktyka matematyki musi przekraczać granice innych nauk i jest zależna od wyników i metod pochodzących z bardzo różnorodnych dziedzin nauki, m. in. matematyki, pedagogiki, socjologii, psychologii i historii nauki. Jednak wiedzy naukowej, dotyczącej nauczania matematyki, nie można uzyskać przez proste zebranie w jedno wyników tamtych nauk; niezbędne jest specyficzne podejście matematyczno-dydaktyczne, integrujące różne aspekty w jeden spójny i wyczerpujący obraz nauczania matematyki i pozwalające na konstruktywne

wykorzystanie tej wiedzy w praktyce”[135]. Opisane powyżej przykłady wskazują, że dojrzałość szkolna jest fundamentem, który decyduje o tym, czy dziecko będzie konstruować matematykę, czy tylko bezmyślnie odtwarzać. Mniej istotne powinno być to, w jaki sposób uczeń rozwiązał problem, a bardziej to, że go rozwiązał dobrze, ale na swój sposób. Dlatego też potrzebne jest nowe spojrzenie i zrozumienie procesów uczenia się i nauczania uwzględniające kulturę popełniania błędów i kształtowania niezbędnych kompetencji. Równolegle z nauką matematyki ważne jest również to, aby w trakcie zajęć budować relacje umożliwiające dzieciom pozytywny rozwój osobisty i społeczny. Powinna to być edukacja zorientowana na kompetencje, które można rozpatrywać jako osiągnięcie wyższego poziomu w rozwijaniu swojego potencjału albo jako środek do osiągania sukcesów w życiu osobistym[136].

1.4. Matematyka dziecka – przegląd propozycji dydaktycznych pomocnych w rozwijaniu zainteresowań matematycznych

Kształtowanie zainteresowań uczniów jest priorytetowym zadaniem każdej szkoły. To, w jakim stopniu młody człowiek ma możliwość rozwijania swoich pasji, ułatwia jego rozwój i sprzyja uczeniu się. Zainteresowania są źródłem aspiracji, motywacji, radości i osiągnięc, determinują zachowania i postawy dziecka. Rozwój zainteresowań rozpoczyna się od zaspokajania naturalnej ciekawości poznawczej. „Zaciekawienie w odpowiednich warunkach może przekształcić się w trwalsze zainteresowanie poznawcze określoną dziedziną. Jeśli są one wspomagane i rozwijane oraz odpowiednio utrwalone i wzmocnione, to przekształcają się z czasem w zamiłowania”[137]. „Zaciekawienie w odpowiednich warunkach może przekształcić się w trwalsze zainteresowanie poznawcze określoną dziedziną. Jeśli są one wspomagane i rozwijane oraz odpowiednio utrwalone i wzmocnione, to przekształcają się z czasem w zamiłowania”[138]. W niniejszym rozdziale przedstawię propozycje dydaktyczne,

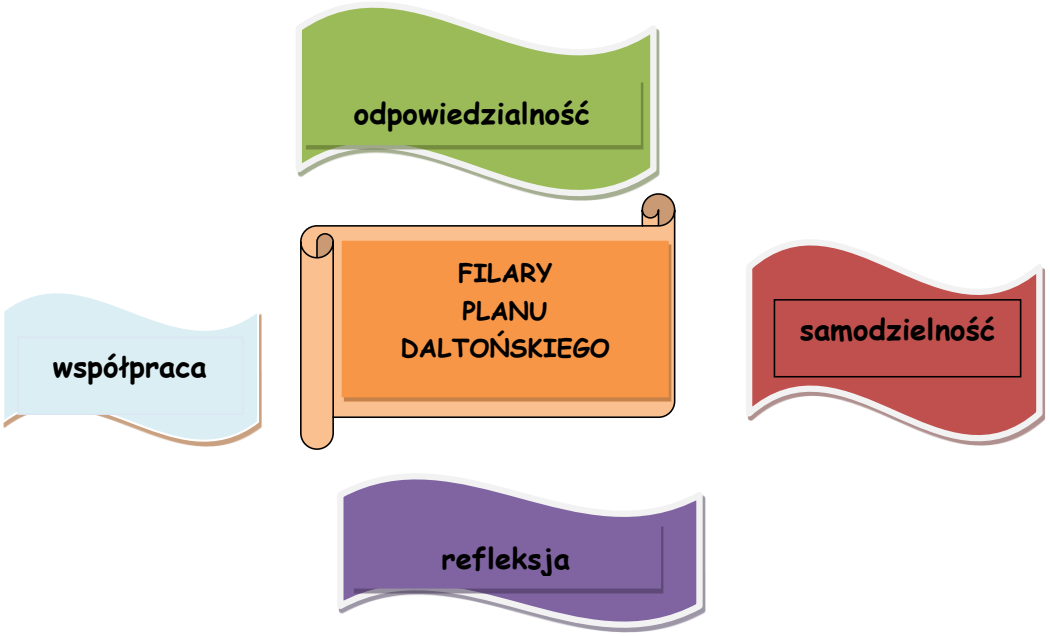
[135] Wittmann E., Dydaktyka matematyki jako „design science”, „Dydaktyka Matematyki” 1993, 15, s. 104.
[136] Dudel, B., Głoskowska-Sołdatow M., Kompetencje matematyczne i podstawowe kompetencje naukowo-techniczne w edukacji wczesnoszkolnej – studium empiryczne, Wydawnictwo Adam Marszałek, Toruń 2020, s. 5-8.
[137] Sawiński, J.P., Zainteresowania jako kluczowy czynnik wpływający na osiągnięcia biologiczne uczniów. W: R. Kowalski (red.). Efekty działalności biologicznej i środowiskowej w zreformowanej szkole, Siedlce, 2004, s. 183.
[138] Ibidem, s. 183.

wspierające rozwój zainteresowań matematyką. Jedną z nich jest Plan Daltoński[139]. Twórczynią jest Helen Parkhurst - amerykańska nauczycielka, która żyła w latach 1887-1957. Plan Daltoński należy do alternatywnych systemów nauczania-uczenia się. W jego centrum jest uczeń z jego potrzebami edukacyjnymi i zainteresowaniami. W systemie tym nauczyciele rezygnują z tradycyjnego nauczania jednym frontem całych klas, z jednakowymi zadaniami i stosowanym podającym tokiem nauczania. Dostosowują proces edukacyjny do zróżnicowanych potrzeb uczniów. Kluczowym elementem tej metody jest indywidualizacja nauczania, która sprzyja rozwijaniu inicjatywy, samodzielności w myśleniu i działaniu oraz niezależności w postawach społecznych. Nauczyciele tworzą środowisko edukacyjne do uczenia się matematyki, w którym panują szacunek i zaufanie. Dają uczniom możliwość wyboru. Nie narzucają własnego zdania. Zamiast zmuszania do pracy poprzez widmo uzyskania negatywnej oceny, motywują do działania poprzez wspólne określenie celów lekcji oraz zadań, które umieszczone są w rzeczywistym kontekście. Wspólne określenie celów daje uczniom poczucie współodpowiedzialności za ich wykonanie oraz pozwala na przeżywanie „radości dnia jutrzejszego", która ich czeka, gdy dobrze wykonają zadanie[140] .

W edukacji matematycznej z zastosowaniem Planu Daltońskiego nauczyciele wykorzystują różnorodne formy pracy, ponieważ każda z nich wnosi coś innego. Praca w grupach sprzyja rozwijaniu umiejętności współpracy, poszanowania dla innych, wspólnego planowania czy argumentowania własnych poglądów. Jak zauważa G. Mazurkiewicz, „uczniowie zapamiętują najwięcej, jeżeli uczą się od siebie[141]" oraz mają możliwości rozwoju społecznego i umiejętności współdziałania z innymi. Samodzielność zaś - uczy odpowiedzialności oraz jest elementem, który podnosi samoocenę dzieci, kiedy osiągną wyznaczony cel.

Nauczyciele, pracujący Planem Daltońskim, są „zorientowani w edukacji na humanizm, na kierowanie się w edukacji potrzebami, potencjałem rozwojowym i zainteresowaniami dziecka (…)[142]". Potrafią efektywnie organizować proces nauczania-uczenia się matematyki. Plan Daltoński opiera się na czterech filarach. Obrazuje je infografika nr 1.

[139] Informacje dotyczące Planu Daltońskiego pochodzą z artykułu: Turczyńska M., Dalton – od teorii do praktyki, [w:] Acta Scientifica Academiae Ostroviensis. Sectio A, Nauki Humanistyczne, Społeczne i Techniczne 2019, v. 13-14, wyd.1-2, s. 71-93.
[140] Okoń W., Wprowadzenie do dydaktyki ogólnej, Warszawa 2003, s.141.
[141] Mazurkiewicz G., Jak być jeszcze lepszym? Ewaluacja w edukacji, Kraków 2012, s. 17,18.
[142] Śliwerski B., Recepcja planu daltońskiego Helen Parkhurst w Polsce, [w:] Röhner R., Wenke H., Pedagogika planu daltońskiego, Łódź 2011, s.7.



Infografika 1. Filary Planu Daltońskiego

Źródło: Opracowanie własne

Kluczowym elementem edukacji daltońskiej jest kształtowanie u dzieci odpowiedzialności za proces uczenia się**.** Odpowiedzialność to obowiązek, umiejętność wykonania polecenego zadania, realizacji powierzonej roli, planowania własnego bezpieczeństwa i otoczenia, to także przyjęcie na siebie obowiązku zadbania o coś lub kogoś. Odpowiedzialność w uczeniu się matematyki w Planie Daltońskim polega na tym, że „nauczyciel powierza dzieciom odpowiedzialność za wyniki tego procesu oraz za sposób, w jaki ten końcowy wynik powstaje”[143]. Dzieci same decydują, jakie zadanie wykonają, kiedy i z kim. Wybierają również metody prowadzące do celu. Przekazanie przez nauczycieli odpowiedzialności uczniom za ten proces uczenia się jest rzeczą trudną, dla niektórych wręcz niemożliwą, szczególnie dla tych, którzy się nie doskonalą i pracują według utartych ścieżek. Wiąże się to również z dużą dozą zaufania do uczniów.

Kolejnym filarem edukacji daltońskiej jest samodzielność. To aktywność własna, autonomia w podejmowaniu decyzji, realizacja wykonywania zadania niezależnie od kogoś oraz świadomość sprawczości własnych działań. W Planie Daltońskim dzieci same odnajdują rozwiązania problemów. Samodzielnie wykonują również powierzone zadania, co istotne, czynią to we własnym tempie.

[143]Plan Daltoński Czym jest Edukacja Daltońska? https://dalton.org.pl/ (dostęp:07.02.2020).

Znaczącą rolę w konstruowaniu wiadomości i nabywaniu umiejętności matematycznych odgrywa współpraca (kolejny filar), która jest umiejętnością pracy w parach i w grupie, akceptacją podziału obowiązków i odpowiedzialności za powierzone zadanie, chęcią do wspólnego działania, zdolnością do tworzenia więzi oraz umiejętnością zespołowego wykonywania działań. Helen Parhurst określiła ją jako „współdziałanie i wzajemne oddziaływanie na siebie uczniów". Człowiek, kiedy się uczy, powinien się komunikować z innymi, ponieważ najefektywniej się uczymy, jeśli wchodzimy w relacje z innymi. Istotę współpracy ujął K. Robinson w swoim wykładzie nt. „Zmiana Paradygmatu Edukacji" stwierdził, że „najcenniejszą naukę zdobywa się w grupie, a współpraca jest podstawą rozwoju. Rozdzielając ludzi i oceniając ich osobno, pozbawiamy ich naturalnego środowiska, w jakim się uczą" [144]. Ta kooperacja dotyczy „zarówno uczniów, jak i nauczycieli; życie szkoły powinno być tak zorganizowane, aby zarówno uczeń, jak i nauczyciel byli jednakowo w niej zaangażowani"[145]. W obecnej szkole tak, jak w planie daltońskim nie ma miejsca na hierarchię, na roztaczanie fikcyjnego autorytetu. Elementy te bowiem krępują dzieci, powodują, że nie są one zdolne do rozwinięcia w sobie świadomości społecznej. Świadomości, która jest początkiem wszystkich społecznych doświadczeń - tak niezbędnych w dorosłym życiu.

W koncepcji edukacji daltońskiej współpraca jest rozpatrywana w dwóch aspektach: po pierwsze, jako współpraca wychowawcza, która promuje wartości związane z edukacją społeczną, z szczególnym uwzględnieniem szacunku; po drugie, jako współpraca dydaktyczna. W kontekście współpracy dydaktycznej nauczyciel organizuje grupy, które współdziałają ze sobą oraz grupy, które wspierają się nawzajem. W grupach wsparcia dzieci mają za zadanie samodzielnie zrealizować konkretne cele, lecz w razie trudności mogą poprosić kolegów o pomoc w zrozumieniu skomplikowanych zagadnień. Natomiast w grupach współpracujących, dzieci otrzymują zadanie do wykonania w parach. Głównym celem uczenia się przez współpracę jest rozwijanie umiejętności współdziałania z różnymi dziećmi, a nie tylko z najbliższymi przyjaciółmi. Zalety współpracy przedstawia poniższa infografika 2.

[144] Robinson K., Zmiana Paradygmatu Edukacji, wykład, https://www.youtube.com/watch?v=_wxcXd5Cnv8, (dostęp:19.04.2022 r.)
[145] Parkhurst H., Wykształcenie według Planu Daltońskiego, przekład Zofia Umińska, Warszawa 1928, s.16, w:https://pbc.gda.pl/dlibra/publication/1328/edition/4642/wykształcenie-wedlug-planu-daltonskiego-parkhurst-helen-1887-1959 (dostęp: 23.04.2025)



Infografika 2. Zalety stosowania na zajęciach współpracy

Źródło: Opracowanie własne

Infografika pokazuje rolę współpracy. Dzięki niej uczniowie wymieniają poglądy i doświadczenia. Łączą siły w podejmowaniu wspólnych decyzji, otrzymując w ten sposób lepszy efekt w rozwiązaniu problemu mniejszym nakładem i w krótszym czasie. Uczą się dyskusji, argumentowania, otwartości, szanowania zadań innych, pełnienia różnych ról tak, jak w dorosłym życiu. Wzrasta ich samoocena i poczucie bezpieczeństwa. Następuje również integracja dzieci i zaspokojenie ich potrzeb bycia w grupie.

Ostatnim filarem edukacji daltońskiej jest refleksja uczniów – czyli „głębsze zastanowienie się nad czymś lub myśl lub wypowiedź, będąca wynikiem takiego zastanowienia

się”[146]. Refleksja może występować na każdym etapie edukacji matematycznej. Dzięki refleksji uczniowie zyskują lepszy wgląd w swoje indywidualne metody uczenia się matematyki. Odkrywają, które podejścia są dla nich najskuteczniejsze i dlaczego. Kiedy dzieci mają możliwość wpływania na swoją pracę i biorą za nią odpowiedzialność, lepiej rozumieją, jak efektywnie pracować i jak wygląda proces uczenia się matematyki. Refleksję można stosować na każdym etapie edukacji – przed przystąpieniem do zadania, w jego trakcie oraz po zakończeniu.

W planie daltońskim szczególną uwagę kieruje się na wizualizację działań podejmowanych przez uczniów i nauczycieli. „Wizualizacja jest graficznym obrazem rozwoju procesu edukacyjnego, ale przede wszystkim uwidacznia zmiany zachodzące w strukturach psychicznych uczniów”[147]. Wizualizować możemy wszystkie elementy procesu nauczania-uczenia się oraz emocje. Poniżej podane są przykłady wizualizacji stosowane na edukacji matematycznej w klasach I-III.

PONIEDZIAŁEK	WTOREK	ŚRODA	CZWARTEK	PIĄTEK

Infografika 3. Zastosowanie kolorów w wizualizacji tygodnia w Planie Daltońskim[148]

Źródło: Opracowanie Rady Pedagogicznej w ZSP w Szewnie

W każdej klasie i na wszystkich przedmiotach poszczególne dni tygodnia oznaczone są jednakowymi kolorami. Używanie ich pomaga w organizacji zajęć. Wspiera proces uczenia się poprzez skojarzenia.

Innym elementem wizualizacji są wykonywane zadania. W poniedziałek jest czytanie, wtorek- szczególną rolę przypisuje się nauce działań na liczbach, środę kompetencjom muzycznym lub recytacji, czwartek plastyce, w piątek natomiast ortografii i gramatyce.

[146]Refleksja [w:] Wielki słownik języka polskiego, https://wsjp.pl/haslo/podglad/36557/refleksja/4179140/rezultat (dostęp: 07.02.2020).
[147] Michalak R., Miejsce i rola wizualizacji w edukacji daltońskiej, Inspiracje Daltońskie Teoria i praktyka nr 1/2018, s. 10.
[148] Informacje dotyczące wizualizacji pochodzą z artykułu M. Turczyńskiej „Dalton - od teorii do praktyki”.

CZYTA-NIE	LICZENIE	ŚPIEW/RECYTA-CJA	PLASTYKA	ORTOGRAFIA/GRAMA-TYKA

Infografika 4. Zastosowanie kolorów w wizualizacji zadań dla uczniów w Planie Daltońskim w klasach I-III[149]

Źródło: Opracowanie Rady Pedagogicznej ZSP w Szewnie

Elementem wizualizacji może być „Tablica zadań dodatkowych", która pozwala dzieciom na samodzielny wybór w poszczególne dni tygodnia.



Fotografia 1. Tablica zadań dodatkowych z matematyki

Źródło: Fotografia własna

Po wykonaniu zadań obowiązkowych w poszczególne dni tygodnia, uczniowie mają możliwość konstruowania wiedzy, wybierając i wykonując zadania dodatkowe, np. w poniedziałek dotyczą dodawania, wtorek odejmowania, środę mnożenia, czwartek dzielenia.

Narzędziem do wizualizacji są sygnalizatory. Wprowadzenie ich do procesu nauczania-uczenia się pozwala na dynamiczną interakcję między uczniami a nauczycielem, sprzyjając tworzeniu atmosfery otwartości i współpracy. Umożliwia nauczycielowi szybką ocenę poziomu zrozumienia materiału przez uczniów oraz identyfikację obszarów wymagających

[149] Turczyńska M., Lasek D.„ Od szkoły tradycyjnej do kreatywności i innowacyjności. International Conference on Innowation and Wellbeing in Education Editon 1,109-11 Mai 2024 Satu Mare,Satu Mare, Str. Ion Vidu, nr. 51-53, Limes 2024, s.197.

szczególnej uwagi. W konsekwencji, sygnalizatory stanowią cenne narzędzie, które wspiera zarówno proces nauczania, jak i uczenia się.



Fotografia 2. Przykład sygnalizatorów

Źródło: M. Turczyńska[150]

Wizualizować możemy również stopień rozwiązywanych zadań i postępy uczniów z edukacji matematycznej. Temu celowi służą tablice, które pełnią również funkcję motywacyjną. Dzięki przejrzystej prezentacji informacji, która uwidoczniona jest na tablicy, uczniowie mają możliwość samodzielnej oceny swoich postępów, co prowadzi do zwiększenia ich zaangażowania w proces uczenia się i podejmowania świadomych działań na rzecz własnego rozwoju. Tego rodzaju narzędzia sprzyjają skutecznemu rozwojowi zainteresowań matematycznych. Poniżej na fot. 3 jest przykład tablicy, która ilustruje poprawnie rozwiązane zadania przez uczniów w określonych umiejętnościach.

[150] Fotografia zaczerpnięta z artykułu Turczyńska M., Dalton – od teorii do praktyki, [w:] Acta Scientifica Academiae Ostroviensis. Sectio A, Nauki Humanistyczne, Społeczne i Techniczne 2019, v. 13-14, wyd.1-2, s. 71-93.



Fotografia 3. Tablica ilustrująca poprawne wykonanie zadań przez uczniów

Źródło: M. Turczyńska[151]

Zastosowanie tablicy ilustrującej prawidłowo wykonane zadania przez uczniów, służy monitorowaniu poziomu opanowania poszczególnych wiadomości i umiejętności wynikających z podstawy programowej kształcenia ogólnego dla edukacji wczesnoszkolnej, zarówno dla nauczycieli, jak i uczniów. W pierwszej kolumnie znajdują się imiona i nazwiska wszystkich dzieci. Kolejne natomiast kolumny zawierają umiejętności i wiadomości do opanowania przez uczniów. Dotyczą one: pisania, czytania, dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia w pamięciowego oraz znajomości znaków rzymskich. Przy każdym uczniu umieszczono kolorowe oznaczenia w formie kół, które informują, że uczeń opanował daną umiejętność i ile razy była ona sprawdzana (np. 2 koła – 2 razy). Zastosowany system wizualny pozwala na szybkie porównanie postępów uczniów, identyfikację obszarów wymagających wsparcia oraz monitorowanie efektów nauczania uczniów w poszczególnych

[151] Turczyńska M., Dalton – od teorii do praktyki, [w:] Acta Scientifica Academiae Ostroviensis. Sectio A, Nauki Humanistyczne, Społeczne i Techniczne…, op.cit.

zakresach kompetencji. Tabela ta jest narzędziem diagnostycznym i ewaluacyjnym dla nauczyciela, ale najbardziej istotne jest to, że pełni funkcję informacyjną i motywacyjną dla ucznia.

Emocje, które oddziałują na proces uczenia się matematyki, można również przedstawić w formie wizualnej. Prezentują je fotografia nr 4.



Fotografia 4. Tablica emocji[152]

Źródło: Fotografia własna

Fotografia nr 4 przedstawia tablicę z imionami uczniów, przy których umieszczone są emotikony wyrażające ich stan emocjonalny. Uczniowie samodzielnie zaznaczają swoje samopoczucie, wybierając symbol najlepiej odzwierciedlający ich aktualny nastrój. Takie rozwiązanie stanowi prostą i czytelną formę monitorowania emocji dzieci oraz wspiera rozwijanie ich kompetencji emocjonalno-społecznych. Emocje są istotne w procesie nauczania-uczenia się ponieważ mają bezpośredni wpływ na gotowość dzieci do nauki, koncentrację uwagi oraz aktywność podczas zajęć. Wykorzystanie emotikona w edukacji wczesnoszkolnej pomaga nauczycielowi rozpoznawać potrzeby emocjonalne uczniów i odpowiednio reagować na ich samopoczucie. Dzięki codziennemu określaniu własnych emocji dzieci uczą się je nazywać, rozumieć i komunikować, co sprzyja rozwojowi samoświadomości oraz umiejętności regulowania emocji. Tablica emocji stanowi narzędzie do budowania atmosfery wzajemnego szacunku, bezpieczeństwa i zaufania, które są niezbędne dla efektywnego procesu uczenia się i harmonijnego rozwoju dziecka.

[152] Fotografia zaczerpnięta z artykułu M. Turczyńskiej, Dalton - od teorii do praktyki, file:///C:/Users/Asus/Downloads/Dalton_od_teorii_do_praktyki%20(3).pdf, (dostęp: 13.04.2024).



Fotografia 5. Tablica emocji

Źródło: Fotografia własna

Tablica przedstawiona na fotografii 5, jest również narzędziem, dzięki któremu pozyskujemy informacje dotyczące emocji dzieci. Dzieci po skończonych zajęciach z edukacji matematycznej, przy buźce symbolizującej ich samopoczucie przyklejają karteczki.

Inną koncepcją wspierającą i rozwijającą zainteresowanie matematyką jest ocenianie kształtujące. Jest to starannie przemyślany sposób pracy nauczyciela i uczniów, polegający na systematycznym pozyskiwaniu informacji o przebiegu procesu uczenia się. Celem jego jest wspomaganie uczniów w procesie uczenia się. Wymaga zmiany organizacji procesu nauczania akceptowanej także przez uczniów. Również w tej koncepcji uczeń jest podmiotem, który aktywnie uczestniczy w procesie uczenia się matematyki. Samodzielnie rozwiązuje problemy, formułuje pytania badawcze, uczy się na błędach. Dzięki tej koncepcji uczeń konstruuje wiedzę i rozwija zainteresowania matematyczne.

Ocenianie kształtujące jest koncepcją polegającą na systematycznym pozyskiwaniu informacji na temat tego, jak się uczą dzieci. „Stanowi całościową koncepcję pracy szkoły i wszystkich toczących się w niej procesów. Rozumiane jest jako: kultura pracy szkoły, sposób planowania i realizowania działań edukacyjnych i strategia pracy nauczycieli i nauczy-

cielek i dyrektora. ”[153]. Pomaga uczniom zidentyfikować ich mocne i słabe strony oraz wskazać obszary, nad którymi powinni popracować, natomiast nauczycielom przekazuje informacje dotyczące procesu nauczania. Podstawą oceniania kształtującego jest pięć filarów – strategii, które określają cel stosowania oceniania kształtującego (OK). Wszystkie strategie oceniania kształtującego są ze sobą powiązane, uzupełniają się i stanowią drogowskazy do skutecznego nauczania i uczenia się. Pierwsza to: określanie i wyjaśnianie uczniom celów uczenia się i kryteriów sukcesu. Cele uczenia się są przyjaznymi dla uczniów opisami, które zawierają słowa, obrazy, działania albo kombinację tych elementów[154]. Dostarczają one uczniom informacji, dlaczego uczą się danych treści matematycznych i co będzie podlegało ocenie nauczyciela. Uczeń, który jest świadomy celu uczenia się, ma większą motywację do podejmowania działań, a w konsekwencji – większą szansę na odniesienie sukcesu. Druga: organizowanie w klasie dyskusji, zadawanie pytań i zadań dających informacje, czy i jak uczniowie się uczą. Trzecia: udzielanie uczniom takiej informacji zwrotnej, która przyczyni się do ich widocznych postępów. Czwarta: umożliwianie uczniom, by korzystali wzajemnie ze swojej wiedzy i umiejętności. Piąta: wspomaganie uczniów, by stali się autorami procesu swojego uczenia się[155].

Jest to istotne, gdyż cechą ludzką jest wybieganie myślą w przód, tworzenie wizji planów – ta własność odnosi się również do uczniów uczestniczących w procesie edukacji matematycznej. Tworzą oni dzięki temu wizję własnych osiągnięć i motywują się do nauki. Jak słusznie stwierdził John F. Kennedy „wysiłki i odwaga nie wystarczą bez celu i kierunku”[156].

Znajomość celów i kryteriów sukcesu czyni uczniów świadomymi i odpowiedzialnymi za efektywny udział w lekcji, gdyż wiedzą, czego się uczą oraz jakie wymagania stawia przed nimi nauczyciel, ocenia on bowiem tylko to, co zawarł w kryteriach sukcesu. Cele uczenia się nie powinniśmy utożsamiać z celami dydaktycznymi. Cele dydaktyczne kierują nauczaniem, natomiast cele uczenia się odnoszą się do uczniów. Cele lekcji „opisują języ-

[153]Ocenianie kształtujące, https://pomagajsieuczyc.ceo.org.pl/tematy/ocenianie-ksztaltujace/, (dostęp: 13.04.2024).
[154] Conne M. Moss, Susan M. Brookhart. Cele uczenia się . Jak pomóc uczniom zrozumieć każdą lekcję (Weronika Gasperczyk-przekład), Warszawa 2014, s. 20.
[155] Pintal D., Ocenianie kształtujące. Od koncepcji do praktycznej realizacji w klasie zróżnicowanej, Warszawa 2022, s. 9-11.
[156] Kennedy John F, Spraw, aby nauka była osobista. Umocnienie każdego ucznia do gotowości na przyszłość, https://kathleenmcclaskey.com/purpose-2/,(dostęp: 19.04.2024).

kiem zrozumiałym dla uczniów porcję informacji, umiejętności i procesów logicznego myślenia, które będą zgłębiane i rozwijane podczas jednej, konkretnej lekcji”[157]. Cel lekcji, to wspólny cel ucznia i nauczyciela. Dzięki temu nauczanie i uczenie się treści istotnych dla ucznia jest najskuteczniejsze. Uczniowie stosują go w trakcie bieżącej lekcji „aby, dążyć do zrozumienia określonych zagadnień, a potem je właściwie ocenić”[158].

Cel lekcji – to planowany efekt procesu uczenia się. Cele lekcji odgrywają ważną rolę w procesie nauczania – uczenia się. Ich walory przedstawia infografika nr 5.

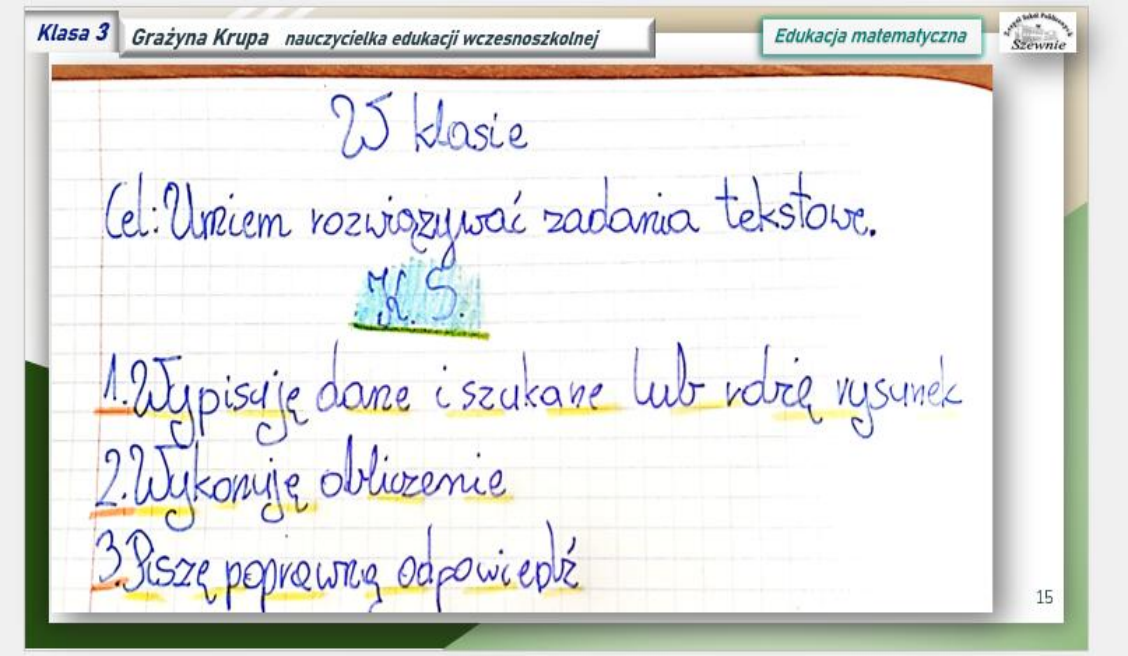


Infografika 5. Walory stosowania celów uczenia się

[157]. Moss C. M, Brookhart S.M., Cele uczenia się. Jak pomóc uczniom zrozumieć każdą lekcję, Warszawa 2014 r., s.15.
[158]Connie M. Moss, Susan M. Brookhart, przekład: Weronika Gasperczyk, Cele uczenia się. Jak pomóc uczniom zrozumieć każdą lekcję, Warszawa 2014, s..15.

Źródło: Opracowanie własne

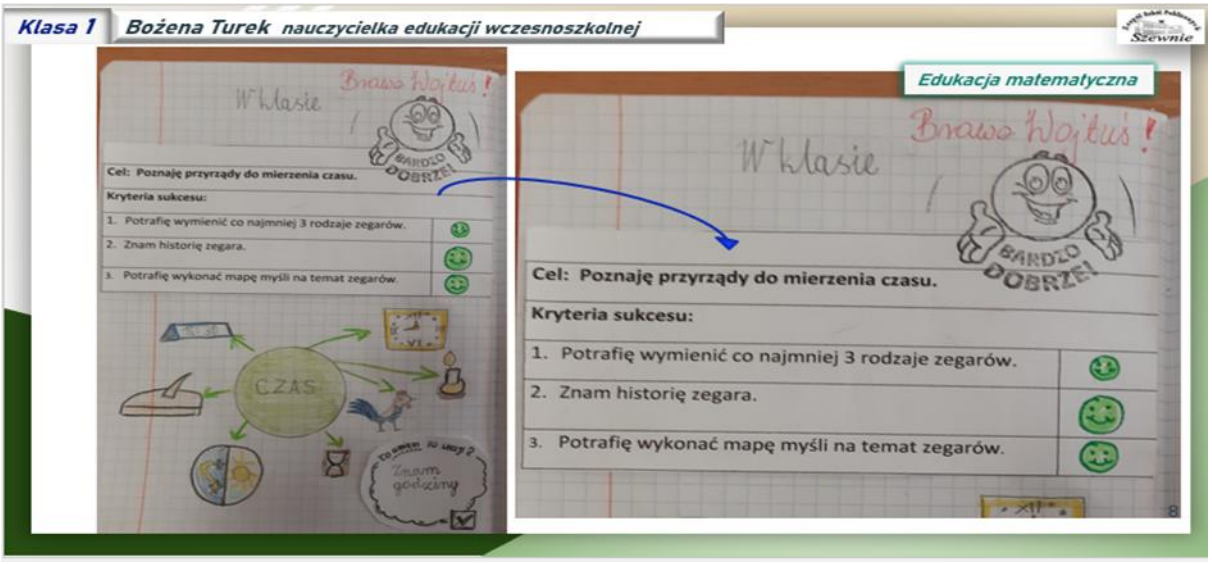
Cele lekcji mają decydujący wpływ na jej planowanie i wykorzystanie treści. Lekcje bez celów są niepewne - zarówno dla nauczycieli, jak i uczniów. Cele powinny być jasno sformułowane, odpowiednie dla poziomu uczniów, realistyczne, biorąc pod uwagę przydzielony czas zajęć, zrozumiałe dla nich[159]. Do ich realizacji potrzebne są jasno określone kryteria sukcesu czyli konkretne mierzalne wiadomości i umiejętności, które uczeń powinien posiąść w trakcie zajęć. W zamieszczonej fotografii nr 6 i 7 uczniowie na zajęciach doskonalą technikę rozwiązywania zadań tekstowych.



Fotografia 6. Cele i kryteria sukcesu z edukacji matematycznej w klasie III dotyczące umiejętności rozwiązywania zadań tekstowych (opracowanie nauczyciela edukacji wczesnoszkolnej w Zespole Szkół Publicznych w Szewnie

Źródło: Zdjęcie nauczyciela ZSP w Szewnie

[159] Walton Erin, 20 prostych pytań do oceny lekcji, https://teacherblog.ef.com/20-question-checklist-evaluate-lesson/, (dostęp: 22.03.2023).



Fotografia 7. Cele i kryteria sukcesu dotyczące edukacji matematycznej w klasie I (opracowanie nauczyciela ZSP w Szewnie)

Źródło: Zdjęcie nauczyciela ZSP w Szewnie

Tak jak cel, kryteria sukcesu powinny być zrozumiałe dla uczniów oraz cechować się konkretnością, mierzalnością, sprawdzalnością i spójnością z celem lekcji. Kryteria sukcesu porządkują lekcje zarówno ze strony ucznia, jak i nauczyciela. Dzięki kryteriom sukcesu uczeń wie, jakie konkretne zadania musi wykonać, jakie są konkretne oczekiwania nauczyciela wobec niego, co będzie przedmiotem oceny, dla nauczyciela zaś wskazówką na temat przygotowania scenariusza kolejnych zajęć. Dzięki kryteriom oceniania tworzy się pomost między uczniem a nauczycielem, łączący atmosferę uczenia się opartą na zaufaniu obu stron i samodzielności ucznia. Kryteria sukcesu wpływają na dobrostan uczniów, gdyż nauczyciel będzie sprawdzał lub kontrolował wiadomości tylko podane w kryteriach sukcesu. Dzięki kryteriom oceniania - zgodnie z Rozporządzenie Ministra Edukacji narodowej z dnia 22 lutego 2019 r. w sprawie oceniania, klasyfikowania i promowania uczniów i słuchaczy w szkołach publicznych - możliwe jest monitorowanie pracy ucznia oraz przekazywanie mu informacji o jego osiągnięciach edukacyjnych, które pomagają mu w uczeniu, poprzez wskazanie, co robi dobrze, co i jak wymaga poprawy oraz jak powinien uczyć się dalej[160].

Organizowanie w klasie dyskusji, zadawanie pytań i zadań dających informacje, czy i jak uczniowie się uczą – to druga strategia oceniania kształtującego. Lekcja, na której nauczyciel stosuje drugą strategię oceniania kształtującego, jest dialogiem pomiędzy nauczy-

[160] Rozporządzenie Ministra Edukacji narodowej z dnia 22 lutego 2019 r. w sprawie oceniania, klasyfikowania i promowania uczniów i słuchaczy w szkołach publicznych, DZ. U. z dnia 26 lutego 2019 r. Poz. 373

cielem a uczniami. Nauczyciel zadaje pytania, które stymulują ciekawość uczniów oraz zachęcają ich do rozważań i poszukiwania odpowiedzi. Zalecane jest zadawanie zadań mających na celu odświeżenie wiedzy i odwołanie się do informacji, które uczniowie już posiadają. Są to pytania odwołujące się m.in. do porównań oraz wyszukiwania różnic i podobieństw. Na tym etapie można także tworzyć mapy myśli.

Trzecia strategia dotycząca udzielenia uczniom informacji, które umożliwiają ich widoczny postęp, ściśle związana jest z poprzednimi. Każdy uczeń odczuwa potrzebę uzyskania informacji o efektach swojej pracy i jej ocenę. Informacja zwrotna wykorzystana jest przez dzieci w procesie uczenia się, jeśli informuje je, co zrobiły dobrze, co należy i w jaki sposób poprawić. Prawidłowo skonstruowana zachęca uczniów do refleksji nad własnym procesem uczenia się. Dzięki niej uczniowie uczą się analizować swoje działania, co rozwija ich umiejętności krytycznego myślenia i zdolność do samodzielnego rozwiązywania problemów. Informacja zawsze powinna zawierać cztery elementy: wyszczególnienie i docenienie dobrych elementów pracy ucznia, odnotowanie tego, co wymaga poprawienia lub dodatkowej pracy ze strony ucznia, a także wskazówki, w jaki sposób uczeń powinien poprawić tę konkretną pracę, w jakim kierunku uczeń powinien pracować dalej[161]. Jeżeli uczeń posiada informację o swoich sukcesach i błędach, ale również o tym, w jaki sposób ma poprawić te błędy, to zaczyna być odpowiedzialny za swój proces uczenia się.

Poniżej prezentuję przykłady informacji zwrotnych stosowanych w Zespole Szkół Publicznych w Szewnie (fot. 8 i fot. 9).

[161] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 22 lutego 2019 r. w sprawie oceniania, klasyfikowania i promowania uczniów i słuchaczy w szkołach publicznych, Dz.U. 2019 poz. 373, (dostęp: 12.04.2024).



Fotografia 8. Przykład informacji zwrotnej – klasa I

Autor: Nauczyciel Zespołu Szkół Publicznych w Szewnie



Fotografia 9. Przykład informacji zwrotnej – klasa II

Autor: Nauczyciel Zespołu Szkół Publicznych w Szewnie

Kolejną ciekawą propozycją pomocną w rozwijaniu zainteresowań matematycznych są tzw. Matematyczne Stacje Badawcze[162]. To metoda pracy głównie w parach i małych grupach. Pozwala uczniom na samodzielne konstruowanie i odkrywanie wiedzy poprzez między innymi formułowanie pytań i hipotez, dyskutowanie, dostrzeganie problemów oraz poszukiwanie różnych sposobów ich rozwiązania. Dzięki zastosowaniu przez nauczyciela tej metody „uczniowie pracują aktywnie, podejmują decyzje odnośnie wyboru stacji oraz rodzaju zadań do wykonania. Wykorzystanie tej metody na zajęciach pozwala nauczycielowi na taką organizację pracy, która aktywizuje uczniów, zachęca do wspólnych poszukiwań, podejmowania wyzwań, pokonywania trudności, działania, generowania pomysłów i sprawdzania ich w praktyce, a nawet do popełniania błędów”[163]. W tej metodzie potrzebne jest inne zagospodarowanie przestrzeni w klasie. „Utworzenie stacji w klasie pociąga za sobą konieczność: 1. zmiany ustawienia ławek – należy odejść od tradycyjnego ustawienia w rzędach, ponieważ nie daje to możliwości pracy w grupach; 2. utworzenia oddzielnych stanowisk dla każdej stacji, wyposażenia ich w narzędzia i pomoce niezbędne do podejmowania określonych czynności oraz przygotowania kopert z zadaniami – problemami do wykonania; 3. nadania stacjom nazw – adekwatnych do podejmowanych w nich działań; 4. określenia ram czasowych dla poszczególnych działań. Wprowadza to porządek w grupie, mobilizuje do lepszej organizacji pracy”[164]. Warto również wykorzystać na lekcji minutniki czy klepsydry, dzięki którym uczniowie mogą śledzić swój czas pracy, a także planować różne działania. W przygotowaniu danej stacji nauczyciel powinien wykorzystać pomysły uczniów. Istotne jest, aby zadania znajdujące się w stacjach miały charakter problemów do rozwiązania i zachęcały dzieci do poszukiwań. Praca oparta na stacjach badawczych uwzględnia trzy warianty. Wariant I - w stacjach pracują cyklicznie wszyscy uczniowie, zawsze na jednej godzinie lekcyjnej w określonym dniu tygodnia, bądź więcej niż jedną godzinę w określonym dniu miesiąca, lub też według innego ustalonego z uczniami harmonogramu. W wariancie II, w stacjach pracują tylko chętni i zainteresowani uczniowie, którzy wykonali już zadania wynikające z organizacji pracy na lekcji i chcą podejmować dodatkowe działania

[162] Fechner-Sędzicka I., MSB – Matematyczne Stacje Badawcze, s.23-29 [w:] Fechner-Sędzicka Barbara Ochmańska Wiesława Odrobina, Rozwijanie zainteresowań i zdolności matematycznych uczniów klas I – III szkoły podstawowej Poradnik dla nauczyciela, Warszawa 2012.
[163] Ibidem, s. 23.
[164] Ibidem, s.23.

rozwijające ich zainteresowania i zdolności matematyczne. Natomiast w wariancie III w stacjach pracują uczniowie mający trudności w opanowaniu konkretnych umiejętności matematycznych, wspólnie z uczniami przejawiającymi zainteresowania i zdolności matematyczne. Czas pracy określa nauczyciel. Metoda ta pozwala na podejmowanie przez uczniów ciekawych działań, co może sprawić, że nauka stanie się ciekawą i merytoryczną zabawą[165].

Istotną rolę w rozwijaniu zainteresowań matematycznych odgrywa praca z lapbookami. Metoda ta pochodzi ze Stanów Zjednoczonych. Polega ona na wykonaniu przez uczniów „książki na kolanie", teczki tematycznej lub gazetki przestrzennej. Lapbook matematyczny można porównać do papierowego teatrzyku, który mieści się na kolanach ucznia. To przestrzeń, w której każdy element ma swoje miejsce i pełni określoną rolę. Uczniowie stają się twórcami, projektując nie tylko treści, ale także formę swojej książki. Elementy ruchome, otwierane skrytki, obrotowe koła oraz składane części dodają lapbookom atrakcyjności i interaktywności.

Dzieci mogą je opracowywać indywidualnie lub grupowo. Informacje w nich zawarte mogą być wąskie lub interdyscyplinarne. Dzieci tworzą swoją teczkę, składając arkusze lub kartki brystolu na kilka równych części. Ilość ich oraz wielkość zależy od ich inwencji twórczej. Do przedstawienia treści matematycznych używają różnorodnych materiałów np. kolorowych kartek, guzików, cekinów, farb, kleju, nożyczek, wstążek, nici i innych materiałów w zależności od inwencji i kreatywności uczniów[166]. Teczki wykonane przez uczniów mają interaktywny charakter. Dzieci zamieszczają w nich kolorowe koperty wykonane przez siebie, do których wkładają np. zadania, ciekawostki, krzyżówki, rymowanki, piosenki, gry wykonane samodzielnie. Uczniowie bardzo chętnie pracują tą metodą. Czują się dowartościowani i docenieni. Są zmotywowani do pracy, gdyż to, co wykonują, aranżują bez ingerencji nauczyciela. Nauczyciel jest tylko obserwatorem. Dzieci natomiast wyczarowują swoje dzieła, które powstają dzięki swojej pomysłowości i kreatywności.

Dzięki lapbookom realizowana jest myśl Marii Montessori, „że nauczyciel powinien przejawiać entuzjazm i zachęcać dzieci do pracy, ale nie poprzez wykład, a przez obserwację – obserwowanie, na jakim etapie rozwoju znajduje się dziecko, i ewentualna pomoc pozwalają dziecku rozwijać samodzielność"[167]. Aranżowanie lapbooków przez dzieci sprawia, że

[165] Ciekawe przykłady zadań dla nauczycieli do wykonania przez uczniów znajdują się w książce Fechner-Sędzicka Barbara Ochmańska Wiesława Odrobina, Rozwijanie zainteresowań i zdolności matematycznych uczniów klas I – III szkoły podstawowej Poradnik dla nauczyciela…, op. cit.
[166] Turczyńska M., Zamiast klasówki lapbook, Inspiracje Daltońskie13/2021.
[167] K. Skjóld Wennerström, M. Bróderman Smeds „Pedagogika Montessori w przedszkolu i szkole", Kraków 2007, s. 16.

chętnie uczestniczą w zajęciach z edukacji matematycznej, ponieważ mogą wykazać się swoją pomysłowością i kreatywnością, ukazać piękno i twórczość matematyczną oraz wykorzystać swoje mocne strony zgodnie ze zdolnościami wielorakimi.

Dzięki zastosowaniu lapbooków dzieci uczą się planować swoją pracę. Są odpowiedzialni za jej wykonanie. Podnosi się ich motywacja do działania, gdyż każdy uczeń zaangażowany jest w jej wykonanie. Praca z „książką na kolanie" nie kończy się z chwilą prezentacji. Ona ciągle „żyje". Uczniowie mogą ją uzupełniać w miarę nabywania nowych informacji. Może być również źródłem informacji dla uczniów z niższych klas oraz pomocą do powtórzeń materiału[168].

Lapbooki są tak, jak fotoedukacja matematyczna doskonałym narzędziem do doskonalenia wszystkich elementów kultury matematycznej, o czym będę pisać w kolejnym rozdziale. Wszystkie wykonane przez dzieci lapbooki są piękne, merytoryczne, kolorowe, a jednocześnie różne. Rożne, tak jak różne jest każde dziecko ze swoimi zdolnościami i potrzebami[169]. Ponadto pozwalają spojrzeć na zadanie z różnych perspektyw i zaangażować wszystkie zmysły oraz rozwijać zdolności manualne, kreatywność, umiejętność krytycznego myślenia, sprawność matematyczną, język matematyczny, wyobraźnię, twórczość i elegancję matematyczną.

Poniższe fotografie: nr 10, nr 11, nr 12 i nr 13 pokazują zaangażowanie uczniów podczas zajęć matematycznych z lapbookami.

[168] Turczyńska M., Zamiast klasówki lapbook, Inspiracje Daltońskie, 13/2021.
[169] Ibidem



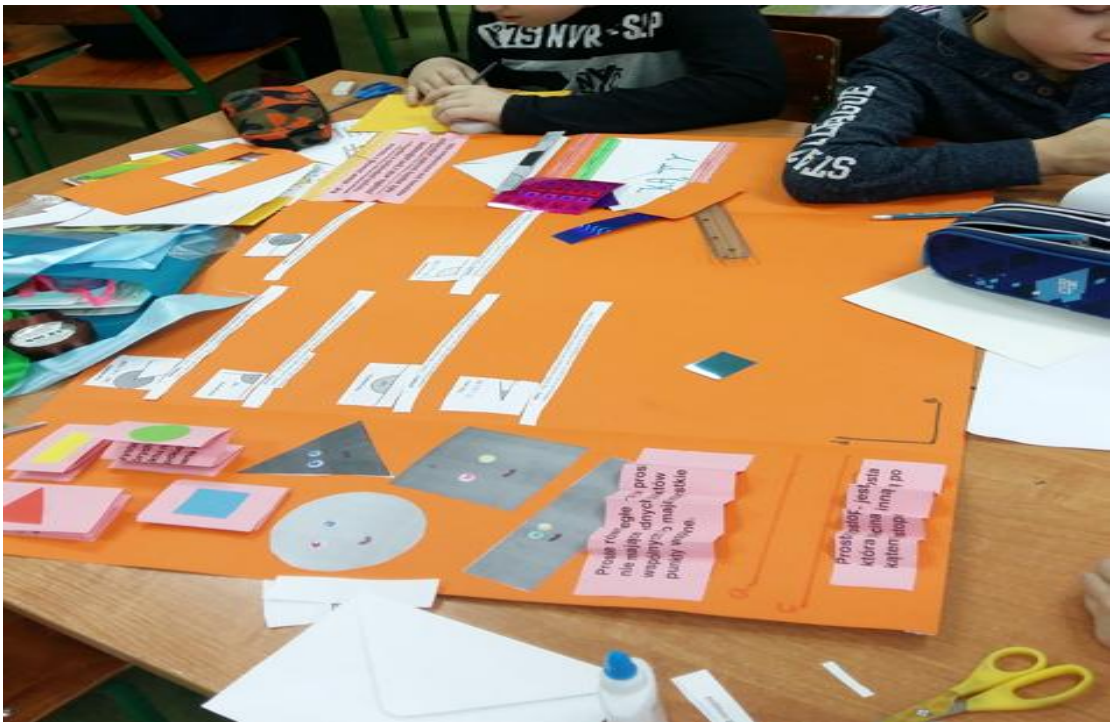
Fotografia 10. Zaangażowanie dzieci podczas wykonywania lapbooków

Autor: Małgorzata Turczyńska



Fotografia 11. Zaangażowanie uczniów w tworzeniu książek na kolanie

Autor: Małgorzata Turczyńska



Fotografia 12. Zaangażowanie uczniów w aranżowaniu lapbooków

Autor: Małgorzata Turczyńska

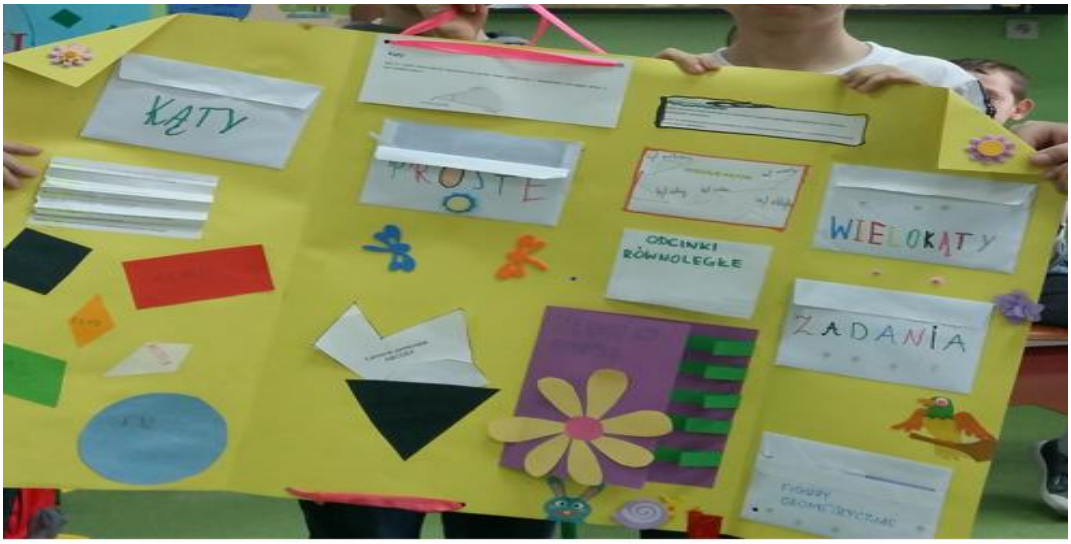


Fotografia 13. Zaangażowanie uczniów w aranżowaniu lapbooków

Autor: Małgorzata Turczyńska

Przy wykonywaniu lapbooków dzieci angażują wszystkie zmysły i są zmotywowane do pracy. Każda wykonana „książka na kolanie" jest piękna; każda jest inna, każda odzwierciedla indywidualny charakter jej pomysłodawców.

Poniższe fotografie: nr 14, nr 15 i nr 16 ilustrują lapbooki skomponowane przez dzieci na zajęciach z edukacji matematycznej.



Fotografia 14. Przykład lapbooka matematycznego

Autor: Małgorzata Turczyńska



Fotografia 15. Przykład lapbooka matematycznego

Autor: Małgorzata Turczyńska



Fotografia 16. Przykład lapbooka matematycznego

Autor: Małgorzata Turczyńska

Lapbooki matematyczne to wyjątkowe narzędzie edukacyjne, które łączy zabawę z nauką. Dają dzieciom możliwość twórczego wyrażania siebie, rozwijania swoich zainteresowań, zdobywania wiedzy w sposób interaktywny i angażujący oraz pozwalają na kształtowanie u dzieci zainteresowań matematyką.

Przedstawione wyżej propozycje dydaktyczne pracy z dziećmi angażują je do konstruowania i zdobywania wiadomości samodzielnie. Nauczyciel zaś pełni funkcję doradczą, wspierającą i inspirującą. Rozwijanie zainteresowań matematycznych uczniów wymaga także od nauczycieli poszukiwania nowych, skutecznych metod i form pracy, które powinny być adekwatne do potrzeb i możliwości rozwojowych dzieci w młodszym wieku szkolnym. Należy zadbać o to, aby one pobudzały ciekawość i zachęcały do dalszej nauki. Działania zmierzające do zainteresowania uczniów danym tematem i rozwijania ich pasji nie powinny mieć charakteru epizodycznego. W rozwijaniu zainteresowań matematycznych u uczniów w klasach młodszych warto pamiętać o trzech zasadach nauczania tego przedmiotu, które sformułował George Polya, czyli: aktywne uczenie się, właściwa motywacja i następstwo faz. Zasady te mówią o tym, aby uczniowie odkrywali sami tak dużo, jak to jest możliwe. Zanim przystąpią do rozwiązywania zadania, nauczyciel powinien pozwolić im odgadywać

wynik lub jego część. Jest to związane z tym, że już samo oczekiwanie na końcowy rezultat skupia uwagę i rozwija zainteresowanie rozwiązaniem problemu. W efektywnym uczeniu faza badania powinna poprzedzać fazę formalizacji, czyli wprowadzenia terminów, pojęć, twierdzeń, by przejść w fazę przyswajania, która toruje drogę do zastosowań i uogólnień[170].

[170]Zob. Polya G., Odkrycie matematyczne, Warszawa 1975.

Rozdział II. Kultura matematyczna

Kultura matematyczna stanowi istotny wymiar ogólnej kultury intelektualnej człowieka. Nie ogranicza się ona wyłącznie do znajomości pojęć, twierdzeń czy procedur rachunkowych, lecz obejmuje określony sposób myślenia i działania charakterystyczny dla matematyki, a także umiejętność logicznego wnioskowania, dostrzegania zależności oraz krytycznej analizy informacji. W kontekście edukacyjnym kultura matematyczna ma szczególne znaczenie, ponieważ kształtuje nie tylko kompetencje szkolne, ale również sposób funkcjonowania ucznia w otaczającej go rzeczywistości społecznej. Rozwijanie kultury matematycznej wśród uczniów sprzyja budowaniu ich postawy badawczej, ciekawości poznawczej oraz wytrwałości w rozwiązywaniu problemów. Uczeń posiadający wysoki poziom kultury matematycznej potrafi nie tylko wykonać zadanie, lecz także uzasadnić tok rozumowania, dostrzec różne strategie rozwiązania oraz ocenić poprawność uzyskanego wyniku. Zagadnienie kultury matematycznej przybiera szczególnego znaczenia na etapie edukacji wczesnoszkolnej, kiedy kształtują się podstawowe procesy poznawcze i postawy wobec uczenia się. To właśnie w tym okresie uczeń buduje swoje pierwsze doświadczenia związane z matematyką. Zaczyna postrzegać ją jako miejsce twórczego poszukiwania i odkrywania pewnych zależności. Ważną rolę na tym etapie edukacyjnym ma do odegrania nauczyciel. Jego zadaniem jest nie tylko przekazywanie treści programowych, ale także tworzenie sytuacji dydaktycznych, które będą sprzyjać samodzielnemu myśleniu przez uczniów, stawianiu pytań i dochodzeniu do końcowych rozwiązań. W rozdziale tym zostanie zaprezentowana analiza związana z wieloaspektowością kultury, a także złożoność i wielowymiarowość pojęcia *kultura matematyczna.* Ponadto zostaną szczegółowo opisane komponenty kultury matematycznej. W ostatnim podrozdziale ukazana zostanie fotoedukacja matematyczna jako koncepcja dydaktyczna determinująca rozwój kultury matematycznej uczniów.

2.1. Wieloaspektowość kultury

Kultura jest jednym z bardziej popularnych terminów związanych z naukami humanistycznymi i społecznymi. Ujawnia się w „rzeczywistej postawie wobec świata i życia, jaką zajmują ludzie określonej epoki dziejowej pewnej warstwy społecznej”[1]. Ludzie, w swoich zapatrywaniach, w przeżywaniu i wartościowaniu zjawisk, w metodach i motywach dążeń,

[1] Suchodolski B., Uspołecznienie kultury, Warszawa 1947, s.17-18.

w odczuwaniu wspólnoty i odrębności dają wyraz określonemu pojmowaniu kultury. Kultura ma wiele znaczeń i zakresów tematycznych. Nie można jej jednoznacznie zdefiniować. Można ją rozważać z wielu perspektyw. „jako wielką sprawę zbiorowego życia i można ją przeżywać osobiście. Można ją widzieć w obiektywach wytworach takich, jak dzieła sztuki, teksty ustaw, formy instytucji i można określać ją od wewnątrz, od psychiki ludzkiej”[2].

Pojęcie kultura pochodzi z języka łacińskiego i oznacza uprawę roli, czyli porządek ustalony przez człowieka[3] i służący mu „jako narzędzie zaspokajania ludzkich potrzeb i sposób realizacji ludzkich celów w dziedzinie materialnego bytu”[4]. kultura (*cultura agri* – uprawa roli) jako na celowe działanie człowieka, które wprowadza ludzki porządek w zastaną naturę

Z upływem lat pojęcie kultury „rozszerzono na oznaczenie wszystkiego, co może być „uprawiane” w jakikolwiek sposób[5]”. Po raz pierwszy takiego zakresu pojęciowego kultury dokonał rzymski filozof, mówca i polityk - Cyceron, w dziele *„Tusculanae Disputationes".* Użył terminu „cultura animi”, co można tłumaczyć jako: „uprawa umysłu”, „uprawa duszy” lub „pielęgnacja umysłu". Było to określenie metaforyczne[6]. Określenie kultury przez Cycerona, pojawiło się w literaturze jako pierwsza koncepcja filozoficzna. Pojęcie to miało charakter selektywny i oceniający. Obejmowało jedynie te narzędzia, wynalazki oraz zasady postępowania, które były uznawane za wykorzystane w praktyce. Od czasów Cycerona pojęcie kultury wiązano także z wytworami działalności ludzkiej: fizycznej, duchowej i umysłowej[7].

Termin kultura został spopularyzowany w niemieckiej literaturze na przełomie XV i XVIII wieku. Wiązano go ze wszystkimi czynnościami dotyczącymi nauki i doskonalenia. W swoim dziele *De iure naturae et gentium libri octo* niemiecki teoretyk prawa i historyk Samuel von Pufendorf, użył terminu kultura na wskazanie wszelakich wynalazków człowieka oraz związanymi z nimi instytucjami społecznymi i politycznymi, zasadami sprawiedliwości rządzącymi ludzkimi działaniami, a także językiem i moralnością[8]. J. Gottfried von Herder, niemiecki filozof twierdził, że „Nie ma nic bardziej nieokreślonego niż słowo

[2] Suchodolski B., Uspołecznienie kultury, Warszawa 1937, s. 89.
[3] Zob. M. A. Krąpiec, Człowiek w kulturze, Lublin 2008, s. 12; tenże, *Kultura*, [w:] *Powszechna Encyklopedia Filozofii*, t. 6, red. A. Maryniarczyk, Lublin 2005, s. 136.
[4] A. Kłoskowska, Kultura masowa. Krytyka i obrona, Warszawa 2005, s. 40.
[5] Daszkiewicz W., Podstawowe rozumienie kultury – ujęcie filozoficzne. Roczniki Kulturoznawcze Katolickiego Uniwersytetu Lubelskiego im. Jana Pawła II 2010, Tom 1,Lublin 2010, s.45.
[6] Wrońska M., Kultura medialna adolescentów. Studium dostępu i zastosowań, Rzeszów 2012, s. 74.
[7] Kłoskowska A., Kultura masowa. Krytyka i obrona…, op.cit., s. 9.
[8] Classic Encyclopedia, 11th Edition of the Encyclopaedia Bbrytannica, [w:] M. Wrońska Kultura medialna adolescentów…op.cit., s. 74.

kultura”[9]. Związane jest to, ze złożonością i wielowymiarowością kultury, która obejmuje wiele aspektów życia ludzkiego. Kultura jest zjawiskiem zbiorowym, kształtowanym przez interakcje między ludźmi.

Podstawą rozwoju i istnienia każdej kultury jest przyjęty przez społeczeństwo system wartości. Jak pisał Florian Znaniecki „świat kultury jest światem wartości, wartości zaś pierwotnym datum ludzkiego doświadczenia niesprowadzalnym do żadnych kategorii przyrodniczych”[10]. Wartości, są podstawą ludzkich doświadczeń, decydują o stylu życia, wytworach kulturowych oraz zachowaniach społeczeństw. Wartości wpływają na istotę i specyfikę kultury.

W skład kultury wchodzą zarówno idee, jak i działania. „Można zrozumieć ją jako system znaczeń, który zarządza złożonym i rozległym zbiorem działań i interakcji. Owe znaczenia-symbole, przekonania prawa - tworzą pewną strukturę i wytyczne, determinując tym samym zachowanie”[11]. Kultura więc, to system informacji, który pozwala ludziom komunikować się, funkcjonować oraz zaspokajać swoje potrzeby. Rozwija się nieustannie dzięki zbiorowej i indywidualnej działalności twórczej. Przez kulturę człowiek wyraża w pełni siebie i swoją historię zarówno na płaszczyźnie indywidualnej, jak i zbiorowej. Uwzględniając kulturę „jako istotną własność człowieka”, można podzielić ją przede wszystkim na materialną i duchową”[12]. Materialna dotyczy aktywności materialno-produkcyjnej człowieka oraz wytworzonych w jej trakcie produktów. Natomiast duchowa – czyli niematerialna, odnosi się do sfery ducha i jej produktów, np. literatury, sztuki, symboli, gestów, przekonań, wartości. Stanowi ona źródło życia społecznego, które oddziaływuje na powstanie i jego rozwój. Dzięki niej człowiek przyjmuje wartości, normy kulturowe oraz wzorce zachowań, wpływając tym samym na socjalizację społeczną. Kulturę tworzą ludzie „w toku wzajemnego oddziaływania i współdziałania, a trwając przez pokolenia, rozwija się i wzbogaca w procesie historycznej tradycji”[13]. Dzięki społecznemu charakterowi kultury zachowuje się pewne normy i wzorce, uczy się ich i przekazuje je w danym środowisku. Kultura zawsze jest czyjąś własnością. „To ludzkie podmioty ją tworzą, przez nią wzajemnie się komunikują i w niej się wyrażają. Wchodzą z sobą w różnego rodzaju zależności”[14].

[9] Herder J.G., Myśli o filozofii dziejów tom I , Warszawa1962, s. 4.
[10] Szczepański J., Wstęp do wydania polskiego [w:] F. Znaniecki, Nauki o kulturze. Narodziny i rozwój, przeł. J. Szacki, wstęp J. Szczepański, Warszawa 1992, s. IX.
[11] Dernowska U., Ruch Pedagogiczny 4/2014, s. 15.
[12] Jedynak S., Kategorie kultury, Lublin 2011, s. 12
[13] Kłoskowska A. (red.) Encyklopedia kultury polskiej XX wieku. Pojęcia i problemy wiedzy o kulturze, Wrocław 1991, s. 19.
[14] Dyczewski L., Wartości w kulturze polskiej, Lublin 1993, s. 17.

Edward Burnett Tylor pisze, że kultura „to całość, która obejmuje wiedzę, wierzenia, sztukę, moralność, prawo, zwyczaje oraz inne zdolności i nawyki nabyte przez członków społeczeństwa”[15]. Jest ona „dla człowieka światem zastanym, do którego może wejść, ucząc się wielu rzeczy i przez wiele lat. Kultura to wytwór i atrybut człowieka. Stwarza możliwości kreatywnego i twórczego działania, do którego w pewnym sensie jest przeznaczona, bo dzięki kulturze istniejące zjawiska zmieniają swoją ważność”[16]. Podejście to pochodzi z filozofii Augusta Comte’a i po raz pierwszy pojawiło się w pracach Johann Gottfried von Herdera, opublikowanych pod koniec XVIII wieku. W swoich rozważaniach J. G. Herder „ujmuje pojawienie się kultury jako jeden z etapów ewolucyjnego procesu bytu, związanego z pojawieniem się i rozwojem gatunku ludzkiego, traktując kulturę jako własność daną człowiekowi”[17]. Koncepcja ta podkreśla, że „kultura stanowi swoistą cechę ludzką, która umożliwia człowiekowi przetrwanie w niesprzyjających warunkach środowiska oraz rekompensuje mu braki w jego wyposażeniu fizycznym”[18].

W latach pięćdziesiątych XX wieku Alfred Kroeber i Clyde Kluckhohn dokonali przeglądu 168 różnych przykładów określeń kultury w naukach społecznych[19], przedstawiając sześć typów, które podkreślają różne jej aspekty. Należą do nich definicje: definicje opisowo-numeratywne,(nominalistyczne, opisowo–wyliczające), które ograniczają się do wyliczenia elementów składowych kultury. Przykładem jest definicja zaproponowana przez E.B. Tylora: „Kultura, czyli cywilizacja, jest to złożona całość, która obejmuje wiedzę, wierzenia, sztukę, moralność, prawa, obyczaje oraz inne zdolności i nawyki nabyte przez ludzi jako członków społeczeństwa”[20]. Druga grupa to definicje historyczne – nacisk jest tu położony na czynnik tradycji konstytuujący kulturę, element zbiorowego dorobku i procesu dziedziczenia, przekazu doświadczenia. W tym aspekcie kultura jest efektem historycznych doświadczeń, które kształtują sposób, w jaki społeczeństwa postrzegają i interpretują rzeczywistość. Jak pisze Stefan Czarnowski: „kultura jest dobrem zbiorowym i zbiorowym dorobkiem, owocem twórczego i przetwórczego wysiłku niezliczonych pokoleń. O kulturze

[15] Podaję za E. Nowicka, M. Głowacka – Grajper, Świat człowieka, świat kultury. Antologia tekstów klasycznej antropologii, Warszawa 2009, s. 82.
[16] Krąpiec M.A, U podstaw rozumienia kultury, Lublin 1991, s. 7-14.
[17] Podaję za Suchecki A. M., Naukowe Rozumienie kultury jako zjawiska społeczno-ekonomicznego – przegląd koncepcji, Zeszyty Naukowe Ostrołęckiego Towarzystwa Naukowego, t. XXXVI, Ostrołęka2012, s. 299.
[18]. Herder J.G, Myśli o filozofii dziejów (wybór), Warszawa 2000, s. 42–43.
[19] Kroeber A., Kluckhohn. Culture C.. A Critical Review of Concepts and Definitions. Cambridge: Papers of Peabody Museum 1952.Cyt. za: A. Kłoskowska, Kultura masowa, Warszawa 1996 r., s. 13.
[20] Nowicka E., Głowacka M. - Grajper (red.), Świat człowieka, świat kultury. Antologia tekstów klasycznej antropologii, Warszawa 2009, s. 82.

można mówić dopiero wtedy, gdy odkrycie czy wynalazek zostaje zachowany, gdy jest przekazywany z pokolenia na pokolenie, gdy staje się dorobkiem trwałym zbiorowości ludzkiej, a nie przyzwyczajeniem poszczególnej jednostki czy mniemaniem osobistym"[21]. Kolejna grupa to definicje normatywne, które akcentują „podporządkowanie normom jako właściwość zachowań kulturalnych. Zwracają również uwagę na jedność „stylu życia", charakteryzującego poszczególne kultury"[22]. Definicje normatywne, jak pisze A. M. Suchecki, szczególną rolę przypisują społeczeństwu jako nośnikowi i elementowi gwarantującemu trwałość kultury. Następna grupa to definicje psychologiczne, uwzględniające psychiczne mechanizmy przyswajania kultury: procesy uczenia się, wytwarzania nawyków i internalizacji norm, podkreśla się wzajemne wpływy kultury i osobowości oraz kulturę traktuje się jako aparat przystosowawczy. Piata grupa obejmuje definicje strukturalistyczne kultury akcentujące całościowy charakter poszczególnych kultur oraz wewnętrzne powiązania pomiędzy ich kluczowymi elementami. Koncentrują się przede wszystkim na strukturze danej kultury, traktowanej jako zbiór kluczowych elementów, które ją tworzą, oraz na ich wzajemnych, wewnętrznych relacjach. Ostatnia grupa zawiera definicje genetyczne. „Kładą one nacisk na wyjaśnienie pochodzenia kultury, na jej charakter jako produkt społecznego współżycia ludzi"[23]. Kultura stanowi fundamentalny atrybut ludzkiego istnienia, obejmując wszystkie aspekty życia jednostki. „W zakres kultury wchodzą te zachowania, które stały się nawykiem społecznym, zachowania odznaczające się regularnością właściwą dla licznych członków określonej grupy, podgrupy czy kategorii społecznej. Czynności kulturowe mają z definicji charakter wyuczony, a zatem zachowania instynktowne nie wchodzą w zakres kultury"[24].

Typologia definicji kultury A.L. Kroebera i C. Kluckhohna była modyfikowana. Przyjęto jednolite kryterium, a mianowicie sposób, w jaki różne dyscypliny humanistyczne postrzegają fenomen kultury jako kluczowy element dla swojego rozumienia. Zawiera ona pięć zasadniczych grup: antropologiczne, socjologiczne, filozoficzne, psychologiczne i historyczne[25]. Antropolodzy posługują się szeroką definicją kultury, obejmującą wszelkiego rodzaju działania, wartości i artefakty, które określona społeczność wytworzyła, by móc funk-

[21] Czarnowski S., Kultura, [w:] *Dzieła*, t. 1: *Studia z historii kultury*, red. N. Assorodobraj, S. Ossowski, Warszawa 1956, s. 20
[22] Daszkiewicz W., Podstawowe rozumienie kultury – ujęcie filozoficzne, Roczniki kulturoznawcze, Tom I, Lublin 2010, s. 48-49.
[23] Daszkiewicz W., Podstawowe rozumienie kultury – ujęcie filozoficzne…, op.cit., s. 48-49.
[24] Szacka B., Wprowadzenie do socjologii, Warszawa 2003, s. 76-77.
[25] Ibidem, s. 952.

cjonować. Badający kulturę zwykle chcą poznać każdy aspekt, by uzyskać pełny obraz społeczności, która daną kulturę stworzyła. Aby tego dokonać, antropolodzy opracowali „schematy kulturowe", obejmujące wszystkie składniki kultury. Taki schemat może wyglądać następująco: „kultura materialna, technika, gospodarka; instytucje społeczne, ustrój społeczny, szkolnictwo, ustrój polityczny; ludzie i wszechświat, system wierzeń; estetyka, grafika i malarstwo, folklor, muzyka, teatr i taniec; język"[26]. Antropolodzy, analizując różnorodne kultury, doceniają takie schematy, ponieważ pozwalają one uchwycić bogactwo i złożoność zjawisk kulturowych w ich całościowym wymiarze. E.B. Tylor jest autorem definicji stosowanej przez antropologów, która brzmi: „Kultura, czyli cywilizacja, jest to złożona całość, która obejmuje wiedzę, wierzenia, sztukę, moralność, prawa, obyczaje oraz inne zdolności i nawyki nabyte przez ludzi jako członków społeczeństwa"[27] .

Inne spojrzenie na kulturę reprezentują socjologowie. Dla nich kultura stanowi wyodrębniony „aspekt życia i działalności społeczności ludzkich, związany ze sferą potrzeb i przeżyć niemających charakteru czysto ekonomicznego czy technicznego, które rozwijane są głównie w czasie wolnym"[28]. Kultura dla socjologów stanowi wyodrębnioną dziedzinę życia społecznego, w której przejawiają się charakterystyczne dla danej grupy wzorce zachowań, wartości i przekonań. Zdaniem Antoniny Kłoskowskiej, kultura społeczna charakteryzuje się tym, że „podmiotem i przedmiotem kulturalnie określonych działań są tutaj sami ludzie, że regulujący wpływ kultury odnosi się w tym wypadku nie do żadnych innych substancji lub wartości, lecz do stosunków, ról i układów ludzi w ich wzajemnych powiązaniach"[29]. Definicje socjologiczne traktują kulturę jako schematy interakcji pomiędzy jednostkami i grupami społecznymi.

Dla filozofa nurt personalistyczny jawi się jako niezwykle fascynujący. Analizuje on relacje pomiędzy człowiekiem jako istotą społeczną, a światem kultury, badając pełen zakres społecznych wytworów ludzkich działań. W tym kontekście nie można pominąć postaci Władysława Tatarkiewicza, który zauważył, że „kultura jest nadbudową nad pierwotną naturę człowieka, nadbudową o różnorodnej wysokości. Ma ona charakter duchowy, jednak jej funkcją jest również utrzymanie ciała na określonym poziomie"[30].

[26] Bjerke B., Kultura a style przywództwa. Zarządzanie w warunkach globalizmu, Kraków 2004, s. 16.
[27] Podaję za Nowicka E., Głowacka M. - Grajper (red.), Świat człowieka, świat kultury. Antologia tekstów klasycznej antropologii, Warszawa 2009, s. 82.
[28] Filipiak M. (red.), Wprowadzenie do socjologii kultury, Lublin 2009, s. 12.
[29] Cytuję za Staszczak Z. (red), Słownik etnologiczny, Warszawa-Poznań, 1987, s. 16.
[30] Tatarkiewicz W., Historia filozofii, Warszawa 1978, s. 75.

Definicje psychologiczne koncentrują się na wzajemnych oddziaływaniach między osobowością a kulturą. Jednym z pierwszych psychologicznych ujęć kultury jest ujęcie zaproponowane przez Johanna Gottfrieda von Herdera. Według jego koncepcji kulturę powinno rozpatrywać się na dwóch płaszczyznach – genetycznej, gdzie realizacja kultury następuje na drodze tradycji, i organicznej, związanej z przyjmowaniem elementów dziedziczonych[31]. Natomiast Stanisław Ossowski wskazuje, że kultura jest „pewnym zespołem dyspozycji psychicznych przekazywanych w łonie danej zbiorowości przez kontakt społeczny i uzależniony od całego systemu stosunków międzyludzkich"[32]. W obrębie kultury psycholodzy posługują się pojęciami takimi, jak postawy, motywacje, dyspozycje, tradycja, wzorce oraz orientacje kulturowe, socjalizacja, fundamentalna struktura osobowości, osobowość modalna, a także instytucje pierwotne i wtórne.

Z kolei definicje historyczne skupiają się na wzajemnych oddziaływaniach między osobowością a kulturą. Kultura definiowana jest w nich „jako charakterystyczny dla gatunku ludzkiego sposób przekazywania doświadczenia przyszłym pokoleniom. Minione doświadczenie człowieka może się wyrażać w sferze materialnej, a jego przekazywanie kolejnym pokoleniom odbywa się poprzez nauczanie i wychowanie"[33]. „Kultura jest dobrem zbiorowym i zbiorowym dorobkiem, owocem twórczego i przetwórczego wysiłku niezliczonych pokoleń. O kulturze można mówić dopiero wtedy, gdy odkrycie czy wynalazek zostaje zachowany, gdy jest przekazywany z pokolenia na pokolenie, gdy staje się dorobkiem trwałym zbiorowości ludzkiej, a nie przyzwyczajeniem poszczególnej jednostki czy mniemaniem osobistym"[34]. Kultura jest więc efektem historycznych doświadczeń, które kształtują sposób, w jaki społeczeństwa postrzegają i interpretują rzeczywistość.

Warto także przytoczyć definicję Jana Pawła II, który skonstatował, że „Kultura jest wyrazem człowieka. Jest potwierdzeniem człowieczeństwa. Człowiek ją tworzy i człowiek przez nią tworzy siebie. Tworzy siebie wewnętrznym wysiłkiem ducha: myśli, woli, serca. I równocześnie człowiek tworzy kulturę we wspólnocie z innymi. Kultura jest wyrazem międzyludzkiej komunikacji, współmyślenia i współdziałania ludzi. Powstaje ona na służbie wspólnego dobra i staje się podstawowym dobrem ludzkich wspólnot. Kultura jest przede

[31] Herder J.G., Myśli o filozofii dziejów, t. l , tłum. J. Gałecki, Warszawa 1962. s. 42–43.
[32] Ossowski S., Z zagadnień psychologii społecznej. Dzieła, t. 3, Warszawa 1967, s. 163, cyt. za Marianem Filipiakiem, Wprowadzenie do socjologii kultury, Lublin 2009, s. 18.
[33] Suchecki A. M., Naukowe rozumienie kultury jako zjawiska społeczno-ekonomicznego –przegląd koncepcji, Zeszyty Naukowe Ostrołęckiego Towarzystwa Naukowego**,** 2012 | Zeszyt | XXVI, s. 303.
[34] Czarnowski S., Kultura, [w:] *Dzieła*, t. 1: *Studia z historii kultury*, red. N. Assorodobraj, S. Ossowski, Warszawa 1956, s. 5.

wszystkim dobrem wspólnym narodu”[35]. Papież Jan Paweł II przypisywał kulturze ogromną rolę w procesie kształtowania każdego człowieka oraz społeczeństwa, jak również zachowania tożsamości narodowej.

Zjawisko kultury stanowi kluczowy element, który kształtuje i determinuje dynamikę życia społecznego. „W ogólnym rozumieniu wszystkie zjawiska kulturalne mają charakter społeczny, są bowiem uwarunkowane istnieniem współżyjących społecznie zespołów ludzkich”[36]. Kultura jest zbiorem wszelkich umiejętności, wartości, norm i zwyczajów, które człowiek przyswaja w trakcie życia w danym społeczeństwie. Zjawiska kulturowe mają charakter wyuczony. Przekazywane są w procesie uczenia się. Przedmiotem społecznego przekazu kultury jest wiedza, informacje o rzeczach i ludziach, wartości i normy[37]. Kultura powstaje w wyniku współżycia ludzi, „w toku wzajemnego oddziaływania i współdziałania, a trwając przez pokolenia, rozwija się i wzbogaca w procesie historycznej tradycji. Ukształtowana przez kulturę twórcza jednostka może wnieść do niej ważny, indywidualny wkład, ale człowiek rozwijający się w izolacji w sposób wyłącznie naturalny nie byłby w stanie wyłonić ze swych wyłącznie biologicznych zasobów złożonej i bogatej całości kulturalnej, która by odpowiadała choćby kulturze ludu uznanego za prymitywny”[38]. Odnosi się do specyfiki relacji międzyludzkich, norm, wartości oraz zorganizowanej struktury społecznej. Stanowi "kompleks wzorców życia, który obejmuje zarówno materialne aspekty, jak i niematerialne wyrażenia ludzkiej egzystencji[39]", kształtując interakcje między jednostkami w ramach różnych społeczności.

W każdym społeczeństwie kultura jest zróżnicowana. Zachowuje ona specyficzne cechy regionalne i środowiskowe. Ulega zmianom pod wpływem ewolucji społeczeństwa przemysłowego w kierunku społeczeństwa informatycznego. Podstawą rozwoju i istnienia każdej kultury jest przyjęty przez społeczeństwo system wartości, które decyduje o stylu życia, wytworach kulturowych oraz zachowaniach społeczeństw. Nie ma jednej, uniwersalnej i ostatecznej listy wartości kultury, ponieważ każda kultura ma swoją własną specyfikę i bogactwo.

---

[35] Jan Paweł II, Pielgrzymka do Ojczyzny, Przemówienie do młodzieży na Wzgórzu Lecha, Gniezno, 3 czerwca 1979, https://ekai.pl/dokumenty/przemowienie-do-mlodziezy-zgromadzonej-na-wzgorzu-lecha/ (dostęp:22.11.2020).
[36] Kłoskowska A., Socjologia Kultury, Warszawa 2007, s.71.
[37] Nowicka E., Świat człowieka – świat kultury. Systematyczny wykład problemów antropologii. kulturowej, Warszawa 2005, s. 60–63.
[38] Kłoskowska A. (red.) Encyklopedia kultury polskiej XX wieku. Pojęcia i problemy wiedzy o kulturze, Wrocław 1991, s. 19.
[39] Williams R., Keywords: A Vocabulary of Culture and Society. New York 1983: Oxford University Press, s.15

Nie byłoby kultury „bez świadomego aspektu, bez zdolności i skłonności do realizowania w działaniu określonych wzorów, określonego ładu; bez umiejętności i chęci określonej interpretacji przedmiotów i czynienia z nich użytku wskazanego przez normy kulturowe”[40]. Człowiek, który jest częścią społeczeństwa, jest moderatorem kultury. To właśnie społeczeństwo „inspiruje całość kultury i dokonuje transmisji wzorów realizowanych we wszystkich dziedzinach kultury, czyni je sferą wspólnych wartości ludzi, zarówno w sferze bytu, jak i sferze świadomości”[41]. Kultura jest tworem społecznym. Ludzie nie tylko są przez nią kształtowani, ale także aktywnie ją tworzą i przekształcają poprzez swoje interakcje i działania. „To ludzkie podmioty ją tworzą, przez nią wzajemnie się komunikują i w niej się wyrażają. Wchodzą z sobą w różnego rodzaju zależności”[42]. Wpływ na zmianę kultury ma społeczeństwo, ale również pojedynczy człowiek, wnoszący swoje wartości do niej. Istnieje współzależność między poszczególnymi osobami a społeczeństwem. „Osoba jako podmiot działań nie jest czymś wtórnym w stosunku do tego, w czym istnieje. Osoba w stosunku do kultury jest podstawowym i pierwotnym punktem wyjścia. „Nie ma osoby, która by nie tworzyła kultury, ale też nie ma osoby, która by mogła się rozwijać bez kultury”[43]. Współzależność człowieka i kultury stanowi normę społecznego rozwoju naszego gatunku. Oznacza to tezę, że człowiek zawsze był i będzie „stwarzany” przez kulturę oraz że był i nadal będzie jej kreatorem[44]. „Wzajemna korelacja człowieka i kultury stanowi i stanowić będzie normę społecznego rozwoju naszego gatunku.”[45].

Kultura wywiera niebywały wpływ na edukację, która jest elementem kształtującym kulturę matematyczną, a tę dokładnie opiszę i scharakteryzuję w następnym podrozdziale. „Wszędzie na świecie, wśród ludzi, każda urzeczywistniona przez nich edukacja opiera się na kulturze. Nie ma innej zależności. Chociaż także edukacja wzbogaca kulturę, to najpierw z niej czerpie”[46]. Bez kultury nie ma edukacji. Edukacja spełnia rolę przekaźnika kultury.

Nie sposób omówić wszystkich definicji kultury i ich klasyfikacji. Stąd na potrzeby mojej pracy przyjmuję, że „*kultura to całokształt materialnego i duchowego dorobku ludzkości, wytworzonego w ogólnym rozwoju historycznym lub w jego określonej epoce i prze-*

[40] Kłoskowska A. (red.)Encyklopedia kultury polskiej XX wieku. Pojęcia i problemy wiedzy o kulturze, Wrocław 1991, s. 22.
[41] Ibidem, s. 27-28.
[42] Dyczewski L., Wartości w kulturze polskiej, Lublin 1993, s. 17.
[43] Rodziński A., Osoba, moralność, kultura, Lublin 1989, s. 27 [w:] L. Dyczewski, Wartości w kulturze polskiej, Lublin 1993, s. 17.
[44] Łomny Z., W intencji przetrwania i rozwoju, Warszawa 1998, s.13.
[45] Ibidem, s. 13.
[46] Ibidem, s. 71.

kazywanego z pokolenia na pokolenie. Rozwija się nieustannie dzięki zbiorowej i indywidualnej działalności twórczej. Przez kulturę człowiek wyraża w pełni siebie i swoją historię, zarówno na płaszczyźnie indywidualnej, jak i zbiorowej"[47].

Reasumując, w niniejszym podrozdziale dotyczącym wieloaspektowości kultury zaprezentowałam jej złożoność oraz bogactwo znaczeń obecnych w refleksji humanistycznej i społecznej. Przedstawione przeze mnie definicje akcentują dorobek materialny i duchowy społeczeństw, podkreślają symboliczny, komunikacyjny i normatywny wymiar kultury. Pozwalają także podkreślić, że kultura nie jest pojęciem jednorodnym ani łatwym do jednoznacznego zdefiniowania. Dokonana przeze mnie analiza stanowisk różnych badaczy pokazała, że kultura może być rozumiana zarówno jako system wartości i norm regulujących życie społeczne, a także jako przestrzeń znaczeń i symboli. Zaprezentowane przeze mnie różne typologie kultury, uwzględniające między innymi podziały na kulturę materialną i niematerialną, ukazały jej wewnętrzne zróżnicowanie oraz wielowymiarowy charakter. Wieloaspektowe ujęcie kultury pokazało, że jest ona zjawiskiem dynamicznym, historycznie zmiennym i kontekstowym, a jej interpretacja zależy od przyjętej perspektywy badawczej.

2.2. Złożoność i wielowymiarowość kultury matematycznej

Zrozumienie pojęcia kultury matematycznej ściśle związane jest z kulturą ogólną, bowiem „Jest ona nieodzowna w rozwoju każdego człowieka"[48]. Matematyka istniała, istnieje i istnieć będzie. „Jest nieodłączną częścią racjonalnej siły człowieka - podobnie jak język, sztuka czy religia jest częścią jego natury i historii"[49]. Obecna rzeczywistość wymaga zastosowania matematycznych narzędzi do jej kształtowania. „Najnowsze osiągnięcia nauk matematycznych pomogły udoskonalić metody przewidywania pogody, mierzyć efekty ryzykownych interwencji prawa rządzącego naturalnym środowiskiem człowieka, rozwijać teorię powstania wszechświata, latać w przestworza, konstruować urządzenia niezbędne we wszystkich dziedzinach życia. Matematyka ponadto kształtuje umiejętności potrzebne w życiu codziennym, w naukach technicznych, ekonomicznych, społecznych. Ale matematyki nie uprawia się tylko po to, aby móc ją zastosować w praktyce, choć niewątpliwie wyrosła

[47] Wrońska M., Kultura medialna adolescentów. Studium dostępu i zastosowań, Rzeszów 2012, s. 74-75.
[48] Brodzik M., Pruszyńska R., Komentarz do podstawy programowej przedmiotu matematyka, [w:] Podstawa programowa kształcenia ogólnego z komentarzem 2017, Szkoła podstawowa. Matematyka, s. 10, https://www.ore.edu.pl/wp-content/uploads/2017/05/matematyka.-pp-z-komentarzem.-szkola-podstawowa-1.pdf, (dostęp: 26.11.2020).
[49] Steen L.A., Matematyka współczesna. Dwanaście esejów, Warszawa 1983, s. 13.

ona z praktycznych potrzeb. Ta ciekawość, między innymi powoduje, że ludzie zajmują się różnymi problemami matematycznymi. Później rozwiązania większości problemów znajdują rozmaite zastosowania. Zastosowania są z kolei źródłem nowych problemów”[50]. Matematyka więc to nie tylko źródło zaspokajania potrzeb, ale również i inspiracji. Warto dodać, że Platon „utożsamia matematykę z najwyższym ideałem cywilizacji”[51]. Niektórzy matematycy za „najwspanialszy rozkwit ludzkiego ducha, katedrę trwałej wiedzy budowaną wytrwale przez wieki”[52]. Natomiast Stanisław Hartman twierdzi, że zrozumienie, czym jest dowód, jakie jest znaczenie praw logiki, stanowi już pewien stopień kultury[53].

Pojęcie *kultura matematyczna* „to pojęcie bardzo względne, a na pewno trudne do zdefiniowania”[54]. Kultura matematyczna zrodziła się na tradycjach starogreckich. Przez wieki kształtowała się w poszanowaniu prawdy, klarowności rozumowania, wnioskowania. Według Witolda Więsława, kultura matematyczna to umiejętność dostrzegania w problemach obiektów matematycznych, które pomagają w ich rozwiązaniu. Definicja ta podkreśla powszechność precyzyjnego myślenia i dostrzegania struktur, traktując matematykę jako element dziedzictwa ludzkości na równi z innymi dziedzinami kultury[55]. Z kolei Małgorzata Makiewicz, która obecnie najszerzej zajmuje się kulturą matematyczną definiuje ją „jako zbiór przekonań, postaw, wartości i norm, które kierują działalnością matematyczną, a także zbiór symboli, języków, metod i narzędzi, które służą do tworzenia, komunikowania i interpretowania matematyki”[56]. Autorka konstatuje, że „kultura matematyczna to nie tylko prawidłowo opanowana technika, sprawność, dowodzenie czy rozwiązywanie problemów, ale również twórczość i wyobraźnia geometryczna, dobre rozumienie pojęć oraz postrzeganie piękna matematyki. (…) kultura matematyczna pozwala zobaczyć idee, problemy, twierdzenia w otaczającej rzeczywistości”[57]. Natomiast Marek Kordos definiuje kulturę matematyczną jako „umiejętność zobaczenia w rozważanym problemie nieistniejących obiektów matematycznych, które jednak zdumiewająco skutecznie pozwalają się z tym problemem

[50] Ciesielski K., Pogoda Z., Królowa bez Nobla. Rozmowy o matematyce, Warszawa 2013, s. 44.
[51] Hammond A.L., Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura, [w:] L.A. Steen, Matematyka współczesna. Dwanaście esejów, Warszawa 1983, s. 28.
[52] Ibidem, s. 29.
[53] Hartman S., Dyskusja „Co to jest kultura matematyczna?”, https://smp.uws.edu.pl/msn/5/02-04.pdf, (dostęp:21.11.2024).
[54] Więsław W.W., Kultura matematyczna a kultura matematyków, [w:] Matematyka. Społeczeństwo. Nauczanie. Nr 21/1998, s. 27. https://smp.uph.edu.pl/msn/21/27-31.pdf (dostęp:24.11.2020)
[55] Porównaj, ibidem
[56] Makiewicz M., Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura, Studia Pedagogiczne t. L XIV/2011 PL ISSN 0081–6795, s. 9.
[57] Makiewicz M., Matematyka w obiektywie,. Kultura matematyczna dla nauczycieli, Szczecin 2010, s.9.; zob. także M. Makiewicz (red.), Matematyka nasza niedostrzegalna kultura. Wypowiedzi, cytaty o kulturze matematycznej, matematyce i jej nauczaniu, Szczecin 2023, s. 13-14.

uporać”[58]. Dodaje także, iż jest to „umiejętność pozwalającą się nie zgubić w technicznej stronie pojęć matematyki, w charakterystycznej dla matematyków obfitości formalizmów, w dostrzeganiu za abstrakcyjnymi rozumowaniami bardzo realnych […] konkretów, w osobistym wreszcie stosunku do uzyskanych rezultatów […], umiejętności dostrzegania struktury, a nie detali”[59]. Kultura matematyczna określona jest również jako zbiór umiejętności, kompetencji i świadomości, które pozwalają na efektywne i krytyczne korzystanie z matematyki w różnych sytuacjach i problemach, a także zbiór zainteresowań, emocji i motywacji, które sprzyjają zaangażowaniu i satysfakcji z matematyki[60]. Może być ona postrzegana jako zjawisko niezwykłe i unikalne. Kultura matematyczna „to nie tylko pewna technika, sprawność, posługiwanie się formalnym językiem, dowodzenie czy rozwiązywanie problemów”[61]. Kultura matematyczna to coś więcej, to sposób postrzegania, rozumienia i wykorzystywania matematyki w różnych kontekstach[62].

Reasumując dotychczasowe rozważania, w swojej pracy określam kulturę matematyczną uczniów jako zbiór postaw, wartości i umiejętności, które kształtują podejście jednostki do matematyki oraz do rozwiązywania problemów matematycznych. Obejmuje ona sprawność matematyczną, język matematyczny, wyobraźnię przestrzenną, twórczość matematyczną oraz elegancję matematyczną.

Kultury matematycznej nie nabywa się od razu. Kształtuje się ona wraz z rozwojem człowieka, przyrostem jego wiedzy i doświadczenia. Jest czymś w rodzaju matematycznego wykształcenia ogólnego[63]. Kultura matematyczna to kontakt z matematyką, niekoniecznie twórczy. Uczący matematyki powinni umieć ją przekazać w sposób ciekawy i zajmujący, aby zainteresować czy wręcz zafascynować słuchaczy[64]. Kultura matematyczna jest nadrzędna w stosunku do wiedzy matematycznej. Jest przez tę wiedzę formowana, pogłębiana, doskonalona. O danym człowieku można powiedzieć, że ma określoną kulturę matematyczną, jeśli potrafi w mniejszym lub większym stopniu posługiwać się podstawowymi tech-

[58] Kordos M., Zobaczyć to czego nie widać, czyli kultura matematyczna w praktyce, Wydawnictwo „Aksjomat”, Toruń, 2009, s. 5.
[59] Kordos M., Przedmowa, [w:] Górnicki J., Okruchy matematyki. Warszawa 1995, s.8.
[60] Matematyka, Encyklopedia PWN: źródło wiarygodnej i rzetelnej wiedzy (dostęp:21.11.2020)
[61]Makiewicz M., Matematyka nasza niedostrzegalna kultura, Studia Pedagogiczne t. L XIV/2011 PL ISSN 00816795,file:///C:/Users/SZKOLA~1/AppData/Local/Temp/23_Matematyka___Nasza_Niedostrzegalna_Kultura.pdf, (dostęp: 21.11.2020)
[62] Steen L.A., Matematyka współczesna. Dwanaście esejów, Warszawa 1983, s.24.
[63]Wąsowicz S., Kultura matematyczna, https://byc-matematykiem.pl/kultura-matematyczna/ (dostęp: 22.02.2025).
[64]Zob. Lubański, M., Dyskusja „Co to jest kultura matematyczna?", https://smp.uws.edu.pl/msn/5/02-04.pdf (dostęp: 24.03.2024).

nikami intelektualnymi. Ma wrodzone bądź nabyte umiejętności, aktywności umysłowe typowe dla matematyki. W szczególności - umiejętności abstrahowania, schematyzowania, uogólniania, porównywania, dostrzegania analogii, porządkowania, klasyfikowania, definiowania, argumentowania, dedukowania, redukowania, indukowania, specyfikowania, algorytmizowania, optymalizowania itp.[65]

Kultura matematyczna jest istotna dla „rozwoju intelektualnego człowieka, a także dla postępu cywilizacyjnego i technologicznego. Oddziałuje na sposób, w jaki ludzie postrzegają, uczą się i stosują matematykę w różnych kontekstach i celach. Jest czynnikiem kształtującym rozwój matematyki i jej zastosowań w świecie, wspomagający własną kondycję poznawczą i komunikacyjną, a także potęgę wyobraźni i wewnętrzną chęć tworzenia nowych konstruktów, odkrywania nowych faktów. Wychowanie ucznia do kultury matematycznej ma na celu nawiązanie łączności ze światem nauki"[66]. „Fenomen kultury matematycznej ucznia jest kategorią, która pomaga określić ideał współczesnego kształcenia matematycznego. Ideał przybliżający matematyczne rozumowanie, wzbogacający poziom i zakres interpretowania zjawisk występujących w świecie, wspomagający własną kondycję poznawczą i komunikacyjną, a także potęgę wyobraźni i wewnętrzną chęć tworzenia nowych konstruktów, odkrywania nowych faktów. Wychowanie ucznia do kultury matematycznej ma na celu nawiązanie łączności ze światem nauki"[67].

Kultura matematyczna sprzyja również rozwojowi takich elementów, jak wiedza, umiejętności, rozumowanie, komunikacja, argumentacja, modelowanie, dowodzenie, reprezentowanie, stosowanie, badanie, odkrywanie, tworzenie. Może także wspierać rozwój postaw i wartości, takich jak zainteresowanie, motywacja, zaangażowanie, pewność siebie, dociekliwość, kreatywność, estetyka, etyka, świadomość, refleksja, krytyka, samoregulacja. Kultura matematyczna może wreszcie pomagać w budowaniu tożsamości matematycznej, czyli poczucia własnej relacji z matematyką, jej znaczenia i wartości dla siebie i dla świata. „W skład kultury matematycznej wchodzi również twórczość i wyobraźnia geometryczna, dobre rozumienie pojęć oraz postrzeganie piękna tej dyscypliny. Kultura matematyczna polega także na tym, że zauważa się pewne idee matematyczne, problemy, a nawet twierdzenia w otaczającym nas świecie, w przyrodzie martwej, ożywionej, w dziełach rąk ludzkich"[68].

[65] Ibidem
[66] Makiewicz M., Model kultury matematycznej ucznia, Edukacja -Technika-Informatyka, nr 4/26/2018, s. 29.
[67] Ibidem
[68] Makiewicz, M., Matematyka w obiektywie. Kultura matematyczna dla nauczycieli, Szczecin 2010, s. 9.

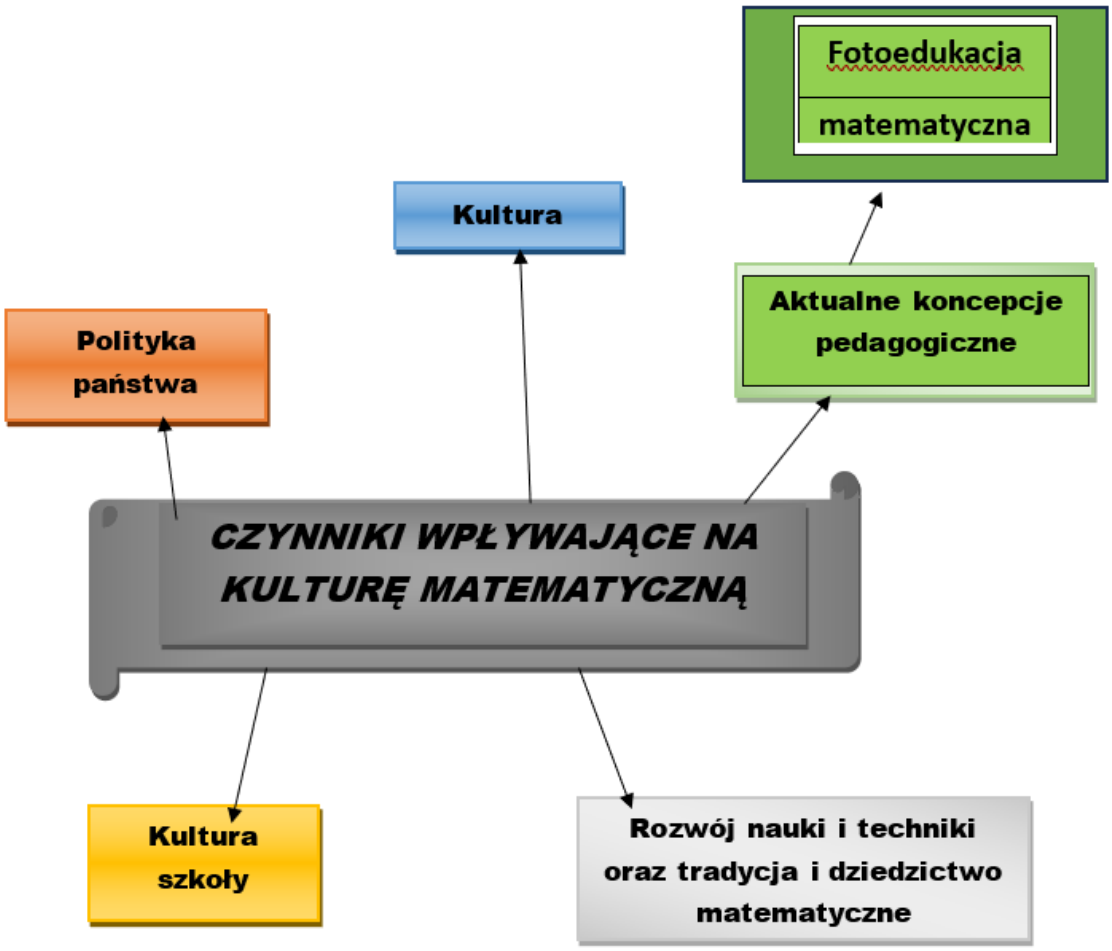
Ciekawe spostrzeżenie zaprezentowała Zofia A. Krygowska, twierdząc, że można wyeksponować czynnościowy oraz egalitarny aspekt kultury matematycznej. Autorka wskazuje na podobieństwa i cechy odmienne kultury matematycznej i muzycznej. Pisze, że „kulturę muzyczną można zdobyć przez czynne słuchanie muzyki stworzonej dla innych; można odczuć piękno i sens muzyki, bez skomponowania choćby jednego akordu. Nie można natomiast zrozumieć piękna i sensu matematyki bez matematycznej twórczości. Na szczęście jest ona w odpowiedniej skali dostępna już dziecku zaczynającemu swą szkolną edukację, jeżeli tylko do tej twórczości umiemy je pobudzić”[69]. Zofia A. Krygowska podkreśla, że zarówno w muzyce, jak i w matematyce istnieją aspekty czynnościowe i egalitarne. Muzykę można docenić poprzez aktywne jej słuchanie, co pozwala na odczuwanie jej piękna bez potrzeby komponowania, natomiast, zrozumienie matematyki wymaga aktywnego udziału ucznia przy pomocy nauczyciela. Człowiek nabywa kulturę matematyczną już we wczesnym dzieciństwie. Aby ona była u uczniów kształtowana, nauczyciel uczący musi ją sam posiadać.

Na podstawie analizy literatury[70] można wyróżnić pięć komplementarnych wymiarów kultury matematycznej: 1) wymiar poznawczo-strukturalny, który obejmuje rozumienie pojęć i ich relacji, zdolność abstrahowania i uogólniania, operowanie reprezentacjami (symbolicznymi, graficznymi, werbalnymi); 2) wymiar heurystyczno-metodologiczny, który obejmuje: umiejętność rozwiązywania problemów, stosowanie strategii poszukiwania rozwiązań, refleksję nad procesem dowodzenia; 3) wymiar językowo-dyskursywny, a w nim: precyzyjne formułowanie definicji i twierdzeń, konstruowanie poprawnych uzasadnień, uczestnictwo w dialogu matematycznym; 4) wymiar aksjologiczno-estetyczny, który zawiera: uznanie dla ścisłości i logicznej spójności, wrażliwość na elegancję i prostotę rozwiązań, postawę odpowiedzialności intelektualnej; 5) wymiar społeczno-praktyczny, czyli: stosowanie matematyki w analizie danych i modelowaniu, krytyczna interpretacja informacji liczbowych, rozumienie roli matematyki w kulturze i technologii.

Na rozwój kultury matematycznej ma wpływ wiele czynników (Infografika 6).

[69] Krygowska Z., Matematyka w szkole, Warszawa 1979 r.

[70] Poincare H., *Nauka i metoda*, tłum. M.H. Horwitz, Warszawa 1911, [w:] https://rcin.org.pl/dlibra/doccontent?id=34093 (dostęp: 22.09.2020); Sfard, A., Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing. Cambridge University Press, Cambridge 2008; Lakatos I., Worrall J., Zahar E., (ed.), Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery. Cambridge: Cambridge University Press 1976; Bruner, J. S. (1978). Poza dostarczone informacje, PWN, Warszawa 1978; Krygowska, Z., Zarys dydaktyki matematyki, Warszawa 1977.



Infografika 6. Czynniki wpływające na rozwój kultury matematycznej

Źródło: Opracowanie własne

Wśród wyżej wymienionych czynników istotna jest polityka państwa, która modeluje kulturę matematyczną w zależności od realizowanych celów i priorytetów w zakresie rozwoju i popularyzacji matematyki. Może to czynić poprzez ustalanie podstaw programowych kształcenia dla danego etapu edukacyjnego – w tym również edukacji matematycznej w klasach I-III, programów nauczania edukacji matematycznej, czy też obowiązujących podręczników. Decyzje polityczne związane są także z wyposażaniem szkół w odpowiednią infrastrukturę i narzędzia edukacyjne, które mogą wpływać na jakość nauczania matematyki. Należy w tym miejscu dodać, że 21 marca 2025 roku Minister Edukacji Barbara Nowacka przedstawiła główne kierunki realizacji polityki oświatowej państwa na rok szkolny 2025/2026. Wśród ośmiu najważniejszych obszarów działań znalazło się *kształtowanie my-*

ślenia analitycznego poprzez interdyscyplinarne podejście do nauczania przedmiotów przyrodniczych i ścisłych oraz rozwijanie umiejętności matematycznych w kształceniu ogólnym[71].

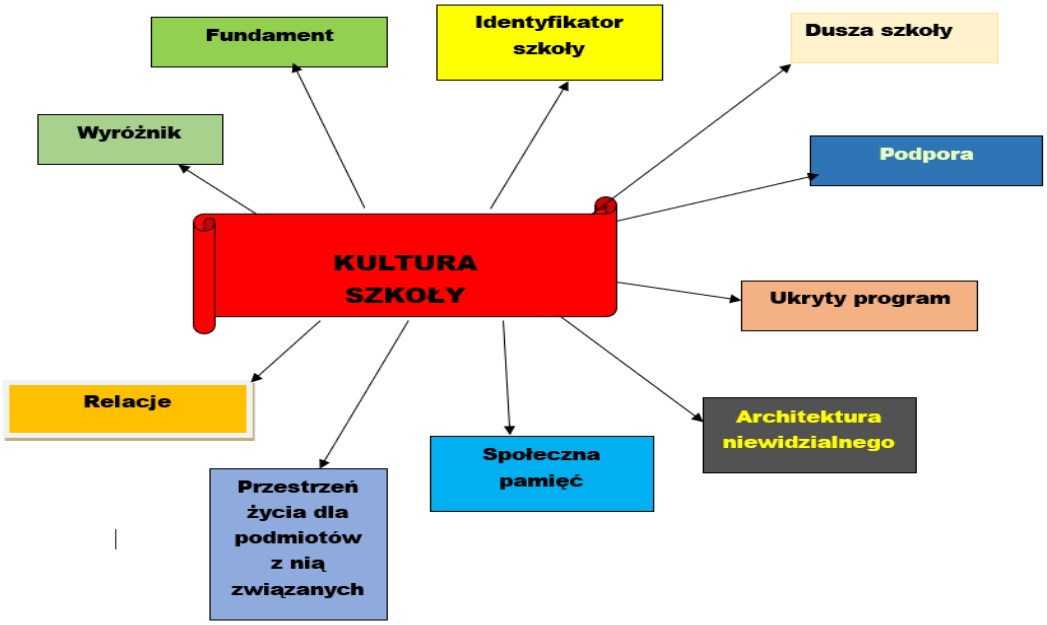
Rozwój kultury matematycznej uzależniony jest także od kultury szkoły, która nierozerwalnie związana jest z kulturą danego kraju oraz środowiska, w którym funkcjonuje. Kultura szkoły przejmuje od swego „otoczenia nie tylko energię, społeczne oczekiwania ludzi, informacje o zdarzeniach ważnych dla wspólnoty czy lokalnego rynku pracy, lecz także elementy kultury w postaci norm, przekonań, stereotypów czy symboli"[72]. „Kultura szkoły to ogół przekonań, poglądów, postaw i relacji oraz pisanych i niepisanych zasad, które kształtują każdy aspekt funkcjonowania szkoły jako instytucji, organizacji i wspólnoty. Są one kształtowane i podtrzymywane przez wszystkie podmioty"[73]. To także „zbiór wartości, wzorów zachowań, norm, tradycji i rytuałów szkolnych, charakterystyczny dla danej placówki"[74]. Elementy kultury szkoły zostały zaprezentowane na infografice nr 7.

[71] Ministerstwo Edukacji Narodowej, Minister Barbara Nowacka ogłosiła kierunki polityki oświatowej państwa na rok szkolny 2025/2026, https://www.gov.pl/web/edukacja/minister-barbara-nowacka-oglosila-kierunki-polityki-oswiatowej-panstwa-na-rok-szkolny-20252026

[72] K. Polak, Kultura szkoły, od relacji społecznych do języka uczniowskiego, Kraków 2007, s. 27.

[73] M. Czerepaniak - Walczak, Kultura szkoły – o jej złożoności i wielowymiarowości, Pedagogika Społeczna nr. 3(57), Uniwersytet Szczeciński 2015, s. 80.

[74] K.Polak, Kultura szkoły od relacji społecznych do języka uczniowskiego, Kraków 2007, s.18.

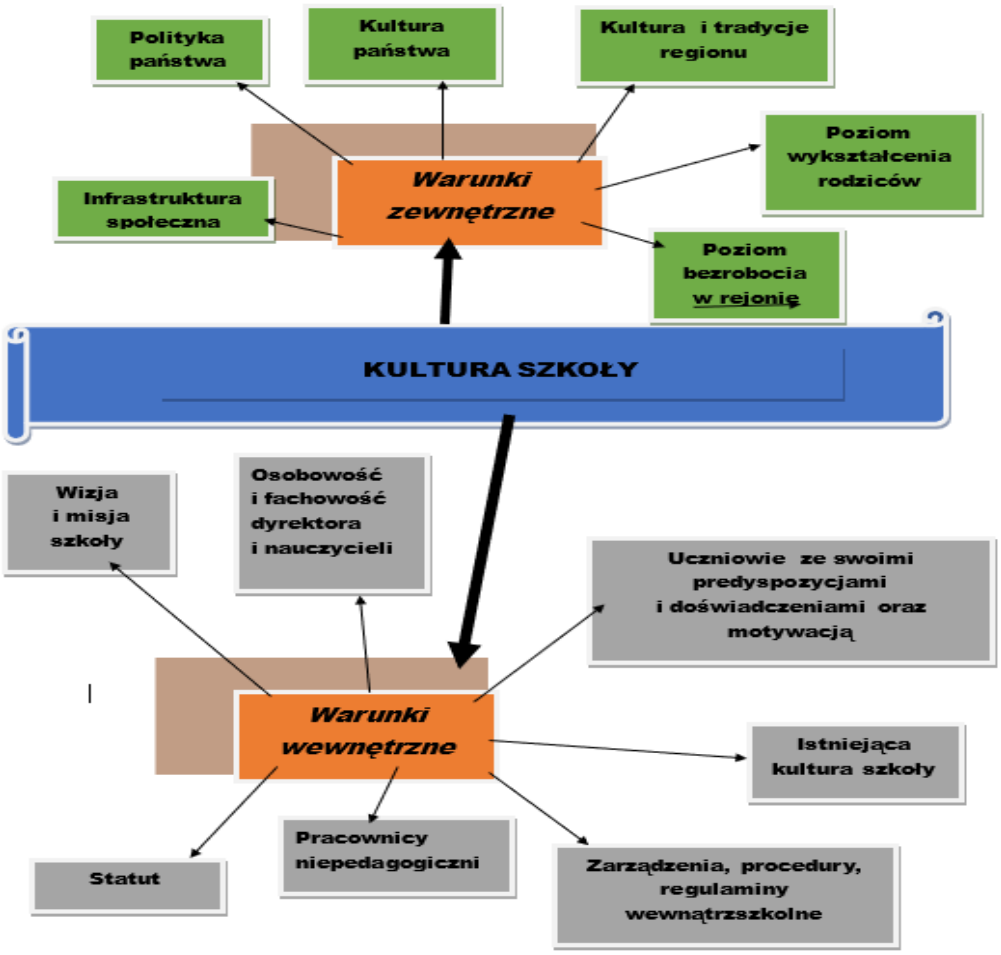


Infografika 7. Określenie kultury szkoły

Źródło: Opracowanie własne

„Kultura szkoły jest wytwarzana częściowo w otoczeniu społeczno-kulturowym szkoły, a częściowo także wewnątrz każdej z placówek szkolnych, wraz z ich wyjątkowością i specyfiką struktury organizacyjnej, zbiorem reguł działania, norm, systemami oceniania i obyczajowością”[75]. Tworzy się w umysłach ludzi. Obejmuje podzielane w danej placówce (ale też często wychodzące z otoczenia zewnętrznego) systemy wartości i normy potoczne i niekiedy nieuświadomione założenia. Zawiera związane z nimi wytwarzane przez „samych uczniów i nauczycieli, reguły działania, a także wewnętrzny symboliczny obszar funkcjonowania szkoły, skrywający rytuały, mity, przekonania, systemy wiedzy, wraz ze specyficznym językiem, za pomocą którego nauczyciele i uczniowie opisują szkolną rzeczywistość czy wyrażają do niej emocjonalny stosunek”[76]. Kultura szkoły jest wyznacznikiem pracy każdej z nich. Jest kluczowym elementem w procesie kształtowania tożsamości jednostki, który umożliwia jej refleksyjny rozwój oraz samodzielne myślenie. Stanowi ona „przestrzeń życia człowieka, przez którą i w której zarazem możliwa staje się realizacja jego potrzeb, aspiracji, planów życiowych”[77]. Zależy ona od warunków zewnętrznych i wewnętrznych. Przykładowe warunki prezentuje infografika nr 8.

[75] Polak K., Kultura szkoły, od relacji społecznych do języka uczniowskiego, Kraków 2007, s. 12.
[76] Ibidem, s. 26.
[77] Ibidem, s. 16.



Infografika nr 8. Przykładowe warunki zewnętrzne i wewnętrzne kształtujące kulturę
Źródło: opracowanie własne

Ważnym elementem kultury szkoły, kształtującym kulturę matematyczną - są relacje panujące w szkole oraz proces nauczania-uczenia się. Relacje w szkole nadają ton, który wpływa na efektywność procesu nauczania-uczenia się matematyki oraz tworzą bezpieczną atmosferę podczas zajęć. Dzięki tej atmosferze uczniowie chętnie odpowiadają, zadają pytania, mają przestrzeń do popełniania błędów. Nauczyciel dbający o relacje aranżuje tak przestrzeń, aby najważniejszą osobą na lekcji był uczeń. Nauczyciel pomaga, wspiera, motywuje. Tworzy grupy, w których w przyjaznej atmosferze uczniowie mogą wymieniać się wiedzą, dzielić się swoimi problemami, pracować i uczyć się od siebie nawzajem. Dzięki temu jego uczniowie osiągają lepsze wyniki uczenia się.

Kolejnym priorytetowym obszarem w kulturze każdej szkoły jest proces nauczania-uczenia się. Kluczowymi jego atrybutami są między innymi: „traktowanie uczenia się jako procesu indywidualnego rozwoju każdego z uczniów, promocja aktywnego uczenia się,

uwzględnienie indywidualnych potrzeb i właściwości uczenia się każdego z uczniów, dokumentowanie osiągnięć uczniów i refleksja nad nimi, komunikowanie wyników nauczania”[78], dzięki czemu dzieci są świadome - co potrafią oraz nad czym powinny popracować, aby osiągnąć sukces z matematyki.

Istotnym elementem determinującym rozwój kultury matematycznej jest także odpowiednie zadawanie pytań. Jak pisze Marilee Adams „Pytaniami tworzymy świat”[79]. „Pytania otwierają nam umysł, oczy oraz serce. Dzięki pytaniom uczymy się, nawiązujemy więzi i tworzymy je. Stajemy się mądrzejsi, wydajniejsi i osiągamy lepsze rezultaty”[80]. Nauka zadawania pytań jest jedną z metod myślenia pytaniami. „Myślenie pytaniami to system umiejętności oraz narzędzi wykorzystujących pytania, by poszerzyć nasz ogląd różnych spraw i sytuacji”[81]. Dobrze zadane pytanie wspomaga proces uczenia się uczniów. „Świat pytań jest światem możliwości”[82]. Poprzez trafnie zadane pytanie powodujemy, że uczeń się uczy, stymulujemy jego rozwój, umożliwiamy mu zdobywanie wiedzy. Bogusława D. Gołębiak uważa, że to właśnie odpowiednia strategia zadawania pytań stanowi w praktyce szkolnej narzędzie realizujące intelektualne wyzwanie, polegające na werbalizacji wiedzy ucznia. Dobrze sformułowane pytania zmuszają ucznia do aktywności poznawczej, która wykracza poza zwykłe odtwarzanie faktów[83]. Nauczyciele muszą pamiętać, że im bardziej zarzucają dzieci pytaniami, tym one mniej inicjatywy wykazują, udzielając odpowiedzi[84]. Odpowiednio stawiane pytania rozwijają u dzieci tzw. myślenie pytajne, które polega na dostrzeganiu sytuacji problemowych i stawianiu produktywnych pytań, wywołanych sytuacją problemową lub zadaniem. Praktyka szkolna pokazuje, że są dwa rodzaje pytań zadawanych przez nauczycieli. Jedne z nich hamują aktywność uczniów i nie aktywizują do myślenia i nauki. Są to najczęściej pytania zamknięte, faktograficzne ze znaną odpowiedzią. Mają postać: Co? Gdzie? Kiedy? Sprawdzają one wiedzę. Zadawanie ich, jednak bywa zasadne. Dzięki nim uczniowie utrwalają już zdobytą wiedzę. Drugą grupą są pytania otwarte, które dają uczniom perspektywę na pogłębioną odpowiedź, a tym samym stymulują ciekawość poznawczą. Pytania otwarte, jak pisze Robert Fisher wzbudzają umysł. Stają się wyzwaniem do myślenia,

[78] Mizerek H., Jakość edukacji. Dyskursy, które wybrzmiały, milcząc, [w:] G. Mazurkiewicz (redakcja), Jakość edukacji. Różnorodne perspektywy, Kraków 2012, s. 22.
[79] Adams M., Myślenie pytaniami. 12 narzędzi skutecznych w przywództwie, coachingu i życiu, Warszawa 2020, s. 24.
[80] Ibidem, s. 24-25.
[81] Ibidem, s. 43.
[82] Adams M., Myślenie pytaniami, [w:] M. Budzik, Pytania wspomagające proces uczenia się – kilka słów o niedyrektywnej komunikacji w szkole, Warszawa 2018, s.5.
[83] Gołębniak B.D., Nauczanie w klasie, [w:] Z. Kwieciński, B. Śliwerski- red. naukowa, Pedagogika 2, Podręcznik akademicki, Warszawa2004, s. 179.
[84] Fisher R., Uczymy się uczyć, tłum. K. Kruszewski, Warszawa 1999 r., s. 29

ale też sprawiają kłopoty, rzadko wymagają raczej nieschematycznych i przemyślanych odpowiedzi. Są efektywne, bo ich następstwem jest wytworzenie czegoś nowego[85].

Nauczyciel, zadając pytania, stara się, aby pobudzały one do myślenia. Wystarczy dokładnie przeanalizować pytanie zadawane uczniom, jeśli jest zamknięte lub sprawdzające wiedzę, zamienić je na otwarte. Zmieniając pytanie, zmieniamy myślenie swoje i uczniów. Aby zadawane przez nauczycieli pytania nie dotyczyły tylko sprawdzania wiedzy, które oczywiście są potrzebne, można je zamienić na pytania zmieniające proces uczenia się[86]. Poniżej podaję przykłady takiej zamiany.

1. Zamiana pytania sprawdzającego wiedzę na pytanie pobudzające do myślenia.

Pytanie wymagające wiedzy	*Pytanie wymagające myślenia*
Jaki ułamek nazywamy niewłaściwym?	Co to znaczy, że ułamek jest niewłaściwy? Odpowiedź uzasadnij.

2. Zamiana pytania w zestaw odpowiedzi.

Pytanie pamięciowe	*Zamiana pytania w zestaw odpowiedzi*
Jaki ułamek nazywamy niewłaściwym?	Podkreśl ułamki niewłaściwe. Uzasadnij swój wybór. ½; 4/5; 6/6; ¾; 12/5

Uczniowie wybierają odpowiedzi oraz uzasadniają je.

3. Pytania przekształcone w twierdzenia

Pytanie pamięciowe	*Pytanie przekształcone w twierdzenie, w którym uczniowie zgadzają się lub nie, ale zawsze uzasadniają odpowiedź*

[85] Ibidem, s. 33.
[86] Inspiracją do tak sformułowanych przeze mnie pytań była publikacja Sterny D., Uczę (się) w szkole Warszawa 2014.

Jaki ułamek nazywamy właściwym?	Jeżeli w ułamku licznik jest mniejszy od mianownika, to ułamek jest właściwy. Czy zgadzasz się z tą odpowiedzią, czy nie. Uzasadnij swoją odpowiedź.

W pytaniach przekształconych w twierdzenia uczniowie wyrażają swoje zdanie. Zgadzają się z twierdzeniem lub nie, ale zawsze swój wybór uzasadniają.

4. Pytania przekształcone w spojrzenie z odmiennej perspektywy

Pytanie pierwotne	*Pytanie przekształcone w spojrzenie z odmiennej perspektywy*
Jaki ułamek nazywamy niewłaściwym?	Dlaczego ułamek $\frac{3}{2}$ nazywamy niewłaściwym?

Każde z przekształconych pytań jest ciekawsze dla uczniów. Te przekształcone pytania obligują do myślenia i wymagają od uczniów uzasadnienia swoich opinii. Uczniowie swoją odpowiedz prezentują na forum klasy i dyskutują na jej temat, poprzez to uczą się od siebie. Inne przykłady pytań prowadzących do rozwoju myślenia u dziecka przedstawia infografika nr 9.



Infografika 9. Przykłady pytań poszukujących
Źródło: Opracowanie własne

Zadawanie przez nauczycieli odpowiednich pytań zwiększa interakcję uczniów, stwarza możliwości otrzymania wzajemnej informacji zwrotnej oraz promuje społeczne i emocjonalne uczenie się. Uczniowie powinni wiedzieć, że celem pytań jest wspieranie uczenia się, a nie tylko generowanie właściwych odpowiedzi.

Ważne są także te pytania, które zadają uczniowie. Są one skutecznym sposobem na zwiększenie zaangażowania uczniów w proces uczenia się oraz czerpania radości z nauki. Jednym ze sposobów uczenia dzieci zadawania pytań, jest pokazanie np. prostokąta (rzeczy z najbliższego otoczenia) i poproszenie o ułożenie przez nich jak największej ilości pytań na jego temat. Peter Liljedahl wyróżnił trzy rodzaje pytań stawianych przez uczniów. Są to tzw. „Pytania po sąsiedzku – uczeń zadaje je tylko dlatego, że nauczyciel akurat stoi obok, nie podniósłby ręki ani nie podszedł na drugi koniec sali, by zapytać o to samo. Pytania zatrzymujące myślenie, na przykład: *czy to będzie na sprawdzianie? Czy nasz wynik jest dobry?* Uczeń zadaje je, by móc bezpiecznie przestać myśleć. Pytania podtrzymujące myślenie, na przykład: *Czy na kolejnym poziomie zadania kwadrat ma powierzchnię 3×3 czy 4×4? Czy dobrze rozumiemy w poleceniu, że w tym zadaniu poborca podatkowy zawsze musi zabrać*

jakąś kwotę?”[87]. Najbardziej wartościowe wśród wymienionych pytań są te, które podtrzymują myślenie. Stawianie pytań przez uczniów jest uznawane obecnie za bardzo ważną umiejętność. Dziecko pyta, bo kieruje nim ciekawość poznawcza. Chcę zrozumieć omawiany przez nauczyciela materiał, a także zniwelować luki w wiedzy oraz aktywnie zaangażować się w proces nauczania-uczenia się. Generalnie pytania stymulują krytyczne myślenie, a także są pomocne przy łączeniu nowych informacji z posiadanymi już doświadczeniami.

Reasumując, należy stwierdzić, że pojęcie kultury matematycznej lokuje się na styku dydaktyki matematyki, filozofii matematyki, a także pedagogiki kultury. W literaturze przedmiotu[88] podkreśla się, że kultura matematyczna stanowi element szerzej rozumianej kultury intelektualnej i naukowej jednostki, a jej rozwój jest procesem wieloaspektowym i oczywiście długofalowym. Nie odnosi się ono wyłącznie do poziomu opanowania treści programowych, czyli na przykład znajomość podstawowych pojęć, twierdzeń i metod matematycznych. Obejmuje także umiejętność logicznego i krytycznego myślenia, rozwiązywania problemów, tworzenia i odkrywania nowych idei, a także doceniania piękna i znaczenia matematyki w nauce, sztuce i życiu codziennym. Kultura matematyczna ucznia wyraża się w świadomym operowaniu pojęciami, rozumieniu ich genezy oraz w umiejętności logicznego uzasadniania twierdzeń. A to oznacza przede wszystkim połączenie wiedzy proceduralnej i pojęciowej w spójną strukturę poznawczą. Kultura matematyczna przejawia się także w zdolności do samodzielnego konstruowania rozwiązań, a nie jedynie w reprodukcji algorytmów[89]. Kultura matematyczna obejmuje także określony system wartości, który stanowi fundament aksjologiczny (wartościujący) i kształtuje sposób postrzegania świata i rozwiązywania problemów. Kultura matematyczna to także umiejętność dostrzegania piękna w twierdzeniach, dowodach i strukturach matematycznych. „Matematyczne piękno jest estetyczną przyjemnością, która zazwyczaj wywodzi się z abstrakcyjności, czystości, prostoty, głębi lub uporządkowania matematyki. Matematycy często wyrażają tę przyjemność, opisując matematykę (lub przynajmniej pewien aspekt matematyki) jako piękną. Mogą również

[87] Podaję za Sułowska A., rozmowa z Peterem Liljedahlem, Od znudzenia do myślenia. Rozumowanie matematyczne,https://fde.org.pl/od-znudzenia-do-myslenia-rozumowanie-matematyczne/ (dostęp:16.01.2022).

[88] Zob. np. Makiewicz M., Model kultury matematycznej ucznia, [w:] Edukacja – Technika – Informatyka nr 4(26)/2018, s. 23–30; Duda, R. (1990). Dyskusja „Co to jest kultura matematyczna?”. Matematyka. Społeczeństwo. Nauczanie, 5, 2–4; Kotarbiński, T. (1970). Logika jako szkolny przedmiot pomocniczy. Ze szczególnym uwzględnieniem studiów humanistycznych. Studia Logika, XXVI, 99–112; Borovik, A.V., Mathematics for Makers and Mathematics for Users. In: Sriraman, B. (eds) Humanizing Mathematics and its Philosophy. Birkhäuser, 2017, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-61231-7_22; Ernest P., (ed.) The Philosophy of Matematics Education Today, Springer Cham, 2018, https://doi.org/10.1007/978-3-319-77760-3

[89] Zob. Polya G., tłum. Kubik L., Jak to rozwiązać, Warszawa 2012, s. 1–15.

opisywać matematykę jako formę sztuki (…) lub przynajmniej jako działalność twórczą” [90]. Bertrand Russell wyraził swoje poczucie matematycznego piękna, konstatując, że „Matematyka, właściwie rozumiana, posiada nie tylko prawdę, ale także najwyższe piękno - piękno zimne i surowe, jak rzeźba, bez odwołania się do żadnej części naszej słabszej natury, bez wspaniałych śladów malarstwa lub muzyki, a jednocześnie niezwykle czyste i zdolne do surowej doskonałości, jaką może pokazać tylko największa sztuka”[91]. Piękno w kulturze matematycznej przyjmowane może być jako użyteczność, praktyczność, funkcjonalność i zastosowanie. Coś jest piękne w matematyce, jeśli jest przydatne i skuteczne, jeżeli też pomaga rozwiązywać problemy i wykonywać zadania, ma znaczenie i wpływ na nasze życie i świat. Piękne np. mogą być twierdzenia, które mają szeroki zakres zastosowań w różnych dziedzinach nauki i techniki. Dla matematyków doznania estetyczne są równie ważne jak wiedza matematyczna. Piękno i siłę matematyki można poznać po jej prostocie. „Matematycy są na ogół zgodni co do tego, że prostota i piękno są ważne; nie ma też kłopotu z ich rozpoznaniem, gdy się je widzi[92]". Istnieją różne przykłady, kiedy matematyka staje się sztuką, na przykład fraktale (fot. nr 17).

[90] Woronowicz S., Czym jest piękno w matematyce? https://www.polityka.pl/tygodnikpolityka/spoleczenstwo/11067,1,czym-jest-piekno-w-matematyce.read, (dostęp:21.11.2020).
[91] Podaję za Ibidem.
[92] Hammond A.L., Matematyka nasza niedostrzegalna kultura, [w:] Matematyka współczesna. Dwanaście esejów, pod redakcją L. A. Stenna, Warszawa 1983, s. 36.



Fotografia 17. Choinkowy fraktal w chmurach

Fot. Małgorzata Turczyńska

Małgorzata Makiewicz, również zauważa piękno matematyki. Pisze, że „Piękno matematyki – to fenomen nie dla każdego uchwytny, dla niektórych niedostrzegalny. Niekoniecznie związany z codzienną użytecznością, raczej z harmonią, doskonałością. Piękno, którego można doświadczać na różnych poziomach”[93]. Twierdzi równie, że „estetykę matematyki można rozpatrywać na poziomie intelektualnym: zachwycać się matematycznymi badaniami i ich efektami w postaci klarownego dowodu, harmonijnej konstrukcji, błyskotliwego pomysłu, zastosowania wyjątkowo prostej metody do rozwiązania skomplikowanego zagadnienia”[94]. Umiejętność dostrzeżenia i docenienia elegancji rozwiązań, zapisów i rozumowań jest istotna dla rozwoju wyobraźni i może mobilizować do dalszych poszukiwań. W odróżnieniu od sztuki, w matematyce piękno posiada swego rodzaju uniwersalny charakter[95]. W ujęciu pedagogicznym system wartości przypisany kulturze matematycznej oznacza kształtowanie postawy wobec odpowiedzialności intelektualnej, szacunku, precyzji czy

[93] Makiewicz M, Widzialne i niewidzialne piękno matematyki, E-mentor, dwumiesięcznik Szkoły Głównej Handlowej w Warszawie, 2016, nr 4(66) s. 4.
[94]Makiewicz M., O fotografii w edukacji matematycznej. Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów, Szczecin 2013, s. 34.
[95] Pawlak R.J., Minimum edukacji matematycznej przyszłych nauczycieli. Kultura matematyczna, s. 59, https://dspace.uni.lodz.pl/xmlui/handle/11089/14496, (dostęp:26.11.2020).

prawdy. Dlatego kultura matematyczna nie jest tylko kompetencją techniczną, ale także postawą wobec wiedzy i sposobu jej uzasadniania.

Ponadto z perspektywy pedagogicznej kultura matematyczna oznacza nie tylko efekt kształcenia, ale również określony styl pracy nauczyciela oraz otwartość ucznia na zaistniały problem, gotowość do uzasadniania, dyskusji i refleksji. Należy podkreślić również to, że matematyka funkcjonuje w określonym kontekście społecznym i kulturowym, w którym rozwój technologii informacyjnych i sztucznej inteligencji, analiza danych oraz modele statystyczne sprawiają, że kultura matematyczna przyczynia się do świadomego uczestnictwa w życiu publicznym. Obejmuje ona umiejętność rozumienia modeli matematycznych, krytycznej interpretacji danych liczbowych oraz umiejętność oceny wiarygodności argumentów opartych na statystyce. Złożoność kultury matematycznej wynika z jej wielowymiarowej struktury, obejmującej między innymi elementy poznawcze, językowe, epistemologiczne, aksjologiczne czy społeczne. Stanowi ona nie tylko efekt procesu edukacyjnego, lecz także element szeroko rozumianej kultury intelektualnej człowieka. Jej rozwój wymaga integrowania nauczania pojęciowego z kształtowaniem umiejętności argumentacji, refleksji metapoznawczej, a także wrażliwości na estetyczny wymiar matematyki.

Na zakończenie niniejszego podrozdziału jeszcze raz przytoczę definicję, którą przyjęłam w swojej pracy. Kultura matematyczna uczniów to zbiór postaw, wartości i umiejętności, które kształtują podejście jednostki do matematyki oraz do rozwiązywania problemów matematycznych. Obejmuje ona sprawność matematyczną, język matematyczny, wyobraźnię przestrzenną, twórczość matematyczną oraz elegancję matematyczną. Wymienione komponenty zostaną szczegółowo opisane w kolejnym podrozdziale.

2.3. Komponenty kultury matematycznej

Zafascynowanie kulturą matematyczną można zaobserwować poza gronem matematyków, czytając dzieła wielu wybitnych filozofów, np. Immanuela Kanta czy Francisa Bacona. Fascynacja ta często wynikała z przekonania, że wszechświat jest napisany w języku geometrii i liczb. To oznacza, że matematyka jest postrzegana przez myślicieli jako uniwersalny język struktur i logicznego rygoru, który wykracza daleko poza ścisłe nauki przyrodnicze. Stąd ważne jest opisanie komponentów kultury matematycznej. Są one różnie nazwane. Ryszard J. Pawlak do podstawowych komponentów/składników kultury matematycznej zalicza język matematyki, wartości estetyczne, jakie niesie ze sobą matematyka, radość tworzenia i rozumienia faktów matematycznych, rolę historii matematyki, rolę wiedzy matematycznej

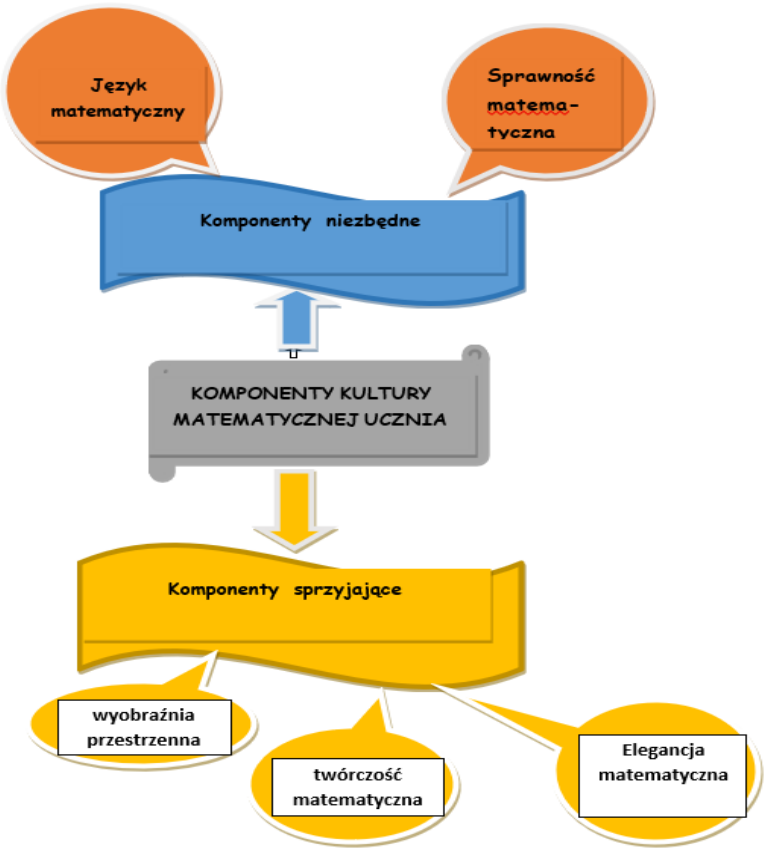
oraz wykorzystanie informatyki[96]. Według autora „Język matematyczny jest bez wątpienia ważnym składnikiem kultury matematycznej. Termin ten rozumiany jest bardzo szeroko, jako element porozumiewania się matematyków zarówno w sensie symboliki, jak też terminów oraz sposobu wypowiadania swoich myśli”[97]. Z kolei matematyczne wartości estetyczne są dla matematyka równie ważne, jak wiedza matematyczna. „Umiejętność dostrzeżenia i docenienia elegancji rozwiązań, zapisów i rozumowań jest niezbędna do pobudzenia wyobraźni, zmobilizowania się do dalszych poszukiwań. W odróżnieniu od sztuki, w matematyce piękno posiada swego rodzaju uniwersalny charakter”[98]. Kolejny element to radość tworzenia i rozumienia faktów matematycznych. Największą korzyścią, jaką uczniowie mogą odnieść z nauczania matematyki, jest radość ze zrozumienia oraz ponownego odkrycia pewnych faktów. Jak twierdzi Lipman Bers: "(…) tym, co sprawia, że matematyka jest jednak przyjemnym zajęciem, jest tych kilka minut, gdy nagle coś trafia na swoje miejsce i zaczynamy rozumieć. Wielcy matematycy mogą przeżywać takie momenty bardzo często. Gauss, jak to wskazują jego zapiski, miewał takie okresy, gdy w ciągu jednego dnia miał dwa lub trzy istotne błyski intuicji. Zwykli śmiertelnicy doświadczają tego bardzo rzadko. Niektórzy mogą to mieć tylko raz lub dwa razy w całym życiu. Ale cechą takiego przeżycia - ci, którzy doznali tego, potwierdzą - jest radość, której nie można porównać z żadną inną radością. Gdy po raz pierwszy poznajemy coś, mamy także tę radość”[99]. Następny komponent to rola, jaką odgrywa historia matematyki. Matematyka to dziedzina naukowa, która ma niewiarygodnie długą historią. Co może w pewnym sensie być przeszkodą w jej opanowaniu, ale też może pomóc nauczycielowi w doborze odpowiednich metod przekazu wiedzy matematycznej. „Znajomość historii matematyki umożliwia stosowanie zasady paralelizmu dydaktycznego, orzekającej, że uczeń rekapituluje proces uczenia się ludzkości. Zasada ta stanowi przeniesienie na grunt dydaktyki słynnego prawa biogenetycznego, orzekającego, że ontogeneza jest rekapitulacją filogenezy. Znajomość historii matematyki jest zatem bardzo ważnym elementem wykształcenia matematycznego, jakie powinien posiadać absolwent kierunku nauczycielskiego uniwersytetów”[100]. Jak konstatuje Ryszard J. Pawlak,

[96] Pawlak R.J., Minimum edukacji matematycznej przyszłych nauczycieli. Kultura matematyczna, ACTA UNIVERSITATIS LODZIENSIS FOLIA MATHEMATICA 6, 1993 s. 57, https://dspace.uni.lodz.pl/xmlui/bitstream/handle/11089/14496/fm6Ryszard%20J.%20Pawlak57_66.pdf?sequence=1&isAllowed=y (dostęp: 12.12.2024).
[97] Ibidem, s. 58.
[98] Ibidem, s. 59.
[99] Podaję za ibidem, s. 61.
[100] Pawlak R.J., Minimum edukacji matematycznej przyszłych nauczycieli. Kultura matematyczna…, op. cit., s. 62.

trudno mówić o kulturze matematycznej, gdy nie zna się dążeń i metod działania matematyków i to zarówno tych z przeszłości, jak też współczesnych. Ważny też jest komponent tzw. rola wiedzy matematycznej. Współczesna matematyka jest olbrzymim, potężnym i złożonym przedsięwzięciem. Dlatego nie jest możliwe przekazanie studentom, przyszłym nauczycielom całej wiedzy dotyczącej współczesnych osiągnięć matematycznych. „Świat matematyki rozwinął się z pojedynczej dyscypliny w grono splecionych przedmiotów nazywanych już zazwyczaj naukami matematycznymi. Do nauk tych poza dziedzinami z jądra, takimi jak teoria liczb, logika matematyczna, topologia różniczkowa i geometria algebraiczna, wchodzą także takie działy stosowane, jak: badania operacyjne, statystyka, informatyka, kombinatoryka i programowanie matematyczne. (…) Niewiele zostało takich terenów działalności intelektualnej człowieka, które nie byłyby jeszcze w istotnym stopniu kształtowane przez nauki matematyczne"[101]. Ostatnim komponentem jest wykorzystanie informatyki, czyli jej związków z kulturą matematyczną. Wykorzystanie komputerów zrewolucjonizowało spojrzenie na wiele problemów matematycznych.

Inną klasyfikację elementów kultury matematycznej zaprezentował Frantisek Kurina, czeski dydaktyk matematyki. Wyróżnił następujące komponenty: zdobycie sprawności matematycznej; zrozumienie ciągłego przejścia w poszczególnych dyscyplinach matematyki między matematyką-nauką i matematyką-przedmiotem nauczania; zrozumienie języka matematyki; umiejętność wybierania odpowiednich metod przy rozwiązywaniu zadań; posiadanie dobrej wyobraźni geometrycznej; opanowanie techniki obliczeń; opanowanie umiejętności przeprowadzania dowodów; opanowanie umiejętności wprowadzania pojęć; możliwości uprawiania w pewnym stopniu twórczości matematycznej; postrzeganie piękna matematyki[102]. Przedstawia je infografika nr 10.

[101] Ibidem, s. 64.
[102] Kurina F., Kultura matematyczna nauczyciela matematyki, „Matematyka. Społeczeństwo. Nauczanie" 1991, Nr 6, s. 30.



Infografika 10. Komponenty kultury matematycznej ucznia

Źródło: Opracowanie własne[103]

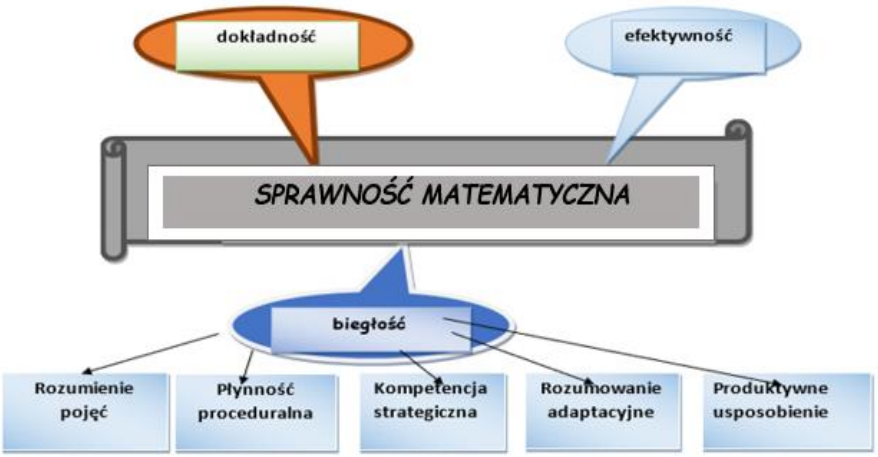
Z kolei Małgorzata Makiewicz twierdzi, że składniki kultury matematycznej obejmują różnorodne aspekty, które kształtują sposób, w jaki matematyka jest postrzegana i praktykowana. Wśród tych składników wyróżnia sprawność matematyczną, język matematyczny, wyobraźnię przestrzenną, twórczość matematyczną oraz elegancję matematyczną[104]. W swojej pracy będę opierać się na modelu M. Makiewicz[105], gdyż jest to model, który w sposób precyzyjny określa elementy kultury matematycznej ucznia. Przy czym język i sprawność matematyczna są warunkami koniecznymi kultury matematycznej ucznia. Natomiast wyobraźnia przestrzenna, twórczość i elegancja matematyczna - to warunki wspierające.[106].

[103] Opracowanie własne dokonane na podstawie publikacji M. Makiewicz, O fotografii w edukacji matematycznej. Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów, Szczecin 2013, s. 58.
[104] Makiewicz M., O fotografii w edukacji matematycznej. Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów, Szczecin 2013, s. 58.
[105] Ibidem
[106] Makiewicz M., O kulturze matematycznej ucznia. Eksterioryzacja wiedzy matematycznej za pomocą fotografii, Edukacja humanistyczna nr 2 (31), 2014, Szczecin 2014, s. 141-142.

Sprawność i język matematyczny, jako niezbędne komponenty kultury matematycznej, mają odzwierciedlenie w podstawie programowej z matematyki w klasach I-III. Określono w niej cele kształcenia, czyli zdobycie przez uczniów sprawności rachunkowej, wykonywanie nieskomplikowanych obliczeń w pamięci lub w działaniach trudniejszych pisemnie i wykorzystanie tych umiejętności w sytuacjach praktycznych oraz weryfikowanie i interpretowanie otrzymanych wyników i ocena sensowności rozwiązania[107]. Sprawność matematyczna, jak pisze M. Makiewicz, to umiejętność efektywnego wykorzystania wiedzy matematycznej do rozwiązywania problemów. Obejmuje ona nie tylko biegłość w podstawowych działaniach matematycznych, ale także umiejętność konstruowania i interpretowania argumentów matematycznych, rozumienia tekstu matematycznego, jasnego wypowiadania swoich myśli i poprawnego ich zapisywania[108]. Zakres sprawności matematycznych, które uczniowie klas 1-3 nabywają i rozwijają, są określone w podstawie programowej kształcenia ogólnego. Dotyczą one: rozumienia stosunków przestrzennych i cech wielkościowych oraz liczb i ich własności; posługiwania się liczbami; czytania tekstów matematycznych; rozumienia pojęć geometrycznych oraz stosowanie matematyki w życiu i innych obszarach edukacji. Sprawność matematyczną ucznia można oceniać na podstawie kilku kluczowych kryteriów, które współtworzą całościowy obraz zdobytych umiejętności i wiedzy. Należą do nich: poziom wiedzy i umiejętności - czyli stopień opanowania treści programowych z matematyki, znajomość podstawowych pojęć, wzorów, algorytmów i symboli matematycznych, a także umiejętność ich stosowania w zadaniach i ćwiczeniach: rodzaju aktywności - czyli sposobu w jaki uczeń wykorzystuje swoją wiedzę i umiejętności matematyczne, np. czy potrafi analizować, interpretować, porównywać, uogólniać, wnioskować, argumentować, tworzyć, modelować, komunikować, współpracować itp. oraz jakość pracy - czyli ocena poprawności, staranności, logiczności, kreatywności, oryginalności i estetyki rozwiązań i prezentacji matematycznych[109]. Sprawność matematyczną określa się jako „zespół trzech komponentów: dokładności, giętkości (biegłości) i efektywności, które mają zapewnić szybkie i poprawne liczenie, udzielanie odpowiedzi na pytania i rozwiązywanie zadań.

[107] Podstawa programowa kształcenia ogólnego z komentarzem, szkoła podstawowa, matematyka, https://www.ore.edu.pl/wp-content/uploads/2017/05/matematyka.-pp-z-komentarzem.-szkola-podstawowa-1.pdf, (dostęp: 21.11.2020).
[108] Makiewicz M., O kulturze matematycznej ucznia. Eksterioryzacja wiedzy matematycznej za pomocą fotografii, Edukacja humanistyczna nr 2 (31), 2014, Szczecin 2014, s. 141-143.
[109] Podstawa programowa kształcenia ogólnego…, op. cit.

Tak rozumiana - określa bowiem poziom obycia matematycznego, rozumienia pojęć, ich własności i pewnych związków zachodzących pomiędzy nimi”[110]. Elementy składowe sprawności matematycznej prezentuje infografika nr 11.



Infografika 11. Elementy sprawności matematycznej

Źródło: Opracowanie własne

Biegłość/giętkość matematyczna to umiejętność elastycznego i kreatywnego myślenia matematycznego, wykorzystywania różnych strategii i metod rozwiązywania problemów, adaptowania się do zmieniających się sytuacji i warunków, a także poszukiwania nowych i lepszych rozwiązań. Biegłość/giętkość jest jednym z aspektów sprawności rachunkowej i obejmuje także rozumienie pojęć, płynność proceduralną, kompetencję strategiczną, rozumienie adaptacyjne i usposobienie produktywne. „Biegłość (giętkość) matematyczna polega na: rozumieniu pojęć, operacji na nich wykonywanych i powiązań występujących między nimi (rozumienie pojęciowe); zastosowaniu odpowiedniej metody do rozwiązania problemu w określonym czasie i z należytą dokładnością wykonania obliczeń (płynność proceduralna); umiejętność formułowania, przedstawiania i rozwiązywania problemów matematycznych (kompetencja strategiczna); zdolność do logicznego myślenia, refleksji, wyjaśnia-

[110] M. Makiewicz,, O kulturze matematycznej ucznia. Eksterioryzacja wiedzy matematycznej za pomocą fotografii, Edukacja humanistyczna nr 2 (31), 2014**,** Szczecin 2014, s. 143 -144.

nia i uzasadniania (rozumowanie adaptacyjne); naturalna skłonność do postrzegania matematyki jako czegoś rozsądnego, użytecznego i wartościowego (produktywne usposobieni/nastawienie)”[111]. Biegłość matematyczna nie jest cechą jednowymiarową i nie można jej osiągnąć, koncentrując się tylko na jednym jej komponencie. Biegłość z matematyki zdobywa się stopniowo, z czasem. Na przykład uczniowie trzeciej klasy szkoły podstawowej powinni lepiej radzić sobie z dodawaniem liczb całkowitych niż w pierwszej klasie.

Dokładność, to następna cecha sprawności matematycznej, która odnosi się do porównywania dokonywanych obliczeń z wartościami rzeczywistymi lub zaplanowanymi. Im mniejsza różnica, tym występuje większa dokładność. Kolejna cecha sprawności matematycznej to efektywność, czyli uzyskanie zamierzonego efektu przy optymalnym wykorzystaniu czasu i zasobów posiadanych przez ucznia.

Ważnym elementem biegłości matematycznej są kompetencje matematyczne. Są to zdolności danej jednostki do stosowania matematycznych sposobów myślenia (myślenia logicznego i przestrzennego) oraz prezentacji w postaci wzorów, modeli, konstrukcji, wykresów czy tabel[112]. Obejmują umiejętność rozwijania i wykorzystywania myślenia matematycznego w celu rozwiązywania problemów wynikających z codziennych sytuacji, z naciskiem na proces, działanie i wiedzę[113]. Kompetencje matematyczne określa podstawa programowa kształcenia ogólnego w obszarze poznawczym rozwoju ucznia. Należą do nich: refleksyjne, logiczne, krytyczne i twórcze myślenie, rozumienie podstawowych pojęć i działań matematycznych, samodzielne korzystanie z nich w różnych sytuacjach życiowych, wstępna matematyzacja wraz z opisem tych czynności: słowami, obrazem, symbolem, stawianie pytań, dostrzeganie problemów, zbieranie informacji potrzebnych do ich rozwiązania, planowanie i organizacja działań, a także rozwiązywanie problemów, czytanie prostych tekstów matematycznych, np. zadań tekstowych, łamigłówek i zagadek, symboli[114].

---

[111] Milgram J., Zakresy biegłości matematycznej, https://www.nap.edu/read/9822/chapter/6 (dostęp: 23.11.2020).

[112] Zob. Zalecenie Rady z dnia 22 maja 2018 r. w sprawie kompetencji kluczowych w procesie uczenia się przez całe życie, Dz. Urz. UE C 189 z 4.6.2018, s. 9,https://eur-lex.europa.eu/legal-content/PL/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604(01), (wersja na dzień:18.04.2021).

[113] Moduł 1. Osiem kluczowych kompetencji - Eduspaces (szkolazklasa.org.pl), https://eduspaces.szkolazklasa.org.pl/osiem-kluczowych-kompetencji/, (dostęp: 28.12.2023r.).

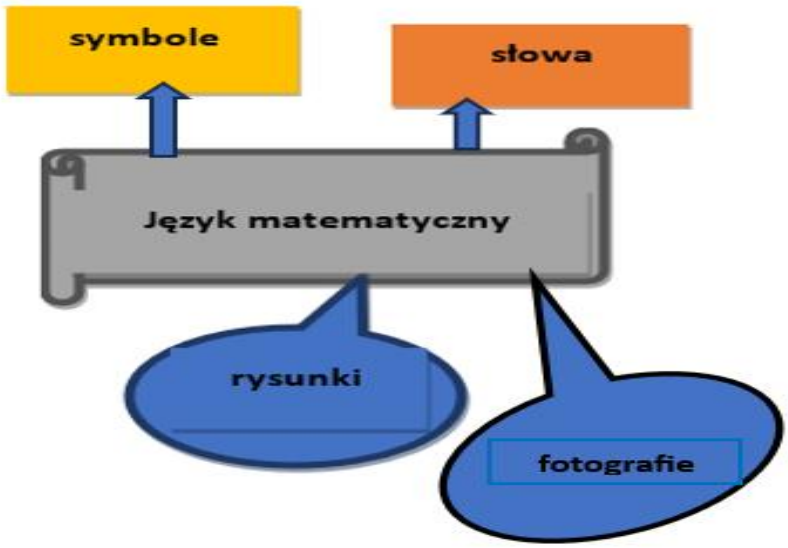
[114]Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 14 lutego 2017 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym, kształcenia ogólnego dla branżowej szkoły I stopnia, kształcenia ogólnego dla szkoły specjalnej przysposabiającej do pracy oraz kształcenia ogólnego dla szkoły policealnej, Dz.U. 2017 poz. 356, https://isap.sejm.gov.pl/isap.nsf/DocDetails.xsp?id=wdu20170000356, (dostęp: 06.11.2020).

Reasumując, „Zdobycie sprawności matematycznej jest niemożliwe bez dysponowania choćby minimum zręczności i znajomości faktów. Jest również niezbędne, by wiedzieć jak zastosować je przy sprzyjającej sposobności”[115].„Matematyczna sprawność powinna być na takim poziomie, by jej zastosowanie w prostych przypadkach mogło być wykonane mechanicznie. Środkiem dla spełnienia tego żądania jest poświęcenie kształceniu sprawności matematycznej odpowiedniej uwagi i czasu”[116]. Zakres sprawności matematycznych, które uczniowie klas 1-3 nabywają i rozwijają, powinien być zgodny z treściami nauczania z edukacji matematycznej z podstawą kształcenia ogólnego i dotyczyć: rozumienia stosunków przestrzennych i cech wielkościowych oraz liczb i ich własności; posługiwania się liczbami; czytania tekstów matematycznych; rozumienia pojęć geometrycznych oraz stosowanie matematyki w życiu i innych obszarach edukacji[117].

Kolejny komponent kultury matematycznej to język matematyczny. Tak jak inne języki czerpie swoje słownictwo z języka polskiego i innych alfabetów, ale zawiera również symbole zarezerwowane tylko do matematyki. „Zdolność do opanowania tego języka i do posługiwania się nim jest równie stara, jak naturalne predyspozycje człowieka do komunikowania się z innymi przedstawicielami swojego gatunku, będące warunkiem przetrwania i funkcjonowania w ludzkiej społeczności. Już w średniowieczu matematykę, reprezentowaną przez arytmetykę, geometrię, muzykę i astronomię, zaliczano do „siedmiu umiejętności godnych człowieka wolnego”. Dziś jest to bardziej aktualne niż kiedykolwiek”[118]. „Tak jak większość współczesnych języków matematyka ma postać ustną i pisemną, i może być zarówno traktowana formalnie, jak i nieformalnie. Tak, jak dla wszystkich języków służy przede wszystkim do komunikowania i porozumiewania się. Tak jak wszystkie języki, nie tylko opisuje pojęcia, ale pomaga je formować i wykształcać w umysłach jej użytkowników. Tak jak wszystkie języki, matematyka ma swoje charakterystyczne cechy. To znaczy, (…) że matematyka jest podobna do języka dlatego, że po prostu jest językiem, takim jak każdy

[115] Kurina F., Kultura matematyczna nauczyciela matematyki, https://smp.uph.edu.pl/msn/6/30-32.pdf, (dostęp: 21.11.2020).
[116] Ibidem
[117] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 14 lutego 2017 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym, kształcenia ogólnego dla branżowej szkoły I stopnia, kształcenia ogólnego dla szkoły specjalnej przysposabiającej do pracy oraz kształcenia ogólnego dla szkoły policealnej, Dz.U. 2017 poz. 356, https://isap.sejm.gov.pl/isap.nsf/DocDetails.xsp?id=wdu20170000356, (dostęp: 06.11.2020).
[118]Matematyka to wspólny język ludzi i przyrody https://www.earlymath.pl/matematyka-to-wspolny-jezyk-ludzi-i-przyrody1/matematyka-to-wspolny-jezyk-ludzi-i-przyrody(dostęp: 06.11.2020).

inny język”[119]. Charakteryzuje się on pewnymi specyficznymi cechami, odróżniającymi go zarówno od potocznego używanego na co dzień, jak i stosowanego w wielu innych naukach. „W języku matematyki – gotowej teorii – zwracają uwagę trzy składniki tego języka: symbole, słowa, fotografie lub rysunki. Elementy te powinny być wykorzystane w kształtowaniu języka matematyki rozumianego jako działalność i aktywność. Język symboliczny spełnia dwie istotne funkcje - umożliwia bardzo krótkie zapisanie zdania, natomiast w toku działalności matematycznej służy do przetwarzania lub wykorzystania wyrażonych w nim informacji. Symbolika matematyczna jest użyteczna wówczas, gdy jest operatywnym instrumentem w rozwiązywaniu różnych zagadnień. Symbole matematyczne, tak jak litery i inne znaki, tworzą pisany język matematyki”[120]. W poniższej infografice nr 12 zaprezentowane zostały elementy języka matematycznego.



Infografika 12. Elementy języka matematycznego

Źródło: Opracowanie własne

Uczeń od pierwszych dni nauki powinien posługiwać się poprawnym językiem matematycznym. Słownik matematyczny dziecka składa się ze słów, które określają: przedmioty bądź ich własności, na przykład kolor, grubość, długość i tym podobne. Czynności dokonywane na tych przedmiotach to klasyfikowanie, przyporządkowywanie, odwzorowywanie

[119] Usiskin Z., Matematyka jako język, tłumaczenie oryginału z Communica tion in Mathematics, K -1 2 a n d B ey o n d , NCTM 1996 Yearbook, http://mathsiedlce.edu.pl/attachments/article/24/020_Usiskin_Z.pdf, (dostęp: 11.11.2020).
[120] Ibidem

zbiorów, porządkowanie zbioru, relacje określane w zbiorach, czyli zawieranie się zbioru w zbiorze, równoliczność zbiorów, równość, mniejszość, itp. Kolejno pojawiają się nazwy liczb. Z punktu widzenia liczby elementów należących do zbioru, każdy z nich może być reprezentowany przez odpowiedni klocek. Od tego momentu wszystkie operacje, które poprzednio były wykonywane w zbiorze kolorowych klocków oraz na zbiorach innych przedmiotów, są tłumaczone na język liczb i działań na liczbach. Następne to operacje, które dotyczą symboli dodawania (+), odejmowania (-), mnożenia (x) i dzielenia (÷). Inne symbole związane są z równościami i nierównościami. Przedstawia je infografika nr 13.



Infografika 13. Symbole wykorzystywane do podstawowych operacji matematycznych

Źródło: Opracowanie własne

Język matematyczny jest najważniejszym koniecznym elementem kultury matematycznej, nie tylko w klasach I-III szkoły podstawowej, ponieważ dzięki niemu uczniowie mogą m.in rozwijać sprawność matematyczną. Pomaga on również rozwijać umiejętności logicznego myślenia, rozwiązywania problemów i komunikowania się za pomocą fotografii, wyrażeń, rysunków i symboli. „W matematyce wolimy pismo niż mowę, ponieważ znaki pisemne przekazują myśli matematyczne lepiej i dokładniej i powodują mniej nieporozumień. Nie ma to nic wspólnego z tym, czy ktoś jest wzrokowcem, czy też nie”[121]. „Język mówiony

[121] Usiskin Z., Matematyka jako język, tłumaczenie oryginału z Communication in Mathematics, K -1 2 a n d B ey o n d , NCTM 1996 Yearbook,http://mathsiedlce.edu.pl/attachments/article/24/020_Usiskin_Z.pdf, , (dostęp: 21.11.2020).

matematyki jest potrzebny do posługiwania się ze zrozumieniem pojęciami matematycznymi”[122]. Język słowny matematyki jest zbliżony do języka naturalnego. Zawiera on jednak pewne zwroty i wyrażenia specyficzne, których znaczenie w matematyce jest zupełnie inne niż w języku potocznym, bądź które w języku naturalnym nie są spotykane”[123]. Język symboliczny jest ściśle związany z językiem słownym.

Język matematyczny, to nie tylko słowa i symbolika, ale również fotografie i rysunki. „Opanowanie przez uczniów, zarówno bierne, jak i czynne, języka matematyki (…) pozwala na wypowiadanie swoich myśli w sposób przejrzysty, precyzyjny. Umożliwia porozumiewanie się na lekcjach matematyki zarówno uczniów między sobą, jak również nauczyciela z uczniami. Bez dobrze wykształconego języka matematyki nie można w pełni komunikować się w zakresie matematycznych problemów. Z tych powodów aktywne kształtowanie poprawnego języka matematycznego przez właściwe, racjonalne używanie symboli i schematów matematycznych, poprawne wykonywanie zapisów przy rozwiązywaniu zadań, korygowanie wypowiedzi uczniów, ocenianie użytych przez nich sformułowań jest jednym z najważniejszych ogólnych celów nauczania matematyki”[124]. Nauczanie języka matematycznego powinno odbywać się w powiązaniu z otaczającą rzeczywistością. „Nie chodzi tu o sztuczne wiązanie terminów matematycznych z otaczającymi nas przedmiotami, lecz o świadome używanie języka matematycznego wszędzie tam, gdzie matematyka ingeruje w naszą rzeczywistość, znajduje zastosowanie oraz może pomóc w interpretowaniu rzeczywistości”[125]. Istotną i pierwszoplanową rolę odgrywa tu fotoedukacja, którą szczegółowo opiszę w kolejnym podrozdziale. Używanie więc języka matematycznego poza szkołą stwarza doskonałe warunki do uczenia się matematyki.

Kolejnym elementem kultury matematycznej jest wyobraźnia. Jest ona komponentem wspomagającym. Problematyką wyobraźni i wyobrażeń zajmował się w ramach teorii poznania Arystoteles. Jest wiele definicji wyobraźni. Oto niektóre z nich. Według definicji *Słownika języka polskiego,* „wyobraźnia to zdolność do tworzenia wyobrażeń twórczych, przewidywania, uzupełniania i odtwarzania oraz zdolność przedstawiania sobie zgodnie

https://www.nlk.gov.pl/pnk/?id=19330,vp.21938.pdf

[122] Usiskin Z., Matematyka jako język, tłumaczenie oryginału z Communication in Mathematics, K -1 2 a n d B ey o n d , NCTM 1996 Yearbook, http://mathsiedlce.edu.pl/attachments/article/24/020_Usiskin_Z. (dostęp: 21.11.2020).

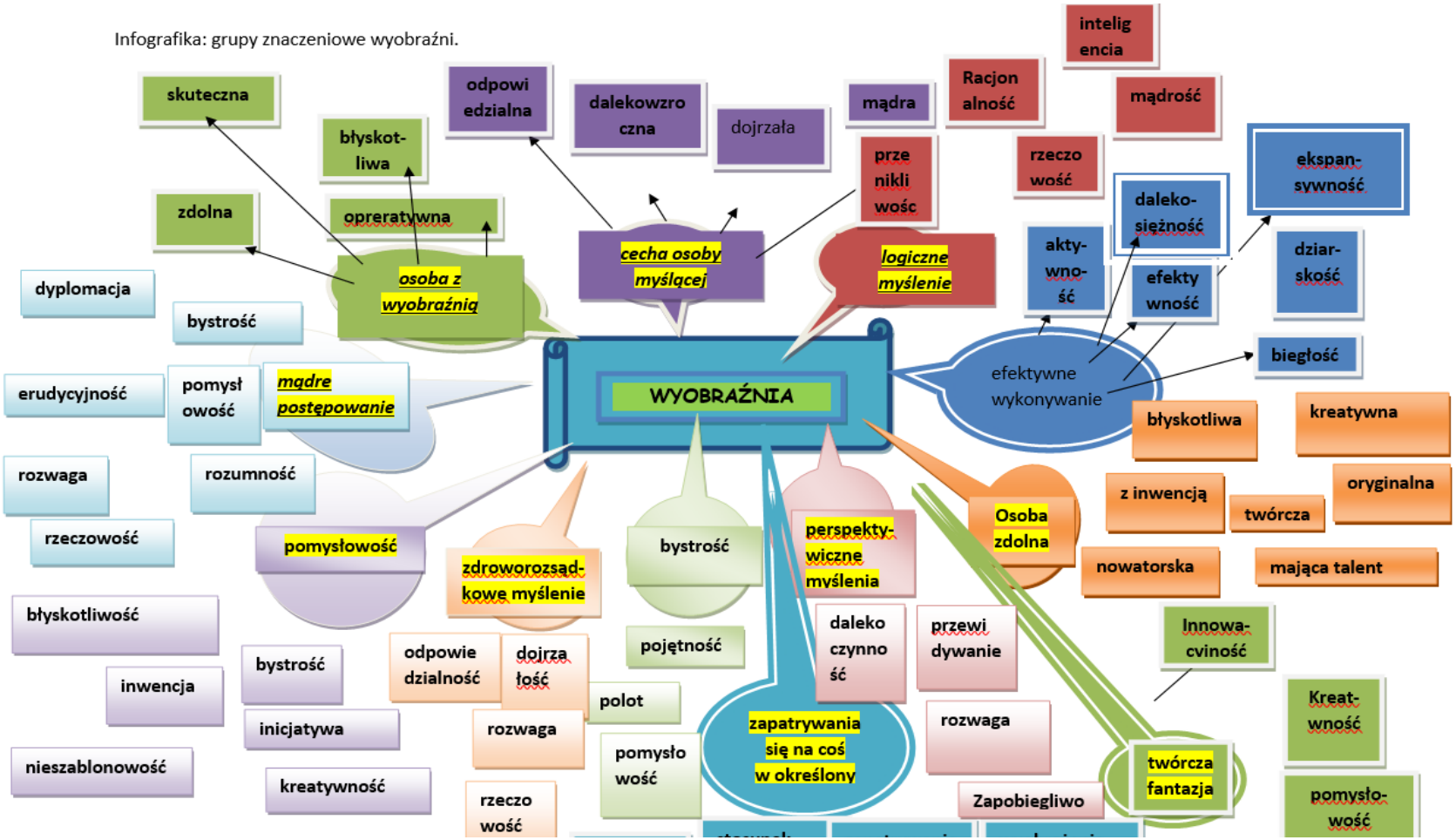
[123] Dąbrowa M., Specyfika tekstu matematycznego i jego lektury, Zeszyty naukowe Małopolskiej Wyższej Szkoły Ekonomicznej w Tarnowie , T. 18, nr 1/2011, s.162, file:///C:/Users/SZKOLA~1/AppData/Local/Temp/159-170.pdf, (dostęp:21.11.2020).

[124] Makiewicz M., Opinia w przedmiocie diagnozy problemów związanych z procesem nauczania matematyki w szkole (począwszy od IV klasy szkoły podstawowej) wraz z odpowiednimi rekomendacjami, s.2, , (dostęp: 21.11.2020).

[125] Pawlak R.J., Minimum edukacji matematycznej przyszłych nauczycieli. Kultura matematyczna, s.59…, op. cit.

z własną wolą sytuacji, osób, przedmiotów, zjawisk itp. nie widzianych dotąd; fantazja, imaginacja"[126]. Wyobrażenia natomiast definiowane są jako „wytworzony w świadomości obraz przedmiotu lub sytuacji, które w danej chwili nie oddziałują na narządy zmysłowe człowieka, opierający się na uprzednio poczynionych spostrzeżeniach i fantazji; gdy mają charakter wspomnieniowy, są to wyobrażenia odtwórcze; gdy dotyczą treści nierzeczywistej, bez charakteru wspomnieniowego, określane są jako twórcze lub fantazyjne”[127]. Wyobraźnia ma wiele synonimów. Można je podzielić na grupy znaczeniowe. Najważniejsze elementy poszczególnych grup znaczeniowych przedstawia poniższa infografika nr 14.

[126] Szymczak M., Słownika języka polskiego, 1981, t. III, s. 826
[127] Ibidem



Infografika 14. Grupy znaczeniowe wyobraźni

Źródło: opracowanie własne

Wyobraźnia jest procesem psychicznym, umożliwiającym przetwarzanie wyobrażeń. „Proces, w którym następuje przekodowywanie informacji zapisanej w kodzie obrazowym, może przyjmować postać izomorficzną lub transmorficzną. Postać izomorficzna to sytuacja, gdy przekształcenia zachodzą w obrębie tej samej modalności zmysłowej, na przykład wzrokowej, słuchowej. Postać transmorficzna to zachodzenie przekształceń między modalnościami i gdy mogą występować jedno- lub wielokrotne przekształcenia reprezentacji obiektu, obiektów i relacji między nimi”[128]. Bez względu na to czy przekształcenie ma charakter izomorficzny, czy transmorficzny, wyobrażenia mają następujące cechy : „ wysoki stopień podobieństwa pomiędzy realnym obiektem a obrazem konstruowanym w wyobraźni; świadomość, iż obiektu będącego przedmiotem wyobrażenia nie ma w danym momencie w zasięgu zmysłów; mniejsza wyrazistość obrazu, jego niestabilność, pulsowanie, słabsze nasycenie barw; pierwszoplanowy obiekt wyobrażenia, na przykład melodia, zapach, postać, jest bardziej wyeksponowany niż towarzyszące tło”[129]. Wymienione cechy pokazują, że do pobudzenia wyobraźni i zapoczątkowania wyobrażeń niezbędna jest intencja. Wyobraźnia, jeśli charakteryzowana jest pod kątem form operacji wyobrażeniowych, dotyczy w większości wykonywanych w kodzie ikonicznym i odnosi się więc do wyobraźni wizualnej. „Metaforycznie możemy powiedzieć, że wyobraźnia służy do odgrywania w umyśle scen, tworzenia „teatru w umyśle"[130].

Wyobraźnia matematyczna pozwala na lepsze rozumienie i orientację w otaczającym świecie, a także na rozwijanie kreatywności i twórczego myślenia i według których wiedza o przestrzeni kształtuje się w umyśle dziecka”[131]. „Im człowiek jest bogatszy w wyobrażenia związane z matematyką (przestrzenne, liczbowe, algebraiczne) tym lepiej w dziedzinie matematyki daje sobie radę z rozwiązywaniem problemów”[132]. „Wyobraźnia pomaga w łagodnym przejściu od działania opartego na zmysłach do swobodnego operowania obrazem, informacją, pojęciem. Pozwala odejść od zależności w stronę niezależności i samodzielności z wyobrażaniem oraz

[128] Iskierka I., Kształtowanie wyobraźni przestrzennej poprzez modelowanie i animacje 3D, https://repozytorium.ur.edu.pl/handle/item/2508, (dostęp:20.04.2020).
[129] Zdankiewicz-Scigala E., Maruszewski T., Wyobrażenia jako pierwsza forma doświadczenia generowanego przez jednostkę,https://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:nfbb_2T5xrIJ:https://bg.uwb.edu.pl/ekopie/archiwum/k00468_2.doc+&cd=1&hl=pl&ct=clnk&gl=pl&client=firefox-b-d,(dostęp:20.042020).
[130] Ibidem
[131]Gruszczyk-Kolczyńska E., Zielińska E., Dziecięca matematyka, Edukacja matematyczna dzieci w domu, w przedszkolu i szkole, drugi tom w serii „Edukacja matematyczna dzieci”, *Warszawa* 1997, s.13.
[132] Krygowska A.Z., Zarys dydaktyki matematyki, część 2, Warszawa1977, s. 57.

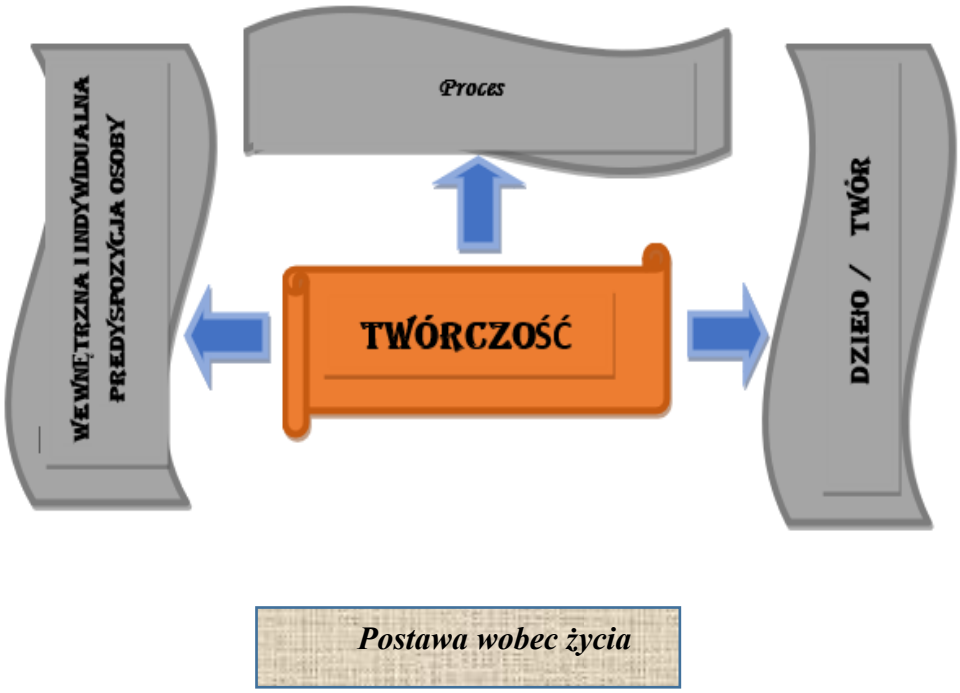
przewidywaniem konsekwencji podejmowanych działań. Wyobraźnia rozwija myślenie w zakresie tworzenia i planowania, pomaga przenieść się w czasie i przestrzeni”[133].

Każdy nauczyciel może prowokować uczniów do podejmowania wyzwań, zadań twórczych, inspirować ich do samodzielnych poszukiwań, eksperymentów, stawiać przed nimi problemy, motywować do ich rozwiązywania. Wyobraźnia kształtuje się także poprzez zabawę, swobodne i nieskrępowane działania, które stymulują pracę obu półkul mózgowych, w tym rozwijają myślenie za pomocą obrazów oraz intuicję. W praktyce edukacyjnej nie brakuje sytuacji, w których uczeń może rozwijać własną kreatywność przy założeniu, iż nauczyciel akceptuje i rozumie zachowania swoich podopiecznych. Kształtowaniu wyobraźni sprzyjają też mnemotechniki, czyli takie sposoby uczenia się, które ułatwiają zapamiętywanie, przechowywanie i odtwarzanie zapamiętanych informacji. Wykorzystywane w nich rymowanki, pantomima, teksty opowiadań, mapy mentalne, ruch i kolor uaktywniają tworzenie wyobrażeń i ułatwiają zapamiętywanie. W rozwoju wyobraźni matematycznej istotną funkcję pełnią gry dydaktyczne. Wprowadzenie różnych zagadnień za ich pomocą spowoduje, że dzieci nie zorientują się, że się uczą. Pomocne mogą być też zabawy, dzięki którym można przekazać dzieciom wiedzę w przyjemny sposób. Nie będzie kształtowania wyobraźni bez dobrego rozumienia pojęć, które powodują lepsze zapamiętywanie i wykorzystanie wiedzy w praktyce oraz wsparcia i motywowania podopiecznych przez nauczyciela do bycia twórczym. Zatem włączenie wyobraźni w proces nauczania/uczenia się od najmłodszych lat jest zgodne z ideą edukacji dla przyszłości[134]. Jest również ważna dla każdego, kto chce zrozumieć i korzystać z matematyki w codziennym życiu.

Następnym komponentem wspomagającym kulturę matematyczną jest twórczość matematyczna. Pojęcie twórczości jest pojęciem wieloznacznym i złożonym, używanym w wąskim lub szerokim zakresie. Zawsze związane jest z aktywnością, samodzielnością, kreatywnością, działaniem. Dla niektórych, kreatywność jest synonimem twórczości. Krzysztof J. Szmidt uważa, że „kreatywność to zdolność człowieka do w miarę częstego generowania nowych i wartościowych wytworów (rzeczy, idei, metod działania itd.)”[135]. Z kolei Wincenty Okoń twierdzi, że twórczość to „proces działania ludzkiego, dający nowe i oryginalne wytwory oceniane w danym czasie jako społecznie wartościowe; może przejawiać się w każdej dziedzinie działalności ludzkiej”[136]. Bogdan Suchodolski konstatuje, że twórczość to „pewna postawa wobec życia

[133] Skałbania R., Rola wyobraźni we wczesnej edukacji – wychowanie do transgresji innowacji, [w:] Science Bulletin of Chełm. Section of Pedagogy, s. 79-80.
[134] Skałbania B., Rola wyobraźni we wczesnej edukacji – wychowanie do transgresji innowacji…, op. cit., s. 80.
[135] Szmidt K.J.,, Pedagogika twórczości, Gdańsk 2007, s. 53.
[136] Okoń W., Słownik pedagogiczny, Warszawa 1992, s. 218.

mająca, swój wyraz w umiejętności samodzielnego myślenia i rozwiązywania nieznanych problemów i zadań; występuje tam, gdzie powstają nowe jakości i wartości będące wynikiem osobistych działań i poszukiwań”[137]. Inną definicję podaje Włodzimierz Szewczuk. Jego zdaniem twórczość to „działalność człowieka, której efektem jest wzbogacenie sposobów życia człowieka, jego poznania rzeczywistości – także samego siebie, wzbogacenie świata kultury w najszerszym tego słowa znaczeniu”[138]. Stanisław Popek definiuje twórczość jako „proces prowadzący do powstania nowego dzieła, uznanego przez pewną grupę ludzi jako zadowalające lub użyteczne w określonym czasie”[139]. Jak wynika z powyższych definicji, twórczość jest pojęciem używanym w bardzo wielu kontekstach. Przedstawia je infografika nr 15.



Infografika 15. Konteksty rozpatrywania twórczości

Źródło: Opracowanie własne

Na potrzeby niniejszej pracy przyjmuję własną definicję twórczości – to proces stymulowany przez środowisko zewnętrzne, w którym powstaje dzieło/wytwór dzięki indywidualnym predyspozycjom jednostki.

[137] Suchodolski B., Pedagogika. Podręcznik dla kandydatów na nauczycieli, Warszawa 1980, s. 535.
[138] Szewczuk W., Słownik psychologiczny, Warszawa 1985, s. 327.
[139] Popek S., Twórczość artystyczna w wychowaniu dzieci i młodzieży, Warszawa 1985, s. 30.

Twórczość w procesie edukacyjnym odgrywa ważną rolę i połączona jest z procesem myślenia. Myślenie twórcze zwane jest też myśleniem dywergencyjnym. „Myślenie twórcze, zdaniem Roberta Fishera, daje uczniowi władzę nad uczeniem się”[140]. Psychologowie twórczości uważają, że „to taka forma inteligencji, którą można ćwiczyć i rozwijać jak każdą inną postać myślenia. I to nie w drodze zabaw rzeczami, nie przypadkowo i na los szczęścia, ale […] dzięki poważnej i uporczywej pracy na każdym polu”[141]. Należy więc ją kształcić i promować już od przedszkola. Potrzeba twórczości wynika ze społecznych źródeł – dzięki kreatywności w czasach wielkiego bezrobocia, cecha ta może pomóc wypełniać życie ludzkie, może zmienić styl życia.”[142]. Jest ona podstawowym warunkiem zdrowia psychicznego oraz ważnym czynnikiem rozwoju - rozwija drzemiące w jednostkach możliwości, jest drogą do samorealizacji. Pomaga ona w uzyskiwaniu lepszych rezultatów uczenia się. Bez niej nie można osiągnąć sukcesu. Wyżej wymienione komponenty świadczą o wielkiej roli twórczości, dlatego powinniśmy ją rozwijać, gdyż drzemie ona w każdym dziecku, w różnym stopniu.

Zagadnienia związane z twórczością matematyczną dziecka są niezmiernie ważne ze względu na funkcje jakie spełniają w rozwoju każdej jednostki, w zakresie: „poznawania, przeżywania, motywacji do działania, wartościowania i samooceny, samoświadomości, samorealizacji i kreacji, terapii (dynamicznej harmonii osobowości) oraz uspołecznienia”[143].„Twórczość dzieci wpływa na ich rozwój. Warunkuje w dużym stopniu ich funkcjonowanie w dalszym, dorosłym życiu w sytuacjach społecznych, zawodowych i osobistych[144]. Zdaniem Roberta J. Sternberga „każdy człowiek może być twórczy, jeżeli podejmie taką decyzję i zacznie działać w kierunku rozwijania własnej twórczości. Z przesłanek tych wynika, że nauczyciel powinien nie tylko tworzyć warunki, w których dzieci mogłyby myśleć krytycznie i działać twórczo, ale przede wszystkim nauczyciel powinien pomagać dziecku podejmować decyzje dotyczące stawania się twórczą jednostką”[145]. Jeżeli nauczyciel nie stworzy dziecku w podatnym dla niego

[140]Fiszer R., [w:] Z. Kwieciński, B. Śliwerski, Pedagogika 2, podręcznik akademicki, Warszawa 2004, s. 181.
[141] Fisher R., Uczymy, jak się uczyć, tłum. K. Kruszewski, Warszawa 1999, s. 90-91.
[142] Uszyńska-Jarmoc J., Twórcza aktywność dziecka, teoria -rzeczywistość-perspektywy rozwoju, Białystok 2003, s.182
[143]Popek S., Aktywność twórcza dzieci i młodzieży, Warszawa 1988, s. 33.
[144]Uszyńska – Jarmoc J., Twórcza aktywność dziecka, teoria -rzeczywistość-perspektywy rozwoju, Białystok 2003, s. 195.
[145] Podaję za Uszyńska – Jarmoc J., Podróże, skarby, przygoda. Podręcznik i program rozwijania twórczości, samoświadomości oraz dyspozycji autokreacyjnych dzieci klas I–III, Białystok 2005, s. 33.

okresie na twórczość odpowiedniego środowiska, to jego potencjał maleje. Zbigniew Pietrasiński[146] uważa, że straty te są nie do odrobienia lub mogą być co najwyżej odbudowywane w procesie „reedukacji twórczej[147].

Twórczość w edukacji matematycznej uczniów klas I-III dotyczy różnych form aktywności. Należą do nich np. wykonywanie fotografii czy lapbooków-książek tematycznych (używa się również określenia „książki na kolanach").

Tworzenie lapbooków stanowi niezwykle skuteczny sposób na rozwijanie twórczości matematycznej uczniów, ponieważ angażuje ich w proces kreatywnego przetwarzania i strukturyzowania wiedzy. Jak wskazuje J. Bruner w swojej teorii konstruktywistycznej, proces uczenia się jest najbardziej efektywny, gdy uczeń samodzielnie konstruuje własne struktury poznawcze, przechodząc od działania manualnego do reprezentacji ikonicznej i symbolicznej[148]. Projektując własną teczkę tematyczną, dziecko przestaje być jedynie biernym odbiorcą gotowych definicji, a staje się autorem i architektem przestrzeni matematycznej. Proces ten zmusza młodego człowieka do samodzielnego poszukiwania oryginalnych sposobów na zwizualizowanie trudnych, abstrakcyjnych pojęć za pomocą ruchomych elementów, takich jak koperty, harmonijki czy obracające się koła. Taka manualno-koncepcyjna aktywność doskonale stymuluje wyobraźnię przestrzenną oraz zmusza do nieszablonowego myślenia, co wpisuje się w postulowaną przez E. P. Torrance'a koncepcję myślenia dywergencyjnego jako fundamentu ludzkiej kreatywności[149]. Uczeń, stojąc przed zadaniem zaplanowania interaktywnych skrytek, musi sam podjąć decyzję o logicznym i estetycznym rozmieszczeniu poszczególnych zagadnień, co rozwija jego kompetencje metaponadpoznawcze. Ponadto, w świetle psychologii humanistycznej, praca nad lapbookiem naturalnie łączy myślenie logiczne z ekspresją artystyczną, dając dziecku pełną autonomię w doborze metafor wizualnych. Buduje to u niego poczucie sprawstwa – kluczowe w teorii samodeterminacji E. Deci i R. Ryana – oraz wzmacnia motywację wewnętrzną do zgłębiania wiedzy[150]. W rezultacie, dzięki personalizacji procesu uczenia się, matematyka przestaje być postrzegana przez pryzmat sztywnych reguł, a staje się dla ucznia plastycznym tworzywem do własnych, twórczych odkryć i eksperymentów. Dzieci podczas zajęć z lapbookami są zaangażowane i zmotywowane do realizacji określonego celu.

[146] Pietrasiński Z., Rozwój z perspektywy jego podmiotu, [w:] Rozwój psychiczny człowieka w ciągu życia. Zagadnienia teoretyczne i metodologiczne, red. M. Tyszkowa, Warszawa 1988, s. 10.
[147]Jaoui H., Klucze do twórczości, [w:] Psychologia twórczości, wybór tekstów Z. Siwek, D. Zarębska-Piotrowska, Skrypty Uczelniane – Uniwersytet Jagielloński, Kraków 1980, s. 10.
[148] . Bruner J. S., Kultura edukacji, Kraków 2006, s. 45-50.
[149] Torrance E.P. , Torrance Tests of Creative Thinking. Norms-Technical Manual, Lexington 1974, s. 12.
[150] Deci E.L, Ryan R.M. , The "What" and "Why" of Goal Pursuits: Human Needs and the Self-Determination of Behavior, "Psychological Inquiry" 2000, t. 11, nr 4, s. 227-230.

Każdy przygotowany przez uczniów lapbook jest unikalnym i niepowtarzalnym dziełem. Odzwierciedla on indywidualną wrażliwość estetyczną oraz osobisty styl myślenia każdego dziecka. Ta różnorodność form, kolorów i autorskich rozwiązań konstrukcyjnych sprawia, że każda teczka jest piękna, stając się nie tylko estetyczną kroniką wiedzy, ale przede wszystkim autentycznym świadectwem dziecięcej wyobraźni i twórczości. Przykłady lapbooków wykonanych przez uczniów ZSP w Szewnie obrazuje fotografia 18.



Fotografia 18. Przykład lapbooków matematycznych

Fot. Małgorzata Turczyńska

Wykorzystanie lapbooków w edukacji matematycznej skutecznie przenosi naukę matematyki z poziomu czystej teorii do sfery praktycznego i twórczego działania dziecka. Taka forma pracy nie tylko systematyzuje zdobytą wiedzę, ale przede wszystkim rozwija u uczniów kreatywne myślenie i buduje trwałe poczucie sprawstwa w procesie poznawczym. Rozwijają kulturę matematyczną nie tylko w zakresie twórczości, ale również języka matematycznego, wyobraźni i elegancji matematycznej.

Inną formą twórczości matematycznej w edukacji matematyki uczniów klas I-III są fotografie. Poniżej prezentuję przykład zdjęć w wykonaniu samych uczniów z klas I- III ze szkoły podstawowej w Szewnie (fot. nr 19)



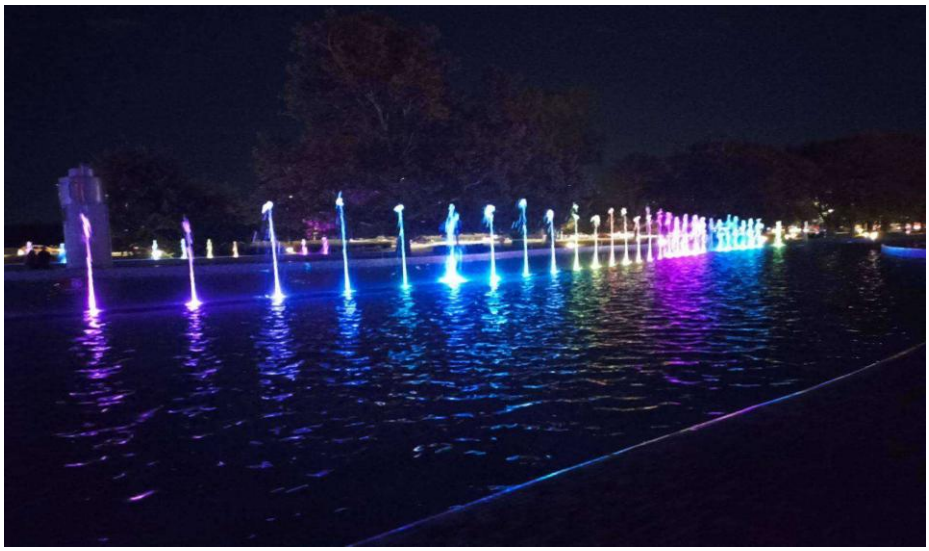
Fotografia 19. „Serowe ułamki”

Fot. Liliana



Fotografia 20 „Walec w chmurach”

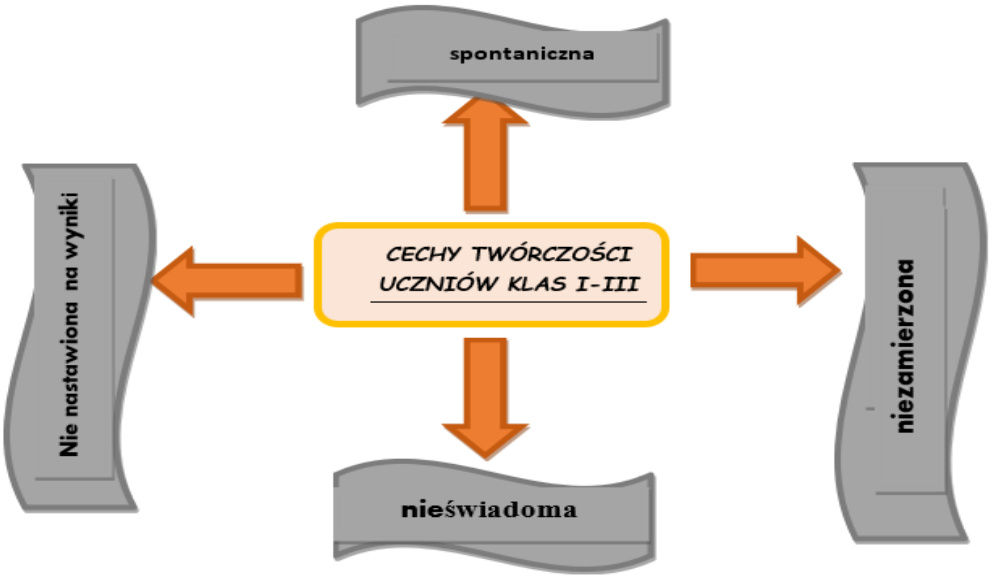
Fot. Jan



Fotografia 21. Kolorowa nieskończoność

Fot. Tymon

Zaprezentowane zdjęcia, to wyraz dziecięcej twórczości, który wspomaga proces nauczania-uczenia się. Cechy twórczości uczniów klas I-III przedstawia poniższa infografika nr 16.



Infografika 16. Cechy twórczości uczniów klas I-III

Źródło: Opracowanie własne[151]

[151] Inspiracją były poglądy J. Uszyńska - Jarmoc, Twórcza aktywność dziecka, teoria -rzeczywistość-perspektywy rozwoju… op. cit.

Jedną z cech twórczości uczniów klas I-III jest to, że jest ona często niezamierzona i nieświadoma. Ponadto jest w dużym stopniu spontaniczna i charakteryzuje się brakiem nastawienia na wyniki. Wynikiem twórczości może być dzieło, np. wytwór materialny taki jak rysunek, makieta, rymowanka, jak również zmiany w rozwoju dziecka. „Twórczość jest nie tyle celem samym w sobie, ile przede wszystkim warunkiem i narzędziem rozwoju dziecka, jego samowiedzy, samooceny, poczucia kompetencji, własnej wartości, co stanowi niezbędny warunek samospełnienia i samorealizacji. Samorealizacja sprzyja działaniom twórczym, zaś działania twórcze – samorealizacji”[152].

„Twórczość matematyczna nie jest zatem dodatkiem, ale warunkiem osiągania odpowiednich efektów. Przykładem tego są zróżnicowane pod względem konstrukcyjnym zadania matematyczne o zróżnicowanej wartości poznawczej. Liczenie słupków matematycznych będzie więc jedynie trenowaniem gotowych przepisów na wykonanie zadania i usilnych prób zapamiętania wyznaczonych czynności (algorytmu rozwiązania), podczas gdy zajmowanie się poszukiwaniem rozwiązań dla zagadek matematycznych przełoży się na stymulowanie zaawansowanych kompetencji i samodzielność myślową wspartą zrozumieniem”[153]. Również podstawa programowa mówi o wykorzystaniu nabytych umiejętności do działań twórczych.

Reasumując za Zofią A. Krygowską stwierdzam, że „nie można „zrozumieć i poznać piękna matematyki bez matematycznej twórczości. Na szczęście jest ona w odpowiedniej skali dostępna już dziecku zaczynającemu szkolną edukację, jeśli tylko do tej twórczości umiemy je pobudzić”[154].

Elegancja matematyczna, to kolejny komponent kultury matematycznej. Choć matematyka powszechnie kojarzona jest ze sztywnymi regułami logicznym i abstrakcją, to badacze postrzegają ja jako dziedzinę sztuki. Piękno matematyczne, w przeciwieństwie do sztuk wizualnych czy muzyki, nie oddziałuje jednak na zmysły w sposób bezpośredni – jest to uroda czysto intelektualna, dostępna dla ludzkiego rozumu poprzez dostrzeżenie harmonii, symetrii oraz głębokiej prawdy ukrytej w strukturach wszechświata[155]. Elegancję w matematyce definiuje się najczęściej jako dążenie do maksymalnej prostoty wyrazu przy jednoczesnym zachowaniu maksymalnej głębi merytorycznej. Elegancki dowód lub wzór to taki, który unika zbędnych komplikacji, jest przejrzysty, zaskakujący i ujawnia nieoczywiste powiązania między odległymi od

[152] Marek E., W poszukiwaniu ciekawych programów rozwijania aktywności twórczej dzieci, https://rebus.us.edu.pl/bitstream/20.500.12128/12747/4/Marek_W_poszukiwaniu_ciekawych_programow.pdf, (dostęp:31.01.2021).
[153] Nowak-Łojewska A., Wybrane obszary edukacji matematycznej dzieci, Warszawa 2015, s. 14.
[154] Krygowska A.Z., Zarys dydaktyki matematyki, część 2, Warszawa1977, s. 13-14.
[155] Russell B., Mistycyzm i logika oraz inne eseje, tłum. Z. Krasnodębski, Warszawa 1986, s. 63.

siebie obszarami wiedzy. Wybitny brytyjski matematyk G.H. Hardy w swoim klasycznym eseju pisał: „Matematyk, podobnie jak malarz czy poeta, jest twórcą wzorów. Jeśli jego wzory są trwalsze od tamtych, to dlatego, że są stworzone z myśli. [...] Dla piękna nie ma w świecie stałego miejsca na brzydką matematykę”[156]. G.H. Hardy podkreślał, że najważniejszymi kryteriami tej estetyki są nieoczekiwalność, nieuchronność oraz ekonomia środków. Z perspektywy psychologii poznawczej i neurobiologii, doświadczanie elegancji matematycznej angażuje te same struktury mózgowe, które odpowiadają za zachwyt nad wybitnymi dziełami malarskimi czy muzycznymi. Badania neuroobrazowe wykazały, że podczas oceny piękna formuł matematycznych u badanych dochodzi do silnej aktywacji w obrębie przyśrodkowej kory przedczołowej – tego samego obszaru, który reaguje na bodźce artystyczne[157]. Świadczy to o tym, że urok matematyki nie jest jedynie metaforą językową, lecz realnym doświadczeniem emocjonalnym. Bertrand Russell ujął ten fenomen w następujących słowach: „Matematyka posiada nie tylko prawdę, ale i najwyższe piękno – piękno chłodne i surowe, podobne do piękna rzeźby, nieodwołujące się do żadnej partii naszej słabszej natury” [158]. W kontekście edukacyjnym ukazywanie elegancji matematycznej ma fundamentalne znaczenie dla kształtowania kultury matematycznej uczniów już od najmłodszych lat. Edukacja, która skupia się wyłącznie na mechanicznym algorytmizowaniu i pamięciowym opanowywaniu procedur, odziera tę naukę z jej najcenniejszego waloru – radości odkrywania harmonii. Kiedy uczeń dostrzega, że dany problem geometryczny można rozwiązać za pomocą jednej, błyskotliwej metody pomocniczej, zamiast poprzez żmudne, wielostronicowe obliczenia, dotyka istoty elegancji. Doświadczenie to redefiniuje stosunek młodego człowieka do przedmiotu. Matematyka przestaje być rzemiosłem, a staje się przestrzenią twórczej ekspresji, w której dążenie do piękna jest równoważne z dążeniem do prawdy.

Istotą elegancji matematycznej jest zazwyczaj spójna struktura, opierająca się na prostocie toku rozumowania oraz niezwykle pomysłowej ekonomice nakładów pracy[159]. W koncepcji tej dąży się do tego, aby wypracowane rozwiązanie było nie tylko trafne i bezbłędne pod względem logicznym, ale również maksymalnie zwięźle zapisane. Taka elegancja ułatwia odnalezienie optymalnej ścieżki badawczej i skraca sam opis, przy jednoczesnym wyeksponowaniu najważniejszych kroków prowadzących do celu. Jak wskazuje Małgorzata Makiewicz, fotoedukacja

[156] Hardy G.H., Apologia matematyka, tłum. R. Duda, , Warszawa 2017, s. 53–54.
[157]Zeki S., Romaya J.P., Benincasa D.M., Atiyah M.F., The experience of mathematical beauty and its neural correlates, Londyn 2014, s. 4.
[158] Russell B., Mistycyzm i logika oraz inne eseje, tłum. Z. Krasnodębski, Warszawa 1986, s. 62.
[159] Makiewicz M., O fotografii w edukacji matematycznej. Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów, Szczecin 2013, s. 52.

staje się narzędziem pozwalającym m.in. na przełamywanie barier psychicznych, oswojenie się z myśleniem abstrakcyjnym, a także na rozwijanie estetyki poznawczej, poczucia harmonii oraz wrażliwości na piękno[160]. Doskonale odzwierciedla to założenia „Poznawczej sieci matematycznego myślenia" – proces ten polega na nieustannym przekraczaniu samego siebie i dążeniu do budowania nowej sieci pojęciowej. Jej wektorami bazowymi są: „zrozumienie tego, co niezrozumiałe, przekraczanie granic przeżycia estetycznego i własna ekspresja twórcza"[161].

Rozwój kultury matematycznej i jej komponentów determinowany jest także poprzez jedną z innowacyjnych koncepcji pedagogicznych, jaką jest fotoedukacja matematyczna, która łączy proces nauczania – uczenia się matematyki z fotografią. Tę właśnie koncepcję zaprezentuję w kolejnym podrozdziale.

2.4. Fotoedukacja matematyczna jako koncepcja dydaktyczna determinująca rozwijanie kultury matematycznej uczniów

Współczesna rzeczywistość dzieci – to świat komputerów, smartfonów, Internetu, sztucznej inteligencji, filmu, fotografii, grafiki oraz obrazu. Funkcjonujące w przestrzeni publicznej zdjęcia prasowe, infografiki, mapy, różne znaki informacyjne/ikony pozwalają na szybkie zrozumienie kontekstu bez konieczności czytania długich tekstów. Cyfrowy obraz czy tradycyjny staje się uniwersalnym językiem, który pozwala nie tylko pokazać świat, ale także go wyjaśnić i utrwalić. Nauczyciele od dawna posługują się wieloma środkami wizualnymi i audiowizualnymi, które wzbogacają metody skutecznego przekazywania treści programowych kształcenia ogólnego[162], ale skala ich wykorzystania dzięki postępowi technologicznemu jest znacznie większa i ma odmienny charakter. Obecnie dzięki dostępowi do nowoczesnych technologii uczniowie są nie tylko odbiorcami treści wizualnych, ale także ich twórcami.

Wraz z postępem technologii nastąpił również rozwój fotografii na kilku płaszczyznach: technologicznej, którą można uznać za pochodną rozwoju komputeryzacji, artystycznej związanej z włączeniem jej do grona sztuk wysokich oraz społecznej i komunikacyjnej[163]. Poprzez połączenie tych wszystkich aspektów fotografia stała się „językiem uniwersalnym, językiem,

[160] Makiewicz M., O fotografii w edukacji matematycznej…, op. cit., s. 77.
[161]Por. Kozielecki J., Koncepcja transgresyjna człowieka, Warszawa 1987. Cyt. za: Makiewicz, M., *Poznawcza sieć matematycznego myślenia*, wydanie II, Szczecin 2019, s. 6.
[162] Helie B., Świtlik W., Fotografia i media cyfrowe jako źródło inspiracji dla edukacji interdyscyplinarnej, s.28, https://ibe.edu.pl/images/EBiS/Numery/2021-1/PDF/02_Blazej%20Helie.pdf, (dostęp:26.11.2020).
[163] Makiewicz M., O fotografii w edukacji matematycznej. jak kształtować kulturę matematyczną uczniów, Szczecin 2013, s. 62.

którym władają ludzie na całym świecie”[164]. Tworzenie fotografii związane jest z pragnieniem przekazania jakiejś treści – informacji. Gdy fotografujemy na przykład rozkład jazdy tramwajów, to to zdjęcie spełnia funkcję interkomunikacyjną. Natomiast kiedy jesteśmy zachwyceni dziełem sztuki i wykonujemy jej zdjęcie, lub gdy fotografujemy częściowe zaćmienie księżyca, fotografia spełnia funkcję emocjonalno-motywacyjną i poznawczo-kształcącą[165].

Biorąc pod uwagę fakt, że uczniowie funkcjonują w cyfrowym świecie, w którym obraz stanowi istotną rolę, kluczowe jest włączenie fotografii do procesu kształcenia uczniów. Taką nowoczesną koncepcją dydaktyczną, przydatną w nauczaniu matematyki uczniom klas I-III, a która także determinuje rozwijanie kultury matematycznej i jej najważniejszych komponentów, jest fotoedukacja matematyczna. Autorką tej koncepcji jest Małgorzata Makiewicz[166]. Koncepcja ta oparta jest na rezultatach eksperymentalnych badań naukowych, opublikowanych w *: O fotografii w edukacji matematycznej. Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów*[167]*, oraz Math & Art. Reprezentacje enaktywne w edukacji matematycznej - badania w działaniu*[168]. Skierowana jest ona do nauczycieli i uczniów wszystkich poziomów nauczania. Jej zasadniczym celem jest wspomaganie rozwoju poszczególnych składników kultury matematycznej ucznia: sprawności matematycznej, języka matematycznego, wyobraźni, twórczości oraz elegancji myślenia za pomocą fotografii. Fotoedukacja matematyczna jest nowatorskim podejściem do procesu nauczania – uczenia się matematyki. Przy jej zastosowaniu elementy sztuki połączone są z pojęciami, twierdzeniami, dowodami matematycznymi. Koncepcja ta wpisuje się w poznawczą koncepcję rozwoju człowieka[169], w której uczeń tworzy własne struktury poznawcze. „Wychodząc poza informacje dostarczone z zewnątrz, dąży do osiągnięcia wyższych poziomów ogólności poprzez stopniowe odrywanie się od konkretu otaczających go przedmiotów”[170]. Oryginalność fotoedukacji matematycznej wynika z połączenia badań empirycznych z teoretycznymi refleksjami oraz praktyką pedagogiczną. Siłę przekazu wzmacnia zintegrowanie dwóch systemów kodowania informacji – obrazowego i werbalnego. Proces dydaktyczny

[164] Rowe W., Zen i sztuka fotografii. Od inspiracji do obrazu, przeł. s. Kupisz, Gliwice 2011, s.8.
[165] Strykowski W., Audiowizualne materiały dydaktyczne. Podstawy kształcenia multimedialnego, Warszawa 1984, s. 25.
[166] Dr hab. Małgorzata Makiewicz, prof. APS i USz jest pracownikiem Akademii Pedagogiki Specjalnej i Uniwersytetu Szczecińskiego. Jest specjalistką w zakresie dydaktyki matematyki, kultury matematycznej, zainteresowań i zdolności matematycznych uczniów, fotoedukacji, społecznej wartości edukacji matematycznej.
[167] Makiewicz M., O fotografii w edukacji matematycznej. Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów, Szczecin 2013.
[168] Makiewicz M., Math & Art. Reprezentacje enaktywne w edukacji matematycznej - badania w działaniu, Uniwersytet Szczeciński 2018.
[169] Zob. Kozielecki J., Koncepcje psychologiczne człowieka, Warszawa 1976.
[170] Makiewicz M., O fotografii w edukacji matematycznej. Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów, Uniwersytet Szczeciński 2013.

skupia się na formułowaniu problemów oraz poszukiwaniu ich wizualizacji fotograficznej, co obejmuje fotografowanie, „czytanie" zdjęć, ich interpretację, komentowanie oraz generowanie nowych zagadnień[171]. Interwencje nauczyciela, nazwane przez Edytę Gruszczyk-Kolczyńską, w kontekście wspierania w rozwoju i edukacji małych dzieci uzdolnionych matematycznie, otulaniem dobrymi emocjami[172], są w tym momencie wskazane, gdyż na tym etapie może dojść, choć nie musi, do pełnego rozwiązania stawianych problemów.

Przy konstruowaniu modelu fotoedukacji w nauczaniu matematyki można rozróżnić dwie podstawowe aktywności uczniów: czytanie gotowych materiałów wizualnych i tworzenie nowych[173]. Wykonywanie i interpretowanie zdjęć przez dzieci wzmacnia i potęguje ich kontakt ze światem społecznym, a także doskonali wrażliwość na dostępne wizualne elementy otaczającego środowiska. Podczas konstruowania koncepcji nauczania matematyki za pomocą fotografii uwzględniono kompromis pomiędzy poznaniem bezpośrednim, a zapośredniczoną percepcją, zgodnie z trzema zasadniczymi strategiami doświadczania rzeczywistości (enaktywna, ikoniczna i symboliczna) Jerome'a Brunera[174]. Fotoedukacja obejmuje działania uczniów i nauczycieli, które są ukierunkowane między innymi na czytanie fotografii, ich interpretację oraz komentowanie mające na celu formułowanie nowych pytań, hipotez, zadań, problemów. Fotoedukacja obejmuje również aktywność, której źródłem jest postawienie problemu opartego na wiedzy dotychczasowej oraz dążenie do fotograficznej wizualizacji wzbogaconej o porządkowanie, klasyfikowanie i nazywanie[175].

Zastosowanie tej koncepcji wiąże się z rozwijaniem dwóch uzupełniających się procesów: eksterioryzacji oraz interioryzacji wiedzy. Taki cykl umożliwia uczniowi przejście od podstawowych informacji formalnych do samodzielnie budowanej przez niego wiedzy[176].Czyli proces interioryzacji koncentruje się na czytaniu gotowych materiałów wizualnych, a eksterioryzacji na tworzenie nowych materiałów wizualnych[177]. Fotografia wspiera proces interioryzacji, prowadząc dziecko od tego, co zobaczone, do tego, co pomyślane, jak również od tego, co pomyślane, do tego, co zobaczone (eksterioryzacja). Pomaga utrwalać powstałe wyobrażenia

[171] Zob. Makiewicz M., Fotoedukacja matematyczna, https://www.aps.edu.pl/instytuty/instytut-wspomagania-rozwoju-czlowieka-i-edukacji/wspolpraca/fotoedukacja-matematyczna/#:~:text=STREFA%20PROJEKT%C3%93W-,Fotoedukacja%20matematyczna,-Aktualizacja%3A%2013%2D05, (dostęp:6.12.2024r.).
[172] Gruszczyk-Kolczyńska G., (red.), O dzieciach matematycznie uzdolnionych Książka dla rodziców i nauczycieli, Warszawa 2012, s. 128-130.
[173] Makiewicz M., O fotografii w edukacji matematycznej. Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów, Szczecin 2013, s. 69.
[174] Ibidem, s.71.
[175] Ibidem, s. 71.
[176] Makiewicz M., Fotoedukacja matematyczna, https://www.aps.edu.pl/instytuty/instytut-wspomagania-rozwoju-czlowieka-i-edukacji/wspolpraca/fotoedukacja-matematyczna/, (dostęp: 26.11.2020).
[177] Ibidem, s. 71.

natury wizualnej (imageny) oraz werbalnej (logogeny) związane z niezwykle istotnymi w dydaktyce matematyki: nazywaniem, klasyfikowaniem, rozpatrywaniem sensu, ocenianiem, stawianiem pytań”[178]. Można dostrzec tutaj analogię do nauczania multimedialnego, w którym uczeń jest samodzielnym podmiotem i przyjmuje postawę badawczą wobec rzeczywistości. Kształcenie przebiega najefektywniej, gdy ma charakter zadaniowy, co oznacza, że uczeń najpierw wyobraża sobie cel i program działania, a następnie przystępuje do jego realizacji. Tak pomyślany proces kształcenia organizuje przede wszystkim nauczyciel, ale wspólnie z uczniami, stawiając uczniom określone zadania poznawcze, wyzwalające ich wielostronną aktywność[179].

Proces interioryzacji w fotoedukacji jest sposobem pokazującym, jak uczniowie przyswajają wiedzę i umiejętności związane z fotografią. Odbywa się on w czterech etapach, które prowadzą od działań konkretnych do bardziej abstrakcyjnych, wyobrażeniowych. Przedstawia je poniższa tabela nr 2.

Tabela 2. Etapy przyswajania wiedzy i umiejętności przez uczniów oraz interwencje nauczyciela w procesie interioryzacji za pomocą fotografii

Lp.	Poziomy zachowań uczniów	Interwencje nauczyciela
1.	Czytanie zdjęcia.	Organizowanie sytuacji dydaktycznej, dzięki której uczeń staje się zainteresowany i rozpoczyna proces fotoedukacji.
2.	Dostrzeganie i nazywanie obiektów matematycznych przedstawionych w formie prezentacji fotograficznej i kierowanie się od interpretacji realistycznej w stronę interpretacji formalnej.	Konstruowanie pola spostrzeżeniowego, polegającego na nadaniu kierunku interpretacyjnego przechodzącego w stronę wiedzy.
3.	Komentowanie obrazów. W skład komentowania wchodzi nazywanie obiektów, zestawienie nazw z podpisami lub opisami zdjęć, podjęcie dyskusji.	Zadawanie pytań naprowadzających.

[178] Makiewicz M., O kulturze matematycznej ucznia. eksterioryzacja wiedzy matematycznej za pomocą fotografii, Edukacja humanistyczna nr 2 (31), 2014 Szczecin 2014, s. 145.
[179] Strykowski W., Media wyznacznikiem zmian w edukacji, s.31, https://researchportal.amu.edu.pl/docstore/download/@UAM1ac36ac3fe6849feb2e7048dea430255/W.Strykowski,Media%20wyznacznikiem%20zmian%20w%20edukacji,2003.pdf, (dostęp:26.11.2024).

4.	Próbuje rozwiązać lub rozwiązuje problem.	Stymulowanie ucznia do dostrzeżenia, sformułowania i komentowania problemów.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie publikacji M. Makiewicz[180]

Proces interioryzacji oddaje pierwszeństwo działaniom konkretnym, czyli manipulacji na przedmiotach materialnych lub ich reprezentacjach obrazowych i symbolicznych, nad działaniami w płaszczyźnie wyobrażeniowej, a następnie w słowno-pojęciowej. Innym sposobem konstruowania wiedzy przez uczniów w fotoedukacji „jest uzewnętrznianie znaków ikonicznych lub symboli w działalności praktycznej lub zabawie - czyli eksterioryzacji”[181]. Zaczątkiem procesu eksterioryzacji jest zorganizowanie przez nauczyciela dyskusji na temat poznanych obiektów matematycznych lub ich własności, korzystając z posiadanej już przez dzieci wiedzy. Jak pisze M. Makiewicz[182] - jest to podstawowa interwencja nauczyciela, w trakcie której tworzy sytuacje problemowe i ukierunkowuje uczniów na formułowanie problemów dotyczących wizualizacji omawianych wcześniej pojęć i twierdzeń. Po tym etapie następuje poszukiwanie przez uczniów fotograficznych asocjacji podczas zorganizowanej przez nauczyciela aktywności, np. wycieczki szkolnej, zadania domowego, konkursu fotograficznego. Zadaniem uczniów jest samodzielne dostrzeganie w otaczającym świecie abstrakcyjnych pojęć, które były wcześniej poznane na lekcjach. Natomiast rolą nauczyciela jest wspieranie pomysłowości uczniów, zachęcanie do rozwiązania problemu, czyli wizualizacji na wiele różnych sposobów, oryginalnego ujęcia tematu, dopracowania idei własnej oraz efektywnego wykonania fotografii. Poniższa tabela nr 3 przedstawia etapy przyswajania wiedzy i umiejętności przez uczniów oraz interwencje nauczyciela w procesie eksterioryzacji za pomocą fotografii.

Tabela 3. Etapy przyswajania wiedzy i umiejętności przez uczniów oraz interwencje nauczyciela w procesie eksterioryzacji

Lp.	Poziomy zachowań uczniów	Interwencje nauczyciela
1.	Rozwijanie ciekawości i zainteresowań.	Wprowadzenie do tematu wzbudza emocje i zainteresowanie uczniów.

[180]Makiewicz M., O fotografii w edukacji matematycznej, Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów, Szczecin 2013 r., s. 72.
[181] Przetacznik-Gierowska M., Świat dziecka. Aktywność-Poznanie-Środowisko, Kraków 1993.
[182] Makiewicz M., O fotografii w edukacji matematycznej, Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów, Szczecin 2013, s. 74.

Lp.	Poziomy zachowań uczniów	Interwencje nauczyciela
2.	Zdobywanie, uzupełnianie wiedzy teoretycznej i praktycznej na temat omawianego zagadnienia.	Stworzenie sytuacji problemowej i ukierunkowanie uczniów w stronę formułowania problemów dotyczących wizualizacji omawianych wcześniej pojęć i twierdzeń.
3.	Samodzielne dostrzeganie w otaczającej rzeczywistości abstrakcyjnych pojęć, które wcześniej uczniowie poznali na lekcjach. Wizualizują poznane pojęcia i twierdzenia.	Zorganizowanie aktywności pozwalającej uczniom na fotograficzne asocjacje (np. wycieczka, sesja zdjęciowa). Wspieranie pomysłowości uczniów.
4.	Wykonywanie fotografii, analizowanie swoich doświadczeń i uczenie się na podstawie własnych prac oraz prac kolegów.	Zainicjowanie okoliczności prezentowania efektów pracy uczniów np. wystawa fotografii, wernisaż, spotkania „Klasa dla klasy", prezentacja.

Źródło: Opracowanie własne[183]

Wykorzystując proces eksterioryzacji, bardzo ważnym elementem jest to, żeby uczniowie na każdym jego etapie - wykorzystania wiedzy, stawiania problemów, poszukiwania wizualizacji czy fotografowania – konstruowali wiedzę samodzielnie, a nauczyciel był osobą wspierającą, tworzącą środowisko edukacyjne i motywującą. Poprzez to proces uczenia się jest efektywny i motywujący uczniów do wysiłku poznawczego. Procesy interioryzacji i eksterioryzacji występujące w tej koncepcji mają charakter równorzędny. Wzajemnie się przeplatają i uzupełniają. Z jednej strony proces fotoedukacji pozwala na interpretowanie otoczenia zgodnie z posiadanymi znaczeniami (...), z drugiej, na zmianie struktur poznawczych w wyniku dopływu nowych informacji[184].

Zastosowanie fotoedukacji na zajęciach z edukacji matematycznej odgrywa kluczową rolę. Cele jej oraz sposoby realizacji przedstawia poniższa tabela nr 4.

[183] Tabelę opracowano na podstawie M. Makiewicz, O fotografii w edukacji matematycznej, Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów, Szczecin 2013 r.
[184] Klus-Stańska D., Światy dziecięcych znaczeń-poszukiwanie kontekstów teoretycznych, [w:] D. Klus-Stańska (red.) Światy dziecięcych znaczeń, Warszawa 2004, s. 27.

Tabela 4. Cele i sposoby realizacji fotoedukacji matematycznej

Cele fotoedukacji	Sposoby realizacji celów przez nauczyciela
Odblokowanie barier i oswojenie z matematycznym myśleniem. Pojmowanie matematyki jako narzędzia poznawania i rozumienia świata, podniesienie świadomości użyteczności matematyki.	Organizowanie pola spostrzeżeniowego ucznia. Wyznaczanie kierunków poszukiwań.
Swoboda w posługiwaniu się językiem matematycznym, posiadanie estetyki poznawczej, poczucia harmonii, wrażliwości na piękno.	Prowokowanie konfliktów poznawczych i archiwizowanie eksperymentów myślowych.
Wyostrzenie spostrzegania i poprawa wyobraźni geometrycznej.	Prowokowanie do stawiania pytań i formułowania problemów, klasyfikowania, nazywania i komentowania.
Przejawianie aktywności twórczej.	Ilustrowania zadań i treści matematycznych.
Konstruowanie wiedzy własnej w oparciu o uzupełniające się dwa procesy: eksterioryzację i interioryzację.	Kształtowanie matematycznych pojęć. Powtarzanie i utrwalanie materiału, przeprowadzanie diagnozy, monitorowanie i kontrola osiągnięć szkolnych.

Źródło: M. Makiewicz, O fotografii w edukacji matematycznej, Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów[185]

[185] Makiewicz M., O fotografii w edukacji matematycznej, Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów Szczecin 2013, s. 77.

Fotoedukacja odblokowuje bariery związane z uczeniem się matematyki oraz wdraża do matematycznego myślenia. Zmienia podejście do matematyki jako przedmiotu nauczania oraz dziedziny wiedzy. Dzięki niej dzieci nabywają swobodę w posługiwaniu się językiem matematycznym, wdrażają się, zauważają i posiadają estetykę poznawczą. Są wyposażane również w poczucie harmonii, wrażliwość na piękno. Wyostrza się ponadto spostrzeganie i poprawia wyobraźnia geometryczna. Priorytetowym elementem jej jest przejawianie się aktywności twórczej dzieci. Cele te realizowane są poprzez: organizowanie przez nauczycieli pola spostrzeżeniowego ucznia, wyznaczanie kierunków poszukiwań, prowokowanie konfliktów poznawczych i archiwizowanie eksperymentów myślowych, prowokowanie do stawiania pytań, formułowania problemów, klasyfikowania, nazywania i komentowania, ilustrowania zadań i treści matematycznych, kształtowanie matematycznych pojęć, powtarzanie i utrwalanie materiału, przeprowadzanie diagnozy i kontroli osiągnięć szkolnych.

Fotoedukacja pozwala rozwijać spostrzegawczość, odkrywać matematyczne pojęcia, obiekty, prawidłowości i twierdzenia, stymuluje twórcze myślenie dzieci, popularyzuje wiedzę i kulturę matematyczną. Uczniowie, wykonując zdjęcia, zdobywają wiedzę w procesie interioryzacji, czyli przekształceniu konkretnego doświadczenia w abstrakcyjne pojęcia. Fotografie te służą również, jako punkt wyjścia do eksterioryzacji, gdyż ostateczny rezultat wizualizacji, czyli wykonanie fotografii staje się punktem wyjścia do nowego cyklu interioryzacji.

Nauczyciele, stosując fotoedukację w rozwijaniu elementów kultury matematycznej, mają przewagę nad tymi, którzy stosują tradycyjny model nauczania-uczenia się. Fotoedukacja matematyczna wzbogaca metody nauczania o wizualny wymiar. Dzięki niej matematyka przestaje być abstrakcyjnym pojęciem, a staje się bardziej konkretna i związana z otaczającą uczniów rzeczywistością. Fotoedukacja matematyczna góruje nad tradycyjnymi metodami nauczania matematyki, które opierają się na przekazywaniu wiedzy teoretycznej, rozwiązywaniu zadań i ćwiczeń oraz pracy z podręcznikiem. Podsumowanie kluczowych różnic w tych dwóch podejściach przedstawia poniższa tabela nr 5.

Tabela 5. Kluczowe różnice między tradycyjnymi metodami nauczania-uczenia się a fotoedukacją

Cecha	Tradycyjne podejście do nauczania – uczenia się	Fotoedukacja
Podejście	Podejście abstrakcyjne. Proces nauczania-uczenia się nie jest powiązany z realnym otaczającym światem. Uczniowie są zazwyczaj odbiorcami przekazywanej wiedzy. Pozbawieni kreatywności, samodzielności w odkrywaniu świata. Stosowana jest „papierowa matematyka".	Ścisłe powiązanie procesu nauczania-uczenia się z otaczającą rzeczywistością. Konstruowanie pojęć, twierdzeń, definicji jest dokonywane samodzielnie przez uczniów w procesie interioryzacji lub eksterioryzacji. Bazuje na samodzielności, odpowiedzialności, kreatywności dzieci. „Jest nauczaniem i uczeniem się wielokodowym, interaktywnym i wielostronnie aktywizującym"[186]. Umożliwiają uczącym się wykonywanie określonych czynności o charakterze intelektualnym i manualnym oraz komunikowanie się[187]. Jest źródłem różnorodnych informacji, które uczniowie przetwarzają w swoich umysłach.
Metody pracy	Oparte na słowie np. pogadanka, wykład. Dzieci pozbawione są działania, rozwiązywania problemów, eksperymentów. Rozwiązywanie zadań i ćwiczeń.	Aktywizujące: fotografie, projekty, dyskusje, eksperymenty.

[186] Strykowski W., Media wyznacznikiem zmian w edukacji, NEODIDAGMATA, Poznań, s.31.
[187] Ibidem, s. 28.

Cecha	Tradycyjne podejście do nauczania – uczenia się	Fotoedukacja
Aktywność ucznia	Postawa uczniów jest bierna. Polega na rozwiązywaniu zadań z podręczników, zeszytów ćwiczeń i słuchaniu nauczyciela.	Postawa uczniów jest aktywna, twórcza. Tworzenie zdjęć przez dzieci wymaga bardzo dokładnej obserwacji otoczenia, która umożliwi uchwycenie matematycznych powiązań, jak również czytanie wykonanych fotografii językiem matematycznym. Podejście to motywuje dzieci do działania, zgłębiania wiedzy w kreatywny sposób, podwyższa samoocenę uczniów- stawiając ich w roli twórców środków dydaktycznych, które jednocześnie pełnią rolę środków matematyzacji i interpretacji.
Motywacja	Niska, zwłaszcza dla uczniów, którzy mają trudności z matematyką.	Wysoka, dzięki wykorzystaniu wizualnych i angażujących materiałów.
Rozwój umiejętności	Przede wszystkim umiejętności rachunkowe i rozwiązywania zadań.	Realizuje cele szkoły zawarte w podstawie programowej kształcenia ogólnego z 2017 roku[188], do których należą m.in: rozwijanie kompetencji takich jak: kreatywność, innowacyjność, krytyczne i logiczne myślenie, rozumowanie,

[188] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 14 lutego 2017 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym, kształcenia ogólnego dla branżowej szkoły I stopnia, kształcenia ogólnego dla szkoły specjalnej przysposabiającej do pracy oraz kształcenia ogólnego dla szkoły policealnej, Dziennik Ustaw Rzeczypospolitej Polskiej z dnia 24 lutego 2017 r. Poz. 356, http://isap.sejm.gov.pl/isap.nsf/download.xsp/WDU20170000356/O/D20170356.pdf, (dostęp: 5.04.2025).

Cecha	Tradycyjne podejście do nauczania – uczenia się	Fotoedukacja
		argumentowanie i wnioskowania, a także umiejętności matematyczne. Wspiera ucznia w rozpoznawaniu własnych predyspozycji i określaniu drogi dalszej edukacji. Rozwija wszechstronny rozwój dzieci poprzez zaspokajanie i rozwijanie ich dziecięcej ciekawości do zgłębiania wiedzy. Kształtuje postawy otwarte wobec świata i innych ludzi.
Związek z rzeczywistością	Abstrakcyjny i oderwany od rzeczywistości.	Konkretny i związany z doświadczeniami uczniów w realnym otoczeniu.
Rola nauczyciela	Transmisja wiedzy. Główne źródło wiedzy.	Inspirator, krytyczny przyjaciel, pierwszy odbiorca efektów pracy, mentor, osoba wspomagająca ucznia w procesie uczenia się poprzez wskazywanie pozytywnych efektów pracy, wspieranie w pokonywaniu trudności i wskazanie dalszej drogi rozwoju.
Ocena ucznia	Indywidualna, oparta na testach.	Procesualna, uwzględniająca różne aspekty rozwoju. Dostarcza uczniowi konstruktywnej informacji zwrotnej, mówiącej, w jakim miejscu się znajduje oraz nad czym musi jeszcze popracować. Oprócz oceny nauczyciela stosowana jest samoocena ucznia i ocena koleżeńska.

Źródło: Opracowanie własne

Rola nauczyciela w procesie edukacyjnym, jak obrazuje powyższa tabela - ewoluowała wraz z rozwojem nowych metod i technologii. W tradycyjnym modelu nauczania głównym zadaniem nauczyciela jest przekazywanie uczniom gotowej wiedzy, często w formie wykładów lub prezentacji, kontrola przez nauczyciela procesu nauczania – uczenia się, ocena postępów uczniów na podstawie testów i sprawdzianów. Nauczyciel jest postrzegany jako główne źródło wiedzy. W fotoedukacji matematycznej nauczyciel staje się bardziej facylitatorem niż wykładowcą. Jego rola polega na wspieraniu uczniów w procesie odkrywania wiedzy poprzez fotografię. Obserwuje rozwój uczniów i dostarcza im konstruktywnej informacji zwrotnej.

Stosując fotoedukację matematyczną, nauczyciele rozwijają kulturę matematyczną uczniów we wszystkich jej aspektach. Dzięki niej uczniowie zgłębiają tajniki wiedzy matematycznej samodzielnie w atrakcyjny i kreatywny sposób. „Dzięki wykonanym fotografiom uczniowie zdobywają wiadomości, kształtują umiejętności i system wartości”[189]. Przy wykorzystaniu fotoedukacji matematycznej na zajęciach stosowane są wszystkie znane formy pracy z uczniami, które uzależnione są od założonego celu zajęć i materiału kształcenia. Może to być praca indywidualna, na przykład przy samodzielnym fotografowaniu, opisie zdjęć, rozwiązywaniu zadań, grupowa, czyli wspólne komentowanie zdjęć, rozwiązywanie zadań, robienie fotografii określonego obiektu matematycznego, wspólne rozwiązywanie problemu lub zbiorowa przy organizowaniu przestrzeni edukacyjnej w formie wycieczki w celu szukania matematycznych prawidłowości. Fotoedukacja matematyczna, łącząc sztukę z matematyką, pozwala dzieciom na odkrywanie matematyki w prosty i przyjemny sposób w otaczającym świecie. Powoduje, że trudne abstrakcyjne pojęcia, dowody, twierdzenia są ilustrowane w łatwy i angażujący ich sposób. Poprzez obraz, dzieci mające trudności w nauce, pokonują je. Fotoedukacja matematyczna może być stosowana na każdym etapie edukacyjnym i na każdej lekcji, nie ma żadnych ograniczeń. Aplikowanie jej zależy od zaangażowania i kreatywności nauczyciela. Wprowadzenie fotografii do nauki matematyki zwiększa zaangażowanie uczniów oraz ich kreatywność. Każda zrobiona fotografia jest inspiracją do kształtowania kultury matematycznej w zakresie: sprawności matematycznej, języka matematycznego, wyobraźni, twórczości oraz poczucia piękna. Dzięki fotoeukacji matematycznej wzrasta samoocena dzieci, ponieważ robione

[189] Strykowski W., Media wyznacznikiem zmian w edukacji, s. 32. https://researchportal.amu.edu.pl/docstore/download/@UAM1ac36ac3fe6849feb2e7048dea430255/W. Strykowski,Media%20wyznacznikiem%20zmian%20w%20edukacji,2003.pdf, (dostęp: 5.04.2025).

fotografie odzwierciedlają ich punkt widzenia, który będzie przedstawiony rówieśnikom. Sprawia, że nauka matematyki ściśle powiązana jest i dostosowana do funkcjonującej rzeczywistości. Zastosowanie fotografii uczy dzieci przedstawiania własnych opinii, dyskusji, poszanowania innych, argumentowania, pracy w grupach, a więc kompetencji, które są niezbędne do funkcjonowania w dorosłym życiu. Dzięki fotoedukacji matematycznej uczeń przestaje postrzegać ten przedmiot jako teoretyczną naukę i zaczyna dostrzegać jej estetyczny aspekt na przykład fraktale, symetria czy ciągi Fibonacciego w przyrodzie. Z biernego słuchacza podczas lekcji uczeń staje się aktywnym podmiotem. A kształtowana artystyczna wrażliwość pozwala mu dostrzec piękno matematyki tam, gdzie inni odbiorcy widzą tylko zwykły przedmiot. Wyjście poza salę lekcyjną sprawia, że matematyka staje się dotykalna i osadzona w realiach życia codziennego. Koncepcja ta wykorzystuje naturalną ciekawość uczniów i bazuje na procesach odkrywania. Uczeń na przykład sam szuka kątów prostych w architekturze, stożków w krajobrazie czy symetrii na skrzydłach motyla. Jest to doskonała metoda umożliwiająca rozwijanie myślenia matematycznego przy jednoczesnym kształtowaniu wrażliwości estetycznej.

Reasumując, fotodukacja matematyczna jako koncepcja dydaktyczna ukazuje nowe możliwości organizowania procesu kształcenia, w którym matematyka przestaje być jedynie obszarem abstrakcyjnych pojęć i symboli, a staje się elementem pozwalającym na interpretację rzeczywistości. Zastosowanie fotografii, zarówno jako środka dokumentowania zjawisk, jak i sposobność do stawiania problemów matematycznych, sprzyja integracji poznania zmysłowego, refleksji pojęciowej oraz twórczej aktywności ucznia. Tym samym wpisuje się w nurt edukacji konstruktywistycznej i dialogicznej, w której uczeń nie jest tylko biernym odbiorcą informacji czy wiadomości, lecz sam konstruuje wiedzę i jest jej współtwórcą. Analiza założeń fotodukacji matematycznej pozwala stwierdzić, że koncepcja ta w sposób istotny determinuje rozwój kultury matematycznej i jej poszczególnych komponentów. Fotografia jako środek interpretacyjny umożliwia dostrzeganie relacji, symetrii, struktur, proporcji czy rytmów obecnych w otoczeniu, a następnie ich formalizowanie w języku matematyki. Proces ten sprzyja kształtowaniu i doskonaleniu rozumienia pojęć matematycznych, rozwijaniu umiejętności argumentacji i wrażliwości na porządek i harmonię w nauczaniu matematyki uczniów z klas I-III. Istotną zaletą fotodukacji jest również jej potencjał motywacyjny. Dzięki odwoływaniu się do doświadczeń ucznia, jego percepcji i aktywności twórczej wzmacnia poczucie sprawstwa oraz buduje pozytywną relację ucznia z przedmiotem, jakim jest matematyka. W rezultacie sprzyja przełamywaniu lęku matematycznego, a także rozwijaniu postawy badawczej i kształtowaniu trwałej gotowości do podejmowania działań w obszarze matematycznym. Fotodukacja matematyczna sta-

nowi spójną i perspektywiczną koncepcję dydaktyczną, która poprzez doświadczenia, integrację obrazu i refleksję w obszarze pojęć wspiera rozwój kultury matematycznej w jej wielowymiarowym ujęciu. Może być ona traktowana nie tylko jako metoda pracy dydaktycznej, lecz jako szersza orientacja pedagogiczna, otwierająca przestrzeń do twórczego dialogu między matematyką a światem codziennego doświadczenia. Może być ważnym ogniwem w procesie humanizacji edukacji matematycznej i budowaniu jej kulturotwórczego wymiaru.

Na zakończenie tego podrozdziału przytoczę wypowiedź twórczyni tej koncepcji, Małgorzaty Makiewicz: „Fotoedukacja matematyczna pozwala na swobodne przemieszczanie się pomiędzy sztuką a matematyką, zakłada artystyczną wrażliwość ucznia i ożywienie jego ekspresji poznawczej w przestrzeni odległej od sali szkolnej (nad jeziorem, na podwórku, lodowisku czy podczas wycieczki do muzeum minerałów). Wykorzystuje naturalne zaciekawienie ucznia obserwowanymi zjawiskami świata przyrody i obiektami utworzonymi przez człowieka. Twórczość tego typu, opierająca się na samodzielnym odkrywaniu lub konstruowaniu wiedzy przy pomocy aparatu fotograficznego, otwiera zupełnie nową przestrzeń dydaktyki matematyki, gdyż uświadamia uczącym konkretne drogi asocjacji, prowadzące do zrealizowania procesów poznawczych w odniesieniu do abstrakcyjnych obiektów matematyki”[190].

[190] Makiewicz M., z Abstraktu do: „Mathematical Cognition in Metaphors Expressed through Photography”. Chemistry-Didactics-Ecology-Metrology, t. 17, nr 1-2, 2012, s. 27–39.

Rozdział III. System edukacji w rozwoju kultury matematycznej

System edukacji stanowi jeden z istotnych obszarów kształtowania kultury matematycznej uczniów. W jego ramach odbywa się systematyczne zapoznawanie dziecka i nauka posługiwania się językiem matematycznym w sposób świadomy i precyzyjny. Rozwijane są kompetencje poznawcze oraz kształtowane postawy wobec matematyki jako dziedziny nauki o opisie rzeczywistości. Szkoła tworzy przestrzeń dla rozwijania myślenia logicznego, formułowania i weryfikowania hipotez, a także dostrzegania różnych zależności. Poprzez określone dokumenty normatywne, organizację procesu dydaktycznego, dobór treści i metod nauczania, a także przygotowanie nauczycieli, system edukacji wyznacza ramy interpretacyjne tego, czym jest matematyka w doświadczeniu ucznia. System edukacji pełni funkcję nie tylko transmisyjną, lecz również kulturotwórczą, kształtując sposób rozumienia matematyki, jej społeczny prestiż oraz miejsce w doświadczeniu dziecka. Analiza roli systemu oświaty w rozwoju kultury matematycznej wymaga spojrzenia zarówno historycznego, jak i normatywnego. W pierwszym podrozdziale przedstawiony zostanie rys historyczny rozwoju systemu oświaty w Polsce, ukazujący przemiany strukturalne, które miały wpływ na sposób organizacji edukacji matematycznej w szkole. W kształtowaniu kultury matematycznej szczególne znaczenie ma obowiązująca podstawa programowa jako dokument konstytutywny polskiego systemu edukacji. Określa cele, treści oraz wymagania edukacyjne, wyznacza zakres pracy nauczyciela i kierunki rozwoju ucznia. Analiza jej zapisów pozwala uchwycić, w jaki sposób definiowana jest rola matematyki w edukacji uczniów klas I-III w procesie budowania kultury matematycznej. W kolejnym podrozdziale zostanie zaprezentowana edukacja matematyczna uczniów klas początkowych, która jest fundamentem dalszego rozwoju poznawczego dziecka. To właśnie na tym etapie kształtują się podstawowe schematy myślenia, rozumienie relacji i zależności, intuicje liczbowe, a także emocjonalne nastawienie do matematyki. Analiza zapisów podstawy programowej w odniesieniu do edukacji wczesnoszkolnej pozwoli ocenić, w jakim stopniu sprzyjają one rozwijaniu kultury matematycznej. Rozdział zamyka krytyczna refleksja nad stanem edukacji matematycznej, realizowanej w przedszkolu oraz w klasach początkowych.

3.1. Rys historyczny rozwoju systemu oświaty w Polsce

Historia systemu oświaty w Polsce jest związana z przemianami politycznymi, społecznymi i kulturowymi zachodzącymi na przestrzeni dziejów. Rozwój szkolnictwa odzwierciedlał

zarówno potrzeby społeczeństwa, jak i ideologie dominujące w poszczególnych epokach historycznych. Literatura pedagogiczna[1] podaje, że system oświaty w Polsce rozwijał się stopniowo – od edukacji o charakterze kościelnym w średniowieczu, poprzez reformy oświeceniowe, aż po współczesny system edukacji podporządkowany zasadom państwa demokratycznego. Początki zorganizowanej edukacji na ziemiach polskich sięgają średniowiecza. Powiązane były przede wszystkim z działalnością Kościoła. Pierwsze szkoły funkcjonowały przy katedrach, kolegiatach oraz klasztorach. Podstawowym zadaniem było przygotowanie duchowieństwa oraz kształcenie osób przeznaczonych do pełnienia funkcji administracyjnych. Ważnym wydarzeniem dla rozwoju systemu oświaty w Polsce było utworzenie w 1364 roku przez króla Kazimierza III Wielkiego Akademii Krakowskiej, która w późniejszych wiekach funkcjonowała jako Uniwersytet Jagielloński. Uczelnia ta stała się jednym z najważniejszych ośrodków intelektualnych Europy Środkowej, odgrywając znaczącą rolę w kształceniu elit intelektualnych państwa oraz w rozwoju nauki i kultury[2]. Duży przełom w dziejach polskiego szkolnictwa nastąpił w epoce oświecenia. W 1773 roku z inicjatywy króla Stanisława Augusta Poniatowskiego powołano Komisję Edukacji Narodowej. Była to pierwsza w Europie centralna władza oświatowa, zwana też ministerstwem. Działalność Komisji miała na celu przeprowadzenie gruntownej reformy systemu edukacji w Rzeczypospolitej. Komisja opracowała nowe programy nauczania, podręczniki szkolne oraz zasady organizacji szkół elementarnych i średnich. Niestety, upadek Rzeczypospolitej i okres zaborów (1795–1918) doprowadziły do likwidacji jednolitego systemu szkolnego. Oświata na ziemiach polskich funkcjonowała w ramach systemów edukacyjnych państw zaborczych – Rosji, Prus oraz Austrii. Edukacja stała się narzędziem polityki wynaradawiania, mającej na celu zmuszenie mniejszości narodowej do porzucenia własnego języka, kultury, tradycji, a w efekcie przyjęcia tożsamości narodu dominującego. Pomimo tych trudności rozwijały się liczne inicjatywy oświatowe i społeczne, przykładem – tajne nauczania. Zaczęły także działać organizacje, których ważnym zadaniem było podtrzymywanie polskiej tożsamości narodowej[3].

Po odzyskaniu niepodległości przed władzami polskimi stanęło wielkie wyzwanie - zbudowanie nowego, jednolitego ustroju szkolnego obowiązującego na terenie całej Polski, który

[1] Wołoszyn S., Dzieje wychowania i myśli pedagogicznej w zarysie, PWN, Warszawa 1964; Kupisiewicz Cz., Z dziejów teorii i praktyki wychowania, Oficyna Wydawnicza „Impuls", Warszawa 2012; Mrozowska K., Historia oświaty i wychowania w Polsce w latach 1918–1978 – przeszłość, stan obecny, perspektywy, „Kwartalnik Pedagogiczny" 1979, nr 3, s. 76; Trentowski B.F., Chowanna czyli system pedagogiki narodowej jako umiejętności wychowania, nauki i oświaty, słowem wykształcenia naszej młodzieży, t. 1–2, Biblioteka Klasyków Pedagogiki, Wrocław 1970.

[2] Kupisiewicz Cz., Z dziejów teorii i praktyki wychowania, Warszawa 2012, s. 23-30.

[3] Zob. Wroczyński R., Dzieje oświaty polskiej 1795–1945, Warszawa 1980.

udostępniłby wszystkim dzieciom naukę w języku ojczystym. „Upowszechnienie oświaty łączyło się w nowym państwie polskim z zagadnieniem gruntownej przebudowy systemu szkolnego pod względem ustrojowym i programowym”[4]. Nauczanie początkowe w tym okresie ukształtowało się jako zamknięty szczebel szkolny, niepowiązany z następnymi, odcięty od nich barierą różnic programowych[5], dlatego na szkole elementarnej edukację kończyła większość dzieci z klasy proletariackiej i chłopskiej. W tym okresie panował w szkołach nurt nowego wychowania. Szkoły funkcjonujące według niego miały stwarzać wszystkim dzieciom warunki do pełnego rozwoju psychicznego i fizycznego oraz przygotowywać ich do życia w społeczeństwie, które w wąskim zakresie odnosiło się do wyrobienia prostych umiejętności praktycznych, umożliwiających w przyszłości pracę o charakterze fizycznym oraz kształtowanie postaw moralnych, opartych na zasadach religijnych w poszanowaniu własności prywatnej i akceptacji istniejącego porządku. Zwracano ponadto uwagę na to, aby w procesie nauczania wykorzystywana była gotowość dzieci do działania i aktywnego w nich uczestniczenia. Dużą rolę przypisywano zabawie i pracy[6].

Już podczas I Wojny Światowej w 1914 roku, w różnych ośrodkach Polski, jak również częściowo na emigracji rozpoczęły się prace przygotowawcze do zaprojektowania organizacji przyszłego państwa polskiego, a w tym ustroju szkolnego. Najbardziej aktywnymi grupami, które podejmowały działania w tym zakresie, były organizacje nauczycielskie działające na terenie zaboru rosyjskiego i austriackiego. Najważniejszą rolę w nich odgrywało Stowarzyszenie Nauczycielstwa Polskiego, działające w Warszawie, zrzeszające w przeważającej części nauczycieli z polskich prywatnych szkół średnich oraz początkowych. Stowarzyszenie Nauczycielstwa Polskiego powołało komisję pedagogiczną, której zadaniem było zaprojektowanie organizacji szkolnictwa polskiego. Komisja ta ustaliła trzystopniową budowę szkolnictwa. Stopień pierwszy to siedmioletnia, obowiązkowa dla wszystkich szkoła powszechna, dla uczniów w wieku od 7-14 lat. Następny stopień to szkoły średnie z kursem czteroletnim lub trzyletnim ogólnokształcące lub zawodowe. Trzeci ostatni to szkoły akademickie. Projekt komisji zakładał równomierny rozkład przedmiotów humanistycznych, matematycznych, przyrodniczych oraz zajęć praktycznych. W porównaniu z wcześniej obowiązującymi programami szkół ludowych zwiększono zakres nauk matematyczno-przyrodniczych i praktycznych.

[4] Trzebiatowski T., Problem powszechności nauczania w Polsce w latach 1918—1931, s.49, [w:] Rozprawy z Dziejów Oświaty 12/1969, https://bazhum.muzhp.pl/media/texts/rozprawy-z-dziejow-oswiaty/1969-tom-12/rozprawy_z_dziejow_oswiaty-r1969-t12-s49-87.pdf, (dostęp:17.05.2025).
[5] Walczyna J., Integracja nauczania początkowego, Wrocław- Warszawa- Kraków 1968, s.45.
[6] Ibidem, s 48.

Odrodzenie państwa polskiego w 1918 roku postawiło przed władzami II Rzeczypospolitej zadanie o fundamentalnym znaczeniu – stworzenie jednolitego systemu oświaty. W momencie odzyskania niepodległości Polska odziedziczyła po trzech zaborcach trzy zupełnie różne modele szkolnictwa: pruski, austriacki i rosyjski. Różniły się one nie tylko strukturą organizacyjną i programami nauczania, ale też językiem wykładowym i ideologicznym nastawieniem. Budowa spójnego systemu edukacyjnego stała się jednym z głównych zadań państwa. Jego realizację zapowiadano już w programie, który ogłoszono 18 grudnia 1918 r. przez ministra oświaty Ksawerego Praussa[7]. Według koncepcji K. Praussa szkoła miała być powszechna i bezpłatna. Obowiązkiem szkolnym objęte zostały dzieci z wszystkich sfer społecznych. „Podstawą przebudowy ustroju szkolnego miała być siedmioletnia szkoła powszechna obowiązkowa dla wszystkich dzieci z jednolitym ustrojem szkolnym. Konsekwencją tego stanowiska miała być reforma szkoły średniej ogólnokształcącej, polegająca na wydzieleniu niższych klas i połączeniu ich ze szkołą powszechną oraz utworzeniu pięcioletnich gimnazjów o zróżnicowanych programach"[8]. W całej strukturze szkolnej między jej szczeblami miała być wprowadzona drożność programowa tak, by dzieci wszystkich środowisk społecznych mogły bez przeszkód przechodzić ze szkół niższych stopni do szkół stopni najwyższych. Zasady określone przez K. Praussa należały to najbardziej postępowych i gdyby były uskutecznione, stawiałyby je w szeregu najbardziej demokratycznych i nowoczesnych.

Pierwszym dokumentem po odzyskaniu niepodległości, regulującym pracę szkół, był dekret o obowiązku szkolnym [9]- miał on charakter ustawy[10]. Został wydany 02.07.1919 roku przez Naczelnika Państwa. „Wprowadził obowiązkową siedmioletnią naukę dla wszystkich dzieci w bezpłatnej i powszechnej szkole. Do czasu jednak zorganizowania jej we wszystkich miejscowościach pozwalał na tworzenie szkół 4- lub 5-letnich całodziennych z obowiązkową uzupełniającą nauką 3- lub 2-letnią. Szczegółowe informacje dotyczące nauki uzupełniającej zawierało Rozporządzenie Ministra Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego w sprawie zaprowadzenia nauki uzupełniającej w myśl dekretu o obowiązku szkolnym z dnia 7 lutego

[7] Zob. Araszkiewicz F. W., Ideały wychowawcze Drugiej Rzeczypospolitej, Warszawa 1978. Szerzej na ten temat [w:] Falski M., Koncepcja szkoły powszechnej i jej roli w ustroju szkolnictwa w okresie międzywojennym w Polsce Rozprawy z Dziejów Oświaty 1958, 1, s.169-217.

[8]Garbowska W., Szkolnictwo powszechne w Polsce w latach 1932-1939, Wrocław-Warszawa-Kraków-Gdańsk 1978, s. 14-15.

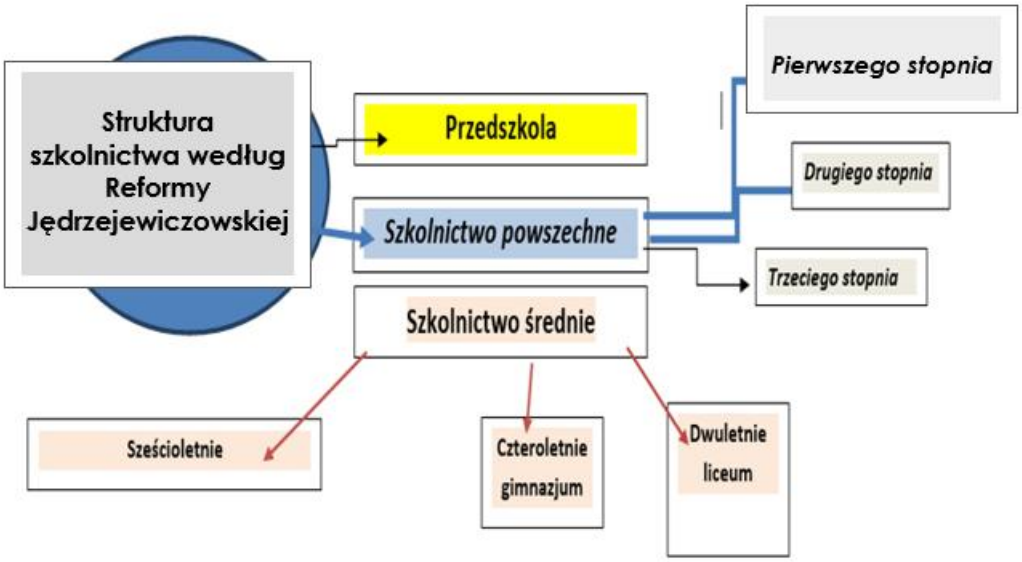
[9]Dekret o obowiązku szkolnym, Dziennik Ustaw 1919.14.poz. 147, https://isap.sejm.gov.pl/isap.nsf/download.xsp/WDU19190140147/O/D19190147.pdf, (dostęp:26.11.2022 r.)

[10] W początkowym okresie niepodległej organizację szkoły sankcjonowały dekrety, które miały moc uchwał.

1919 roku”[11]. Program nauki uzupełniającej obejmował: czytanie z objaśnianiem i opowiadaniem, pisanie, liczenie wraz z nauką geometrii. Nauka religii uzależniona była od księdza. Mogła być prowadzona w kościele lub szkole. Godziny religii nie wchodziły do ogólnej liczby godzin przeznaczonych na naukę uzupełniającą, która tygodniowo wynosiła 4 godziny[12]. W tym czasie uczniowie mogli wypełniać obowiązek szkolny nie tylko w publicznych szkołach powszechnych, ale prywatnych oraz w domu”[13]. Dekret wyznaczył również obwody szkolne, do których miały uczęszczać dzieci zamieszkujące w odległości nie przekraczającej 3 km od domu, w celu umożliwienia wszystkim dzieciom korzystania ze szkoły powszechnej[14]. Dążeniem dekretu było zapewnienie dostępu do edukacji wszystkim dzieciom w wieku szkolnym i wprowadzenie obowiązku szkolnego, który zaowocował ograniczeniem stopnia analfabetyzmu. Jego zadaniem było również zmniejszenie dysproporcji edukacyjnej między wsią a miastem[15]. Dekret ten „obowiązywał do 07.04.1956 roku. Ujednolicił on prawo oświatowe na terenie całego kraju. Był ważnym krokiem na drodze do stworzenia nowoczesnego systemu edukacji w Polsce. Zmienił on również nazewnictwo – zamiast szkół elementarnych istniejących podczas zaborów na powszechne”[16].

W 1922 roku weszła w życie ustawa, która ustaliła zasady finansowania publicznych szkół powszechnych przez państwo i samorządy lokalne oraz uregulowała stopień organizacyjny szkół powszechnych w zależności od liczby uczniów w obwodzie szkolnym. Wprowadzono 8-letnie gimnazja, podzielone na dwa etapy: 3-letnie „niższe” i 5-letnie „wyższe”. Uregulowała także kształcenie wyższe[17]. Kulminacją procesu integracji i modernizacji oświaty, ustanawiając ramy organizacyjne polskiego szkolnictwa, które pomimo trudności ekonomicznych i różnic regionalnych stały się jednym z filarów nowoczesnego państwa, była reforma Janusza Jędrzejewicza, byłego ministra Wyznań Religii i Oświecenia Publicznego z 1932 roku. Reforma ta dokonała nowego podziału szkolnictwa. Strukturę obrazuje infografika nr 17.

[11] Rozporządzenie Ministra Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego w sprawie zaprowadzenia nauki uzupełniającej w myśl dekretu o obowiązku szkolnym z dnia 7 lutego 1919 roku, https://isap.sejm.gov.pl/isap.nsf/download.xsp/WDU19190790443/O/D19190443.pdf, (dostęp:26.11.2022r.).
[12] Ibidem
[13] Dekret o obowiązku szkolnym, Dziennik Ustaw 1919…, op. cit.
[14] Ibidem
[15] Dekret o obowiązku szkolnym, Dz.Pr.P.P. 1919 nr 14 poz. 147, https://isap.sejm.gov.pl/isap.nsf/DocDetails.xsp?id=wdu19190140147, (dostęp:26.11.2022).
[16] Ibidem
[17] Ustawa z dnia 17 lutego 1922 r. o zakładaniu i utrzymywaniu publicznych szkół powszechnych [w:] https://sip.lex.pl/akty-prawne/dzu-dziennik-ustaw/zakladanie-i-utrzymywanie-publicznych-szkol-powszechnych-16777262 (dostęp: 21.05.2024).

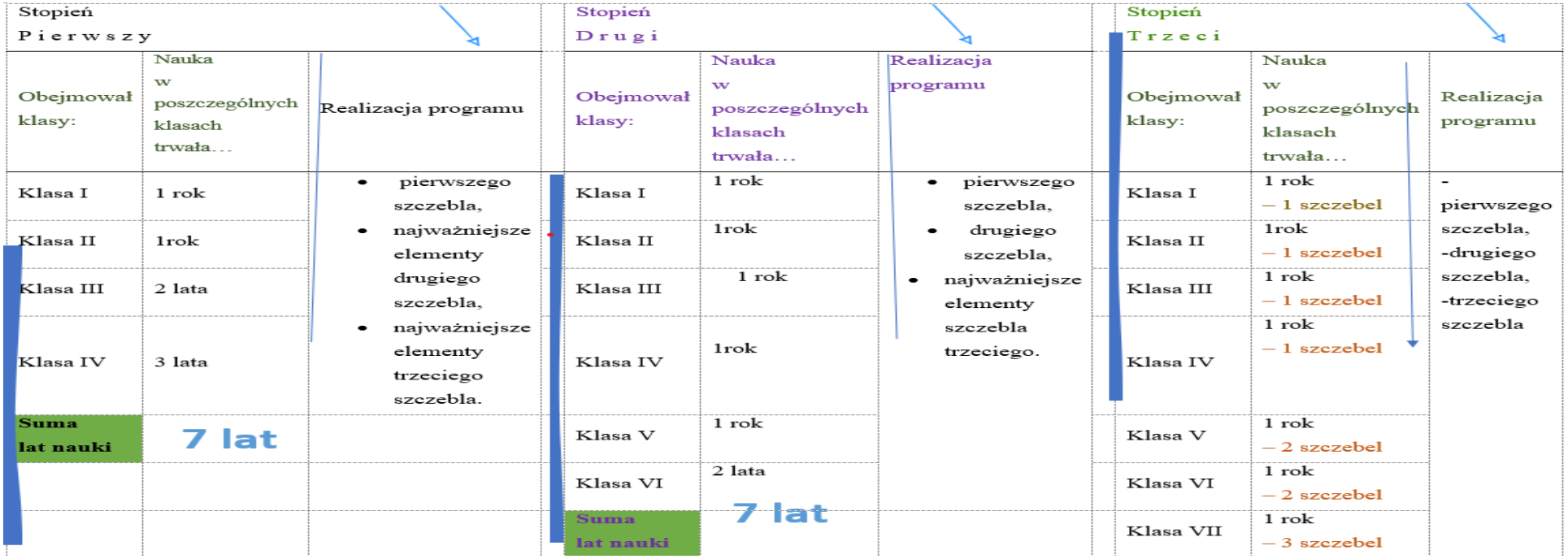


Infografika 17. Struktura szkolnictwa według reformy jędrzejewiczowskiej

Źródło: Opracowanie własne

„Reforma zakładała organizację przeszkoli dla dzieci, które ukończyły 3 lata, do momentu rozpoczęcia nauki w szkole. Następnym etapem była szkoła powszechna, ale znacznie różniąca się organizacyjnie od funkcjonującej wcześniej. Nadal była siedmioletnią, lecz wyodrębniono w niej trzy typy szkół – czteroklasową, sześcioklasową i siedmioklasową. Etap pierwszy był tym, w którym uczniowie osiągali elementarny zakres wykształcenia ogólnego, drugi był rozszerzeniem i pogłębieniem pierwszego, trzeci zaś przygotowywał do życia w społeczeństwie. W każdym etapie z nich nauka trwała siedem lat. O tym, jaki stopień szkoły ukończy dziecko, decydował rodzic, gdyż państwo umożliwiało tylko osiągnięcie najwyższych szczebli naukowego i zawodowego wykształcenia, nie gwarantując jednak równego dostępu do wszystkich typów szkół”[18]. Trójstopniową organizację szkół w reformie jędrzejewiczowskiej przedstawia infografika nr 18.

[18]Adamkiewicz S., Edukacja w II Rzeczypospolitej, https://niepodlegla.gov.pl/o-niepodleglej/edukacja-w-ii-rzeczypospolitej/, (dostęp: 26.11.2022r.).



Infografika 18. Trzystopniowa struktura szkolnictwa powszechnego w reformie jędrzejewiczowskiej

Źródło: Opracowanie własne na postawie: Ustawa Jędrzejewiczowska: Dz.U. z 1932 r. Nr 38, poz. 389, http://g.ekspert.infor.pl/p/_dane/akty_pdf/DZU/1932/38/389.pdf#zoom=90, dostęp: 22.10.2022r.).

Reforma zakładała funkcjonowanie trzech stopni szkolnictwa powszechnego: I-go, II-go i III-go. Szkoły elementarne pierwszego stopnia funkcjonowały przede wszystkim na wsi. Realizowały one pierwszy szczebel programowy wraz z najważniejszymi elementami programowymi stopnia II-go i III-ego. Uczniowie zgłębiali wiedzę podstawową. Nauka w klasach pierwszych i drugich trwała jeden rok, trzecich – dwa lata, czwartych – natomiast trzy.

Organizowanie szkół czteroklasowych wypływało z bezwzględnej potrzeby zorganizowania możliwie największej sieci szkół elementarnych i upowszechnienie edukacji na poziomie podstawowym. Szkoły czteroklasowe dominowały w systemie szkolnictwa elementarnego. Ograniczały one jednak możliwości dalszego kształcenia uczniów w gimnazjum, gdyż edukację na poziomie wyższym można było kontynuować po ukończeniu klasy VI drugiego lub trzeciego szczebla. Brak drożności systemu był ujemnym elementem tej reformy. Nauczyciele realizowali w całości program nauczania I i II szczebla oraz najważniejsze z trzeciego. W owym czasie siedmioklasowa szkoła powszechna, najwyżej zorganizowana, przyjęta została za podstawę organizacyjną i programową ustroju szkolnego. Reforma zakładała również funkcjonowanie szkolnictwa zawodowego, którego zadaniem było przygotowanie do życia gospodarczego wykwalifikowanych robotników dzięki nauce teoretycznej i praktycznej[19].

Reforma z marca 1932 roku oprócz zmian organizacyjnych i programowych wprowadziła obowiązek kształcenia do 18 roku życia, przedłużono go o cztery lata w porównaniu z ustawą z 17 marca 1921. Zniosła też podział gimnazjów na niższego i wyższego stopnia oraz ich profilowanie. Specjalizację wprowadzono dopiero w liceach. Ukończenie ich dawało możliwość ubiegania się na studia wyższe[20].

Lata 1918–1932 stanowiły okres intensywnych przemian zmierzających do rozwoju oraz unifikacji systemu oświaty w odrodzonym państwie polskim. W pierwszych latach po odzyskaniu niepodległości ogromnym wyzwaniem było przezwyciężenie różnic wynikających z funkcjonowania trzech odmiennych systemów szkolnych, pozostawionych przez państwa zaborcze. Podejmowane działania organizacyjne i legislacyjne miały na celu stworzenie spójnej struktury szkolnictwa, ujednolicenie programów nauczania oraz zapewnienie powszechnego dostępu do edukacji. Proces ten miał charakter wieloetapowy i obejmował działania zmierzające do kształtowania wspólnych standardów kształcenia oraz reorganizację administracji szkolnej. Pozytywnym zakończeniem tych działań była reforma jędrzejewiczowska, która

[19]Ustawa z dnia 11 marca 1932 r. o ustroju szkolnictwa, https://isap.sejm.gov.pl/isap.nsf/DocDetails.xsp?id=wdu19320380389, (dostęp:22.10.2022).
[20] Ibidem

wprowadziła jednolite ramy organizacyjne systemu oświaty w Polsce i uporządkowała strukturę szkolnictwa powszechnego oraz średniego.

W latach 1939–1944, polski system szkolnictwa miał charakter tymczasowy. Organizacja szkół określana została przez instrukcje wydawane przez władze Polskiego Państwa Podziemnego i Departament Oświaty i Kultury Delegatury Rządu na Kraj. Już od 1 września 1939 roku okupant z pełną brutalnością przystąpił do niszczenia kultury polskiej. Na terenach okupowanych przez niemieckich zaborców zlikwidowano szkoły wyższe, średnie i powszechne. Tworzono natomiast niemieckie szkoły z niemieckimi nauczycielami, których celem była germanizacja ludności lokalnej. Polskie społeczeństwo, przeciwstawiając się likwidacji polskich szkół oraz germanizacji, odpowiedziało tajnym nauczaniem. Nauczyciele, ryzykując własne życie, stworzyli konspiracyjny system nauczania. W szkołach powszechnych nauczano geografii, historii, literatury i gimnastyki zgodnie z wcześniej obowiązującym programem nauczania. Na obszarze pod okupacją radziecką sytuacja w szkołach wyglądała podobnie jak pod okupacją niemiecką. Ze szkół usunięto polskich nauczycieli, dyrektorów i kierowników. Z planu zajęć skreślano naukę religii oraz ograniczono zakres nauczania takich przedmiotów, jak historia, geografia i literatura polska.

Powojenny polski system oświaty zaczął już kształtować się w okresie okupacji. Pierwszym aktem prawnym, który wprowadził powszechne i bezpłatne nauczanie na wszystkich szczeblach oraz zasadę klas jednorocznych był Manifest Lipcowy ogłoszony 22 lipca 1944 roku. Jego wytyczne miały likwidować trójstopniowość szkoły powszechnej, zalecały wprowadzenie w szkołach wiejskich jednolitego programu niezależnie od stopnia organizacyjnego szkoły. Kolejne zmiany organizacyjne w szkołach wprowadzono instrukcją Ministerstwa Oświaty z dnia 15 lipca 1945 roku. W wytycznych czytamy: „Poprawy ustroju szkolnego można dokonać przez taką organizację nauczania, w której wszystkie szkoły posiadałyby jednakowy program, a wszystkie klasy obejmowałyby tylko pojedyncze roczniki, uczące się oddzielnie. Postulatu tego nie da się w pełni zrealizować, szczególnie co do nauki rozdzielnej, jednakże już od początku pracy nad wznowieniem szkolnictwa polskiego należy dążyć, by największa liczba dzieci w obwodzie szkolnym miała możność ukończenia 7 klas szkoły powszechnej o pełnym programie nauczania”[21]. Wytyczne dotyczące organizacji roku szkolnego

[21] Wytyczne organizacji publicznych szkół powszechnych w roku szkolnym 1944/45, Resort Oświaty PKWN, Lublin 1944; Dz.U. z 1944 roku, nr 1 (załącznik nr 1). Por. też: Ajnenkiel A., Polskie konstytucje, Warszawa 1982, s. 350–358. Pierwsze kodyfikacje podstawowych zasad budowy nowego systemu oświaty w Polsce Ludowej znalazły swoje miejsce w pracach programowych i dokumentach Polskiej Partii Robotniczej z lat 1942–1944. Zob. PPR. Rezolucje, odezwy, instrukcje i okólniki Komitetu Centralnego od sierpnia 1944 roku do grudnia 1945 roku, Warszawa 1959, s. 8.

1944/45 obowiązywały również w 1945/46[22]. Instrukcja w sprawie realizacji obowiązku szkolnego i organizacji szkół powszechnych w roku szkolnym 1945/46 wprowadziła powszechną ośmioklasową, bezpłatną, publiczną i jednolitą pod względem programów nauczania strukturę szkoły. Zakładała również odejście od przedwojennej ustawy o ustroju szkolnym z 1932 roku. Nauczanie początkowe obejmowało klasy I-IV. Organizację szkoły uzależniono od liczby dzieci w obwodzie szkolnym.

W latach 1945–1947 występowało zróżnicowanie w strukturze i organizacji oświaty, na które składało się ciągłe funkcjonowanie przedwojennych form szkolnictwa, struktur przejściowych oraz całkiem nowych rozwiązań w zakresie oświaty. Obok siedmioletnich szkół powszechnych funkcjonowały ośmiolatki, a oprócz szkół średnich starego typu (czteroklasowe gimnazjum i dwuletnie liceum) – czteroletnie licea. Dlatego też w roku szkolnym 1948/49 instrukcją Ministra Oświaty z dnia 4 maja 1948 roku wprowadzono korektę do założeń reformy z 1945 roku, która wprowadzała koncepcję 11-letniej szkoły ogólnokształcącej[23].

Kolejny dekret o obowiązku szkolnym wprowadzono 23 marca 1956 roku. Usankcjonował on powszechność i obowiązkowość kształcenia w szkole podstawowej dzieci w wieku 7 − 16 lat. Dzieci z dysfunkcjami realizowały obowiązek szkolny w szkołach specjalnych[24].

Okres trwający do połowy lat pięćdziesiątych został nazwany okresem rekonstrukcji. W tym czasie „wprowadzono jednolitą pod względem programowym i organizacyjnym szkołę podstawową, zmieniając przy tym różnice w poziomie nauczania oraz warunki pracy szkół w mieście i na wsi; upowszechniono kształcenie w zasadniczych szkołach zawodowych oraz zwiększono liczbę młodzieży uczącej się w szkołach maturalnych – ogólnokształcących i zawodowych. Rozbudowano szkolnictwo policealne. Udostępniono studia wyższe. Utworzono zróżnicowaną pod względem merytorycznym i organizacyjnym sieć edukacji równoległej”[25].

Kompleksowe zmiany w zakresie funkcjonowania szkół dokonano Ustawą z dnia 15 lipca 1961 roku o rozwoju systemu oświaty i wychowania[26]. Było to pierwsze i jednocześnie całościowe uregulowanie zagadnień dotyczących szkolnictwa, wydane po II wojnie światowej.

[22] Wytyczne organizacji publicznych szkół powszechnych w roku szkolnym 1944/45…, op.cit.
[23] Instrukcja z dnia 4 maja 1948 roku w sprawie organizacji roku szkolnego 1948/49 w szkolnictwie ogólnokształcącym (Dz. Urz. Min. Ośw.,1948 nr 5, poz. 86), [w:] https://jbc.bj.uj.edu.pl/Content/379989/PDF/NDIGCZAS018608_1948_66379862_67298732.pdf (dostęp: 4.05.2023)
[24] Dekret z dnia 23 marca 1956 r. o obowiązku szkolnym, Dz.U. 1956 nr 9 poz. 52, https://isap.sejm.gov.pl/isap.nsf/DocDetails.xsp?id=WDU19560090052#:~:text=Dz.U.%201956%20nr%209%20poz.%2052, (dostęp:26.11.2022r.).
[25] Kupisiewicz Cz., Koncepcje reform szkolnych w latach osiemdziesiątych, Warszawa 1994, s. 108.
[26] USTAWA z dnia 15 lipca 1961 r. o rozwoju systemu oświaty i wychowania, Dz.U.1961.32.160, https://www.prawo.pl/akty/dz-u-1961-32-160,16785051.html, (dostęp:26.11.2022).

Wprowadzono 8-klasową szkołę podstawową. Na ich podbudowie tworzone były szkoły średnie, do których zaliczano licea ogólnokształcące, technika i licea zawodowe. Nauka w liceach ogólnokształcących trwała 4 lata, w technikach zawodowych i liceach zawodowych -cztery lub pięć - zależnie od specjalności. Istniały również zasadnicze szkoły zawodowe. Przygotowywały one do pracy robotników, pracowników i rolników. Nauka trwała w nich - od dwóch do trzech lat.

Kolejnym ważnym dokumentem w zakresie oświaty była Uchwała Sejmu Polskiej Rzeczypospolitej Ludowej z dnia 13 października 1973 r. wprowadzająca nową reformę szkolną. Obowiązywała do stycznia 1982 roku[27]. Zakładała ona przyjęcie 10-letniej szkoły ogólnokształcącej na wzór radziecki, podzieloną na nauczanie początkowe obejmujące klasy I – III i systematyczne w klasach IV – X. Reforma ta określiła, że edukacja wczesnoszkolna będzie obejmowała klasy I-III, a nie jak dotychczas I-IV. Skrócony został więc czas nauki z czterech do trzech lat[28]. W roku 1980 rząd, a w 1982 Sejm wstrzymał reformę, podając jako powód trudną sytuację ekonomiczną kraju i negatywny stosunek nauczycieli do reformy. Ponownie wrócono do stanu zawartego w ustawie z 15 lipca 1961 roku.

W 1987 roku powołano Komitet Ekspertów do spraw Edukacji Narodowej pod przewodnictwem Czesława Kupisiewicza. Zadaniem Komitetu było opracowanie raportu o stanie polskiej oświaty i kierunkach jej rozwoju. Raport został przekazany premierowi Tadeuszowi Mazowieckiemu i Ministrowi Edukacji Narodowej - Prof. Henrykowi Samsonowiczowi 13 października 1988 roku. Raport Komitetu Ekspertów do spraw Edukacji Narodowej stał się wskazówką do opracowania podstaw „przeprowadzenia radykalnej reformy systemu edukacji, dostosowanej do wymogów XXI wieku”[29]. „Zasadniczymi celami tej reformy było: upowszechnienie kształcenia na poziomie średnim oraz wyraźny wzrost liczby podejmujących studia wyższe, zwiększenie i wyrównanie szans dostępu do edukacji na wszystkich jej poziomach, sprzyjanie poprawie jakości edukacji przez przywrócenie właściwych proporcji między przekazem wiadomości, kształtowaniem umiejętności a troską o rozwój osobowości – czyli doprowadzenie do zintegrowania procesu wychowania i kształcenia”[30].

Rozpoczęta w 1989 roku transformacja ustrojowa całkowicie zmieniła warunki funkcjonowania polskiego systemu szkolnego. „Nastąpiło przejście z polskiego modelu indoktrynacyjnego, autorytarnego, zarządzanego odgórnie do nowej, pluralistycznej i otwartej rzeczywistości

[27] UCHWAŁA SEJMU POLSKIEJ RZECZYPOSPOLITEJ LUDOWEJ z dnia 13 października 1973 r. w sprawie systemu edukacji narodowej, https://www.prawo.pl/akty/m-p-1973-44-260,16818493.html, (dostęp: 27.11.2022).
[28] Ibidem
[29] Książek W., Rzecz o reformie edukacji 1997-2001, Warszawa 2001, s. 5.
[30] Ibidem, s. 15.

ustrojowej bez aksjonormatywnej cenzury”[31]. W dużym stopniu zmodyfikowała potrzeby edukacyjne polskiego społeczeństwa oraz rolę nauczycieli[32]. Wprowadzenie zmian nie było łatwe, gdyż towarzyszyło im ścieranie się poglądów socjalistycznych z solidarnościowymi. Solidarność, która przejęła władzę, nie była do niej całkowicie przygotowana. Nie posiadała odpowiedniego zaplecza programowego, organizacyjnego i ludzkiego. Ponadto odrzucenie systemu socjalistycznego nie oznaczało natychmiastowego przerwania instytucjonalności państwa.

Lata dziewięćdziesiąte to kolejne zmiany w edukacji. Ustawa o systemie oświaty z 7 września 1991 roku[33] zakładała demokratyzację szkolnictwa i jego adaptację do społeczeństwa wolnorynkowego, wzrost autonomii szkoły i nauczycieli. Określała rodzaje funkcjonujących szkół oraz przedszkoli, zapewniała dzieciom, tak jak poprzednie ustawy, bezpłatną naukę, w ośmioklasowej szkole podstawowej, która była obowiązkowa - identycznie jak w ustawie z 1961 roku. Według ustawy szkoła była świecka, ale respektowane było prawo rodziców do religijnego wychowania dzieci. Na ich życzenie mogły być organizowane lekcje religii w szkole, w przeciwieństwie do uchwały z 1961 roku. Ustawa ta zapewniała realizację prawa do nauki, zarówno w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych. Rozbudowała system oświaty o korzystanie z placówek oświatowo-wychowawczych, poradni wychowawczo-zawodowych po rodziny zastępcze, ośrodki adopcyjno-opiekuńcze oraz ochotnicze hufce pracy, zakłady kształcenia i doskonalenie nauczycieli i biblioteki pedagogiczne. Zezwalała dzieciom i młodzieży niepełnosprawnej oraz niedostosowanej społecznie na pobierania nauki we wszystkich typach szkół. Jest to rozwiązanie korzystne dla tych dzieci i młodzieży, gdyż mogą pobierać naukę zarówno w szkołach ogólnodostępnych, jak i integracyjnych. Stanowi to pozytywny element tej ustawy, gdyż dzieci te nie były izolowane tak, jak w ustawie z 1932 roku, czy tej z 1961, w której nauka odbywała się w szkołach specjalnych czy ośrodkach. Dawała możliwość dzieciom szczególnie uzdolnionym realizowania indywidualnych programów nauczania oraz ukończenie szkoły w krótszym czasie. Obejmowała rocznym przygotowaniem przedszkolnym wszystkie dzieci w wieku 6 lat - są to tak zwane zerówki, które funkcjonują do chwili obecnej.

Kolejne istotne zmiany w edukacji zostały wprowadzone 15 maja 1997 roku na mocy zarządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 15 maja 1997 r. w sprawie podstaw programowych obowiązkowych przedmiotów ogólnokształcących[34], a które weszło w życie 1 września

[31] B. Śliwerski, Problemy współczesnej edukacji: dekonstrukcja polityki oświatowej III RP, Kraków 2009, s. 64.
[32] Dylak S., Pęczkowski R., Denicolo P., Procesy globalizacji nauczycieli-spojrzenie międzykulturowe, Poznań-Rzeszów 2006, s.11.
[33] Ustawa z dnia 7 września 1991 r. o systemie oświaty. Dz.U. 1991 nr 95 poz. 425, https://isap.sejm.gov.pl/isap.nsf/DocDetails.xsp?id=WDU19910950425, (dostęp:26.11.2022).
[34] Zarządzenie Nr 8 Ministra Edukacji Narodowej z dnia 15 maja 1997 r. w sprawie podstaw programowych obowiązkowych przedmiotów ogólnokształcących, Dz. Urz. MEN Nr 5, poz. 23.

1997 roku. Szerzej o tym napisze w kolejnym podrozdziale *2.2. Podstawa programowa – konstytutywny dokument polskiej edukacji.*

W 1999 roku Minister Oświaty Mirosław Handke, ustawą z dnia 8 stycznia 1999 r., usankcjonował przepisy wprowadzające następną reformę ustroju szkolnego. Miała ona charakter strukturalny i programowy. Zlikwidowano 8-klasową szkołę podstawową oraz 4-lentnie licea i 5-letnie technika, wprowadzając 6-letnią szkołę podstawową, 3-letnie gimnazjum, 3-letnie liceum[35]. Wprowadzono nowe programy nauczania. Uczniowie kończący dany etap edukacyjny poddani zostali egzaminom zewnętrznym. Wprowadzono stopnie awansu zawodowego dla nauczycieli. Zmiany strukturalne wprowadzone w wyniku reformy przedstawia tabela nr 6.

Tabela 6. Zmiany strukturalne po roku 1999

Struktura systemu oświaty przed 1999 rokiem	Struktura systemu oświaty po 1999 roku
Przedszkola	Przedszkola
	„Zerówki" – oddziały przygotowujące do rozpoczęcia nauki w szkole podstawowej
Ośmioklasowe szkoły podstawowe.	Sześcioklasowe szkoły podstawowe.
	Trzyletnie gimnazja
Czteroletnie licea ogólnokształcące	Trzyletnie licea
Pięcioletnie technika	Czteroletnie technikum
Szkoły zawodowe	Szkoły zawodowe – dwu lub trzyletnie
Szkoły policealne	Licea profilowane
	Szkoły policealne trzy lub czterosemestralne

Źródło: Opracowanie własne

Jak pokazują dane zawarte w tabeli nr 6, od 1 września 1999 roku w miejsce dotychczasowych 8-letnich szkół podstawowych, 4-letnich liceów ogólnokształcących i 5-letnich techników oraz szkół zawodowych pojawiły się 6-letnie szkoły podstawowe i trzyletnie gimnazja. Po ich ukończeniu uczniowie mieli iść do zupełnie nowych szkół ponadgimnazjalnych. Zmienił

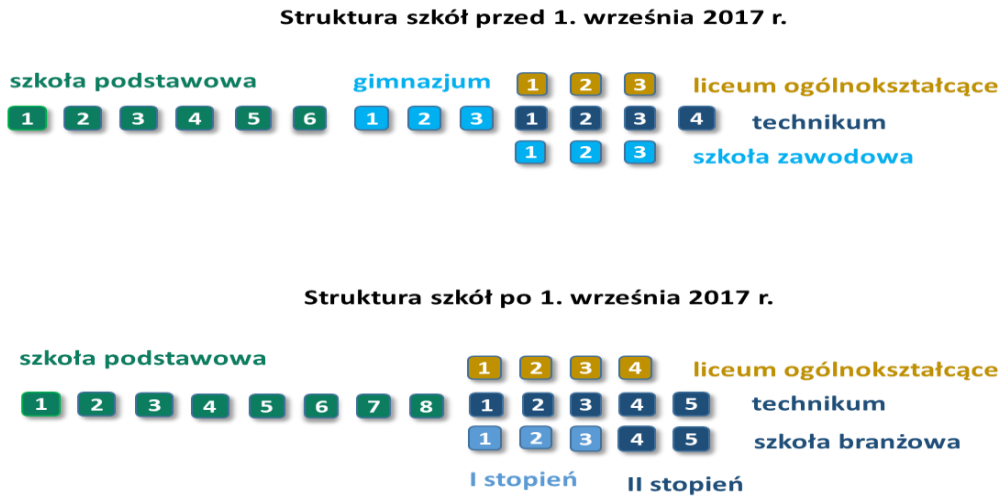
[35]Ustawa z dnia 8 stycznia 1999 r. - Przepisy wprowadzające reformę ustroju szkolnego., Dz.U. 1999 nr 12 poz. 96, https://isap.sejm.gov.pl/isap.nsf/DocDetails.xsp?id=WDU19990120096, (dostęp: 29.09.2019).

się również charakter finansowania „(…) z dystrybucyjnego, opartego na jednym źródle zasilania (budżet państwa) na przetargowe, w którym partycypują różne podmioty (pracodawcy, samorządy lokalne, organizacje zawodowe, towarzystwa oświatowe, fundacje (…)”[36].
W klasach I-III przyjęto koncepcję kształcenia zintegrowanego, odnosząc się do obszarów kształcenia (dziedzin edukacji), a rezygnując z nauczania przedmiotowego. Zlikwidowano 45-minutowe lekcje na poczet swobodnych zajęć, dostosowując ich czas do aktywności dzieci. „Nową strukturą organizacyjną stał się ośrodek tematyczny, znany też pod nazwą „dzień wielokierunkowej aktywności dziecka”, który skupiał treści edukacyjne z poszczególnych obszarów kształcenia, które zostały skorelowane i odniesione do jednej tematyki w ciągu dnia aktywności. Novum było także wprowadzenie oceniania opisowego, rezygnując z ocen stopniem jako szkodliwego elementu edukacji, powodującego stygmatyzowanie uczniów. Zwrócono też uwagę na nieodzowność stosowania metod problemowych, aktywizujących, w celu pobudzenia aktywności ucznia i urozmaicenia zajęć. Dlatego ważnym stało się wdrożenie do edukacji nowoczesnych środków kształcenia w postaci technik audiowizualnych i edukacji komputerowej. Ważną rolę postawiono ścisłej współpracy z rodzicami, której celem było udzielanie wsparcia rodzicom w kształceniu i wychowaniu ich dzieci”[37].

Następna reforma została wprowadzona 1 września 2009 roku przez Katarzynę Hall. Wprowadziła ona zmiany w podstawach programowych we wszystkich typach szkół. Elementami tej reformy było upowszechnianie edukacji przedszkolnej dla dzieci w wieku 3-5 lat. Obniżono również wiek szkolny. Obowiązkiem szkolnym objęte zostały dzieci sześcioletnie. W latach 2009-2011 nie był to obowiązek obligatoryjny; o wcześniejszym pójściu dziecka do szkoły decydowali rodzice i dyrektor szkoły. Dopiero 1 września 2012 roku stał się dniem, w którym naukę rozpoczęły wszystkie dzieci sześcioletnie. Ważnym posunięciem było wprowadzenie obowiązkowego języka nowożytnego dzieciom już od klasy I-ej.

Pierwszy września 2017 roku to kolejna zmiana systemu oświaty z inicjatywy Minister Edukacji Narodowej Anny Zalewskiej. „Miała ona charakter strukturalny i programowy. Przywracała strukturę szkoły, którą wprowadzała ustawa z dnia 15 lipca 1961 roku o rozwoju systemu oświaty i wychowania opierającego się na 8-letniej szkole podstawowej, 4-letnim liceum ogólnokształcącym i 5-letnim technikum, a także 3-letniej branżowej szkole I stopnia i 2-letniej II stopnia”[38] (Infografika nr 19).

[36] Banach Cz., Polska szkoła i system edukacji: przemiany i perspektywy, Toruń 1999, s. 25.
[37] Brzezińska R., Koncepcje edukacji wczesnoszkolnej w ujęciu historycznym, s. 182. https://czasopisma.mazowiecka.edu.pl/index.php/sej/article/view/773/766, (dostęp: 29.09.2019).
[38] Marciniak Z., Podstawa programowa z komentarzem, Warszawa 2008, s.8.



Infografika 19. Zmiana struktury szkół po 2017 roku

Źródło: Opracowanie na podstawie dokumentu NIK [39]

Reforma z 2017 roku została wprowadzona na mocy ustawy z dnia 14 grudnia 2016 roku - Prawo oświatowe[40]. Przedmiotem największych kontrowersji tej reformy było tempo przeprowadzonych zmian i krótki okres przejściowy. Od przyjęcia ustawy Prawo oświatowe w dniu 14 grudnia 2016 r. do wprowadzenia reformy w życie 1 września 2017 r. minęło niecałe dziewięć miesięcy, skutkujące koniecznością przygotowania nowych podstaw programowych oraz podręczników. Problemem stała się konieczność dostosowania w krótkim czasie budynków szkół i ich wyposażenia na potrzeby zmienionego ustroju szkolnego oraz zapewnienia właściwej higieny nauki i pobytu w szkole. Z kolei obawy rodziców dotyczyły również tzw. kumulacji roczników w I klasie szkół średnich w roku szkolnym 2019/2020 z uwagi na jednoczesne zakończenie nauki przez uczniów klasy VIII szkoły podstawowej oraz klasy III wygaszanych gimnazjów. Natomiast nauczyciele, szczególnie gimnazjów, obawiali się utraty miejsc pracy po całkowitym zamknięciu tego rodzaju szkół w 2019 r.

Od września 2019 r. zmieniło się oblicze zreformowanych szkół ponadpodstawowych. Zaczęły obowiązywać w nich nowe podstawy programowe kształcenia ogólnego i ramowe plany nauczania. Jednocześnie rok szkolny 2019/2020 był rokiem przełomowym, gdyż w klasach

[39] Najwyższa Izba Kontroli, Departament Nauki, Oświaty i Dziedzictwa Narodowego, Informacja o wynikach kontroli. Zmiany w systemie oświaty, KNO.430.002.2019 Nr ewid. 42/2019/P/18/027/KNO, Warszawa 20.05.2019, s.7, [w:] https://www.nik.gov.pl/plik/id,20607,vp,23235.pdf ,(dostęp: 25.05.2022)

[40] USTAWA z dnia 14 grudnia 2016 r. Prawo oświatowe, Dz.U. 2017 poz. 59, https://isap.sejm.gov.pl/isap.nsf/download.xsp/WDU20170000059/T/D20170059L.pdf, (dostęp:29.09.2019).

I liceów ogólnokształcących, techników i branżowych szkół I stopnia naukę rozpoczęły równolegle dwa roczniki uczniów - młodzież kończąca klasę III gimnazjum i dzieci kończące klasę VIII szkoły podstawowej. Nauczyciele szkół ponadpodstawowych przez trzy kolejne lata uczyli równolegle absolwentów gimnazjów i szkół podstawowych w dwóch różnych systemach. Uczniowie kończący gimnazjum podejmowali kształcenie w 3-letnich liceach ogólnokształcących lub 4-letnich technikach, natomiast uczniowie kończący klasę VIII szkoły podstawowej rozpoczynali naukę w 4-letnim liceum lub 5-letnim technikum. Uczniowie mogli także kontynuować naukę w I klasie branżowej szkoły I stopnia.

Należy w tym miejscu podkreślić, że system edukacji ciągle ewaluuje, gdyż zmieniają się uwarunkowania ekonomiczne, demograficzne, historyczne, społeczne, naukowe, kulturowe, pedagogiczne. Zmieniają się również częściowo cele i zadania polityki oświatowej ze względu na powiązanie z polityką i realiami edukacyjnymi krajów Unii Europejskiej. Duży wpływ na politykę oświatową ma zmiana władzy. Niestety każda ekipa neguje zmiany wprowadzone przez poprzedników. Nie przeprowadza dokładnej analizy stanu poprzedniego. Nie dba o zachowanie ciągłości zmian. Wprowadza swój porządek. Nie zawsze jest on do końca przemyślany i zgodny z oczekiwaniami społeczeństwa. Często wprowadzane zmiany w szkołach nie wpływają pozytywnie na ich funkcjonowanie. „Obecna społeczność uczniowska doświadczyła niemalże permanentnych zmian, co mogło rodzić niepewność i dodatkowy stres dla uczniów, rodziców, jak i nauczycieli[41]".

Zaprezentowany przeze mnie rys historyczny rozwoju systemu oświaty w Polsce może mieć istotny wpływa na sposób kształtowania kompetencji matematycznych uczniów oraz rozwój ich kultury matematycznej. W poszczególnych epokach zmieniało się rozumienie roli matematyki w edukacji. W szkolnictwie średniowiecznym i wczesno nowożytnym matematyka była częścią klasycznego quadrivium, obejmującego arytmetykę, geometrię, astronomię i muzykę, a jej nauczanie miało charakter przede wszystkim teoretyczny. Dopiero reformy oświeceniowe zwróciły większą uwagę na praktyczne znaczenie wiedzy matematycznej w życiu społecznym i gospodarczym, podkreślając kompetencje analityczne uczniów, umiejętności rozumowania czy potrzebę rozwijania racjonalnego myślenia. Należy podkreślić, że reformy też promują nowoczesne koncepcje dydaktyczne, co może prowadzić do większej aktywności poznawczej uczniów, rozwijania samodzielności w myśleniu oraz umiejętności matematycznych, związanych na przykład z interpretowaniem otrzymanych wyników. Ponadto jednym z mechanizmów wpływu reform edukacyjnych na rozwój kultury matematycznej u uczniów mogą być

[41] Najwyższa Izba Kontroli, Departament Nauki, Oświaty i Dziedzictwa Narodowego, Informacja o wynikach kontroli…, op. cit., s. 6.

sukcesywnie wprowadzane i modyfikowane podstawy programowe, które definiują, co uczeń powinien umieć po zakończeniu etapu edukacyjnego. Realizacja przez nauczycieli podstawy programowej do nauczania matematyki na określonym szczeblu edukacji może rozwijać u uczniów umiejętność logicznego myślenia czy dostrzegania związków między pojęciami matematycznymi. Stąd w kolejnym podrozdziale zaprezentuję i dokonam analizy podstawy programowej, która jest konstytutywnym dokumentem polskiej edukacji.

2.2. Podstawa programowa – konstytutywny dokument polskiej edukacji

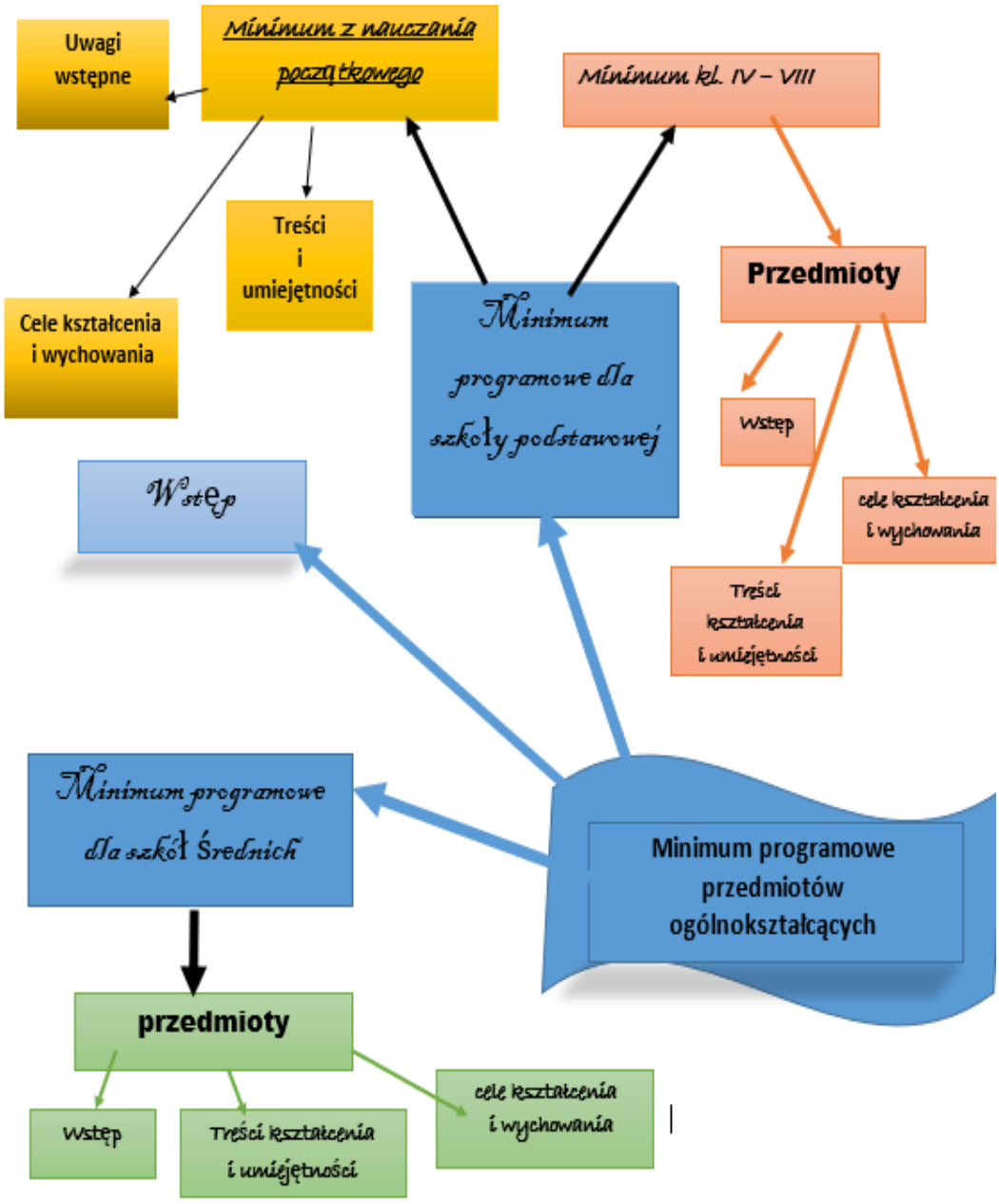
„Źródeł rozstrzygnięć formalno-prawnych, określanych mianem „podstawa programowa", należy upatrywać w działalności powołanego w 1972 roku Instytutu Programów Szkolnych"[42]. Instytut ten między innymi zajmował się opracowywaniem: założeń dydaktyczno-wychowawczych szkół ogólnokształcących, modeli treściowych kształcenia ogólnego dla określonych szczebli i typów szkół oraz założeń dydaktyczno-wychowawczych poszczególnych przedmiotów nauczania, koncepcji pracy wychowawczej szkoły, związanej z procesem dydaktycznym, planów i programów nauczania, form i metod realizacji programów nauczania z uwzględnieniem środków dydaktycznych, ogólnych koncepcji treściowych i metodycznych podręczników dla ucznia i nauczyciela; podejmowanie odpowiednich inicjatyw wydawniczych oraz dokonywanie oceny podręczników[43]. Instytut Programów Szkolnych, wobec licznych przeobrażeń dokonujących się w Polsce po 1989 roku, został zlikwidowany, a jego zadania przejęło Ministerstwo Edukacji Narodowej, które w sierpniu 1992 roku opracowało i wdrożyło do systemu edukacji w postaci zarządzenia *Minimum programowe przedmiotów ogólnokształcących w szkołach podstawowych i średnich*[44]. Minimum programowe wraz z programami nauczania dopuszczonymi do użytku szkolnego stanowiło dla nauczyciela podstawę do takiego zorganizowania procesu nauczania (w tym zaplanowania rozkładu materiału), który umożliwi uczniom opanowanie co najmniej wiedzy i umiejętności ustalonych w minimum programowym oraz wybra-

[42] Dylak S., Gołębniak B.D., Pęczkowski R., Podstawa programowa, standardy kształcenia, programy nauczania oraz rozkład materiału nauczania….,[w:] https://wspolna-szkola.pcss.pl/podstawa-programowa-standardy-ksztalcenia-programy-nauczania-oraz-rozklad-materialu-nauczania/ (dostęp: 09.06.2023).
[43] Uchwała Nr 161 Rady Ministrów z dnia 15 czerwca 1972 r. w sprawie utworzenia Instytutu Programów Szkolnych, https://sip.lex.pl/akty-prawne/mp-monitor-polski/utworzenie-instytutu-programow-szkolnych-16818096, (dostęp: 09.06.2023).
[44] Zarządzenie nr 23 Ministra Edukacji Narodowej z dnia 18 sierpnia 1992 r. w sprawie minimum programowego obowiązkowych przedmiotów ogólnokształcących, Dz.Urz.MEN.1992.5.25 , https://sip.lex.pl/akty-prawne/dzienniki-resortowe/minimum-programowe-obowiazkowych-przedmiotow-ogolnoksztalcacych-33631435, (wersja na dzień: 18.04.2021).

nych przez nauczyciela treści i umiejętności określonych w programie danego przedmiotu, odpowiednio do zainteresowań i możliwości uczniów[45]. Niestety, „Minima programowe *de facto* adresowane były nie do nauczycieli, ale do twórców programów nauczania, które to programy musiały uzyskać zgodę Ministerstwa Edukacji Narodowej na dopuszczenie ich do użytku szkolnego. Zestaw ten (minimum programowe + program nauczania) stanowił dla nauczyciela podstawę organizacji procesu nauczania, który umożliwi uczniom opanowanie wiedzy i umiejętności ustalonych w minimach programowych oraz wybranych przez nauczyciela treści i umiejętności określonych w programie danego przedmiotu”[46].

Treści tymczasowych minimów programowych przeważnie pomijały podział na klasy. Spowodowane to było elastycznością ramowego planu nauczania, który to pozwalał dyrektorowi szkoły na przesuwanie godzin nauczania danego przedmiotu pomiędzy klasami w ramach cyklu nauczania. Struktura minimum programowego przedmiotów ogólnokształcących w szkołach podstawowych i średnich, obowiązująca od 1 września 1992 r., wprowadzona zarządzeniem Ministra Edukacji Narodowej nr 23 z dnia 18 sierpnia 1992 r. zdecydowanie kontynuowała filozofię centralistycznego kształtowania wizerunku polskiej szkoły[47]. Strukturę minimum programowego zaprezentowałam na infografice nr 20.

[45]Zarządzenie nr 23 Ministra Edukacji Narodowej z dnia 18 sierpnia 1992 r. w sprawie minimum programowego obowiązkowych przedmiotów ogólnokształcących…, op. cit.
[46] Dylak S., Gołębniak B. D., Pęczkowski R., Podstawa programowa, standardy kształcenia, programy nauczania oraz rozkład materiału nauczania…., https://wspolna-szkola.pcss.pl/podstawa-programowa-standardy-ksztalcenia-programy-nauczania-oraz-rozklad-materialu-nauczania/, (dostęp: 18.01.2024).
[47] Ibidem



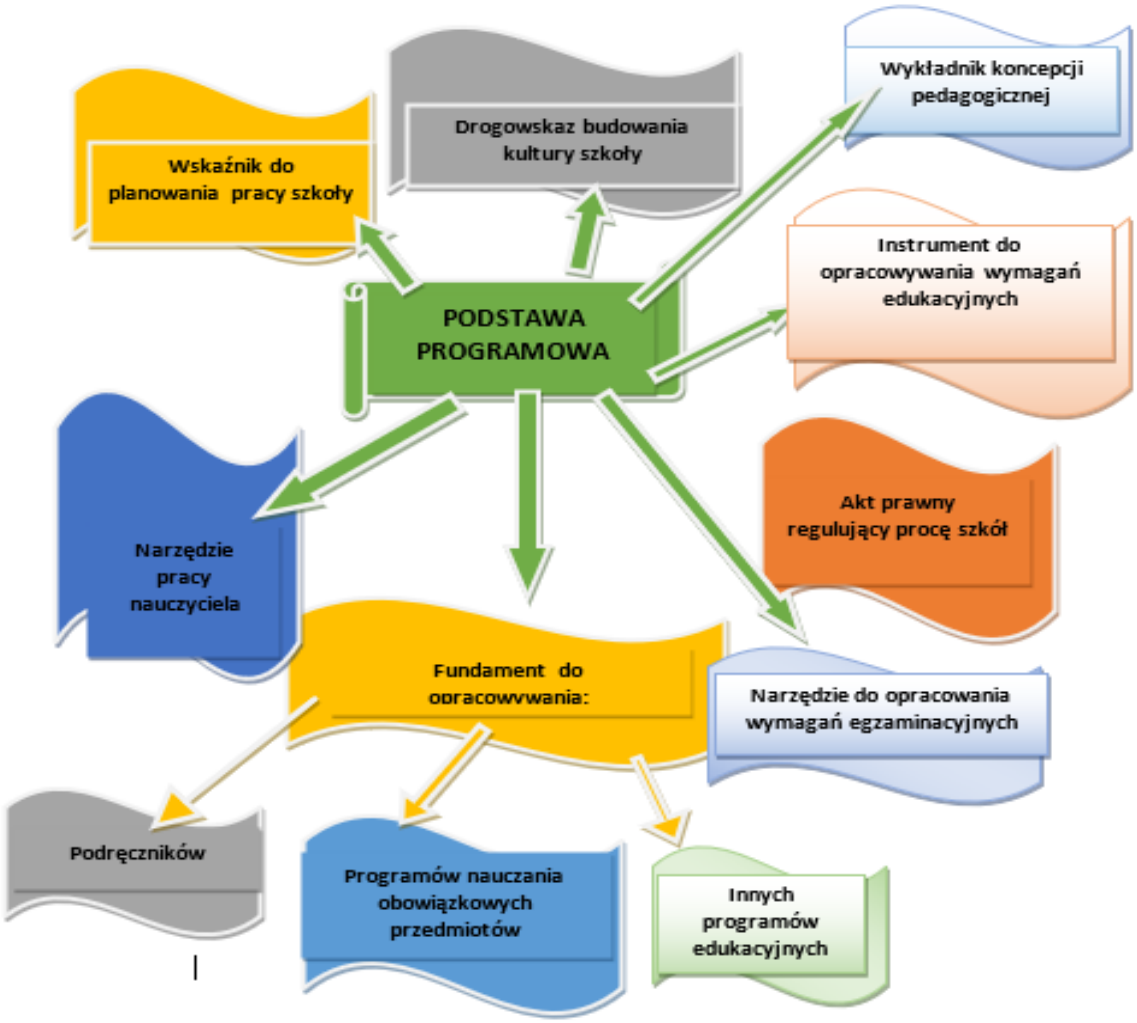
Infografika 20. Struktura Minimum programowego przedmiotów ogólnokształcących w szkołach podstawowych i średnich obowiązujące od 1 września 1992 r.

Źródło: Opracowanie własne

Równocześnie z ogłoszonymi minimami programowymi w Ministerstwie Edukacji Narodowej podjęto prace nad przygotowaniem założeń reformy programowej polskiego systemu edukacji. Powołano zespół, którym kierował ówczesny dyrektor Departamentu Strategii MEN, Sławomir Ziemicki. Zadaniem tego zespołu było opracowanie założenia reformy systemu edukacji w Polsce, w tym szczególnie reformy programowej tego systemu, a egzemplifikacją podjętych działań miała być pierwsza w polskim systemie oświaty podstawa programowa.

Pierwsza podstawa programowa wprowadzona została Zarządzeniem MEN z 15 maja 1997 roku[48]. Dokument określał zadania szkoły, czyli edukacyjną ofertę z zakresu kształcenia ogólnego, jaką szkoła powinna przedstawić uczniom. Ustalając zadania, położono nacisk na kształtowanie umiejętności przygotowujących uczniów do życia w demokratycznym społeczeństwie o wolnorynkowej gospodarce. Uwzględniano przy tym zarówno problematykę wynikającą z akademickich dyscyplin naukowych, jak też z obowiązujących w Rzeczypospolitej Polskiej aktów prawnych oraz podpisanych przez władze umów i konwencji międzynarodowych. Podstawy programowe, wskazując na edukacyjne zadania szkoły, nie ustaliły bezpośrednio wymagań stawianych uczniom, ale stanowiły źródło określenia wymagań egzaminacyjnych oraz ustaliły kryteria ocen szkolnych, co zostało uszczegółowione w innym zarządzeniu[49]. Warto w tym miejscu podkreślić, że „Podstawy programowe oraz wynikające z nich standardy kształcenia, definiowane jako efekty i procesy uczenia się, nie są wypracowywane w próżni ontologiczno-epistemologicznej. I nie jest też tak, że pomijają społeczno-kulturowy kontekst ich powstawania oraz „działania". U ich podstaw leżą bardziej czy mniej wyraźnie artykułowane tezy dotyczące roli szkoły w społeczeństwie, rozumienie istoty oferowanej edukacji, towarzyszące mu argumenty filozoficzne, w tym także te dotyczące istoty (i rodzajów) wiedzy, a także sposoby jej zdobywania. Nie bez znaczenia okazuje się także sformułowanie podstaw psychologicznych w postaci bardziej lub mniej wyraźnych odwołań do teorii uczenia się i rozwoju człowieka"[50]. Poniżej prezentuję istotę podstaw programowych kształcenia ogólnego (infografika nr 21).

[48] Zarządzenie nr 8 Ministra Edukacji Narodowej z dnia 15 maja 1997 r. w sprawie podstaw programowych obowiązkowych przedmiotów ogólnokształcących, Dzienniki resortowe Dz.Urz.MEN.1997.5.23, https://sip.lex.pl/akty-prawne/dzienniki-resortowe/podstawy-programowe-obowiazkowych-przedmiotow-ogolnoksztalcacych-33631758 (dostęp: 24.01. 2023).
[49] Ibidem
[50] Dylak S., Gołębniak B.D., Pęczkowski R., Podstawa programowa, standardy kształcenia, programy nauczania oraz rozkład materiału nauczania, [w:] https://wspolna-szkola.pcss.pl/podstawa-programowa-standardy-ksztalcenia-programy-nauczania-oraz-rozklad-materialu-nauczania/ (dostęp: 24.03.2022).



Infografika 21. Istota podstaw programowych kształcenia ogólnego

Źródło: Opracowanie własne

Podstawa z 15 maja 1997 roku kładła nacisk na kompetencje niezbędne do funkcjonowania w przyszłości. Szkoła miała realizować zadania, organizując edukację w pięciu etapach kształcenia. Etap I, nauczanie elementarne z klasami 1–3. Etap II, nauczanie propedeutyczne zintegrowane – obejmujące klasy 4–6. Etap III, nauczanie przedmiotowe – podstawowe z klasami 7–8. Etap IV, nauczanie przedmiotowe zaawansowane, obejmujące klasy 1–2 szkoły ponadpodstawowej. Etap V, nauczanie przedmiotowe – rozszerzone – końcowy etap szkoły średniej, przygotowujący do matury oraz do podjęcia studiów. Uczniowie mieli prawo dokonywania wyboru przedmiotów ze wskazanych bloków przedmiotowych. Ponadto każdemu etapowi edukacyjnemu przypisano 21 dziedzin edukacyjnych, dzięki którym szkoła wypełniała swoje funkcje. Były to następujące dziedziny: wczesnoszkolna, polonistyczna, historyczna, obywatelska, filozoficzna, język obcy nowożytny, język łaciński i kultura antyczna, edukacja czytelnicza i

edukacyjna, medialna, zdrowotna, wychowanie fizyczne, chemiczna, ekologiczna, fizyczna i astronomiczna, geograficzna, matematyczna, informatyczna, ogólnotechniczna, muzyczna, plastyczna, obronna.

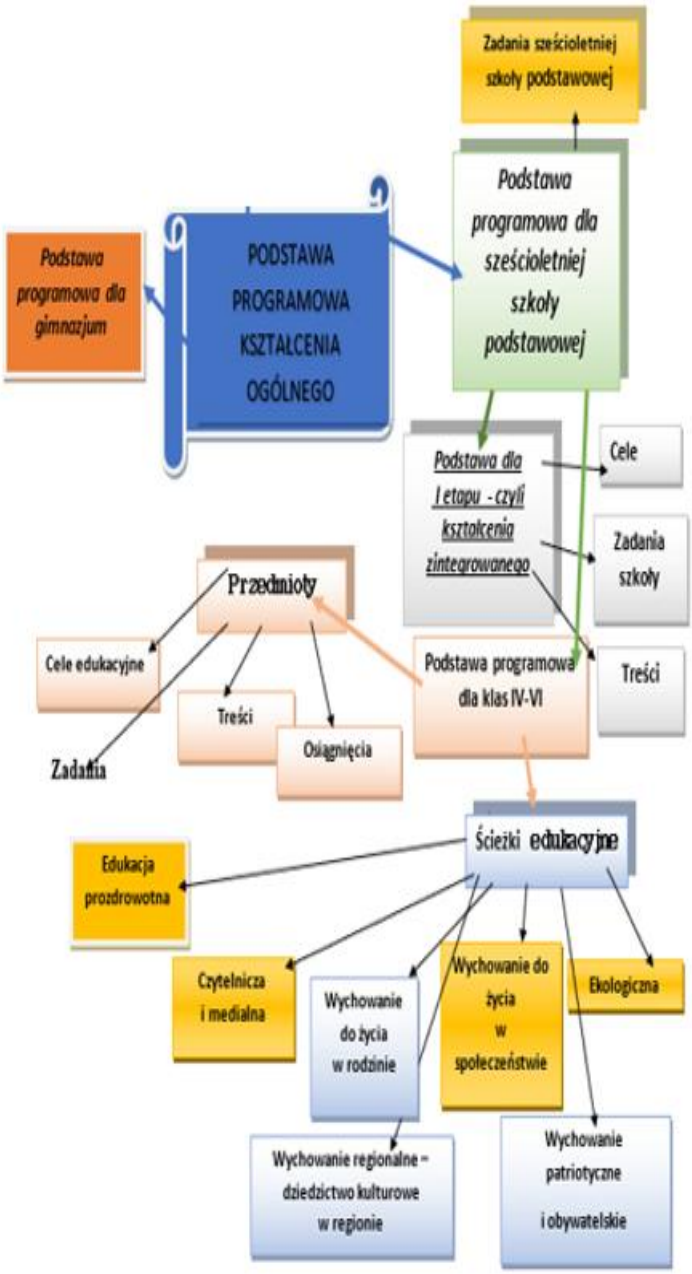
Podstawa z 1997 roku była jedną z bardziej wartościowych, które ukazały się do chwili obecnej, gdyż pozostawiała nauczycielom dużą swobodę w doborze metod i środków. „Na podstawie tego dokumentu nauczyciele poszczególnych przedmiotów mogli budować własne programy nauczania oraz opracowywać standardy wymagań wobec uczniów dla każdego etapu edukacji, ale zgodnie z centralnie ustalonymi standardami osiągnięć uczniowskich. Dla każdego typu edukacji i w odniesieniu do każdego z etapów kształcenia opracowano kluczowe (ogólne, uniwersalne) kompetencje uczniów oraz ich składowe, które miały stać się podstawą do wypracowania systemu oceniania wiedzy, umiejętności, postaw uczniów oraz wykonywanych zadań. Przewidywano też wprowadzenie programów międzyprzedmiotowych oraz zintegrowanych, akceptując prawo dostosowania ich do lokalnych uwarunkowań szkoły”[51]. Niestety, w wyniku zmiany układów politycznych, jakie dokonały się po wyborach w 1997 roku, zawieszono wprowadzenie podstawy programowej do praktyki szkolnej. Nowe władze oświatowe za podstawowy cel swojej działalności uznały konieczność dokonania totalnej reformy strukturalnej i programowej polskiego systemu edukacji.

Kolejna podstawa programowa z 15 lutego 1999 roku różniła się diametralnie od poprzedniej. Przede wszystkim zawierała tylko to, co uczyć, a nie jak zakładał Instytut Programów Szkolnych powołany w 1972 – czego uczyć i jak uczyć[52]. Podstawa została zupełnie zmieniona w obszarze treści. W przypadku edukacji wczesnoszkolnej istota zmiany polegała na tym, że autorzy określili cele i zadania edukacji wczesnoszkolnej oraz 55 szczegółowych treści w formie haseł, na przykład pisanie liter, łączenie liter w sylaby, pisanie wyrazów, zdań; działania arytmetyczne (dodawanie, odejmowanie, algorytmy dodawania i odejmowania pisemnego, mnożenie, algorytm mnożenia pisemnego przez liczby jednocyfrowe, dzielenie), kolejność wykonywania działań itp. Zupełnie lub prawie zupełnie, pominięto w tej podstawie warunki, jakie powinny być utworzone w toku realizacji tego etapu edukacji, a które miały umożliwić nauczycielom i uczniom możliwość kształtowania podstawowych kompetencji niezbędnych w dalszej edukacji[53]. Podstawa ta, stała się głównym instrumentem pozwalającym, rządowi sterować

[51] B. Śliwerski, Problemy współczesnej edukacji …, op. cit. s. 111.
[52] Uchwała Nr 161 Rady Ministrów z dnia 15 czerwca 1972 r. w sprawie utworzenia Instytutu Programów Szkolnych, https://sip.lex.pl/akty-prawne/mp-monitor-polski/utworzenie-instytutu-programow-szkolnych-16818096, (dostęp: 09.06.2023).
[53] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 15 lutego 1999 r. w sprawie podstawy programowe kształcenia ogólnego, Dz.U. 1999 nr 14 poz. 129 http://isap.sejm.gov.pl/isap.nsf/download.xsp/WDU19990140129/O/D19990129_01.pdf. (dostęp: 11.04.2021).

praktyką oświatową w zdecentralizowanym systemie oświaty. Wprowadziła podział nauczania na etapy, przedmioty i ścieżki edukacyjne. Ponadto zawierała treści nauczania, zadania dydaktyczne, wychowawcze i opiekuńcze szkoły oraz dostarczyła „kontekstu ideologicznego, który ma tłumaczyć i uzasadniać jej szczegółowe postanowienia”[54]. Podstawa programowa skierowana została nie tylko do nauczycieli, ale stała się instrukcją dla twórców programów, autorów podręczników i osób zajmujących się konstruowaniem egzaminów zewnętrznych, używanych w zewnętrznych sprawdzianach i egzaminach, instrukcją „jedyną i wiążącą, dlatego może być zwornikiem systemu sterowania pracą szkół i narzędziem, które pozwala rządowi wpływać na praktykę oświatową w kraju[55]”. Postawa programowa kształcenia ogólnego obowiązująca od 1 września 1999 roku dotyczyła pierwszego, drugiego i trzeciego etapu edukacyjnego oraz wychowania przedszkolnego. Jej elementy przedstawia poniższa infografika 22.

[54] Konarzewski K., Reforma oświaty. Podstawa programowa i warunki kształcenia, Warszawa 2004, s. 16.
[55] Konarzewski K., Program szkolny [w:] K. Konarzewski, Sztuka nauczania, T2, Warszawa 2005, s. 193.



Infografika 22. Elementy postawy programowej obowiązującej od 1 września 1999 roku[56]*dotyczące sześcioklasowej szkoły podstawowej i gimnazjum*

Źródło: Opracowanie własne

[56] Infografika opracowana na podstawie Rozporządzenia Ministra edukacji Narodowej z dnia 15 lutego 1999 r. w sprawie podstawy programowe kształcenia ogólnego, Dz.U. 1999 nr 14 poz. 129 http://isap.sejm.gov.pl/isap.nsf/download.xsp/WDU19990140129/O/D19990129_01.pdf. (dostęp:11.04.2021).

Pierwszy etap edukacyjny w tej reformie obejmował klasy I-III, ale zmieniono jego charakter - wprowadzono kształcenie zintegrowane, zamiast nauczania początkowego. W podstawie tej podkreślono, że nauczyciele powinni dążyć do wszechstronnego rozwoju ucznia, jako nadrzędnego celu pracy edukacyjnej. Natomiast edukacja szkolna miała polegać na harmonijnej realizacji przez nauczycieli zadań w zakresie nauczania, kształcenia umiejętności i wychowania. Zadania te tworzyły wzajemnie uzupełniające się i równoważne wymiary pracy każdego nauczyciela[57]. Reasumując, podstawa programowa kształcenia ogólnego z 1999 roku, z wyjątkiem podstawy dla wychowania przedszkolnego i I etapu edukacyjnego, była jednolita i składała się z czterech części: 1) opisujących cele edukacyjne, 2) zadania szkoły, 3) treści nauczania, 4) osiągnięcia. Dodatkowo część wstępna opisała zadania szkoły i nauczycieli w zakresie nauczania, wychowania i opieki. Nowością tej podstawy było wprowadzenie ścieżek edukacyjnych o charakterze wychowawczo-dydaktycznym dla szkół podstawowych i gimnazjów, które także zostały zapisane we wstępie do podstawy programowej. W części opisującej ścieżki edukacyjne dla II etapu edukacyjnego wyróżniono edukację prozdrowotną, edukację ekologiczną, edukację czytelniczą i medialną oraz wychowanie do życia w społeczeństwie.

Kolejna podstawa programowa została wprowadzona 1 września 2009 roku poprzez rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 23 grudnia 2008 r.[58]. Jak określał dokument, kształcenie ogólne w szkole podstawowej tworzyło fundament wykształcenia. Dzielił się na dwa etapy edukacyjne: pierwszy obejmujący klasy I-III– edukację wczesnoszkolną i drugi - IV-VI.

Podstawa określała cele i treści kształcenia, umiejętności uczniów, jak również zadania wychowawcze szkoły, które powinny być uwzględniane w programach wychowania przedszkolnego oraz w programach nauczania. Cele kształcenia sformułowane były w języku wymagań ogólnych, natomiast treści nauczania oraz oczekiwane umiejętności uczniów sformułowane były w języku wymagań szczegółowych. Wymagania szczegółowe precyzyjnie określały, jakie wiadomości i umiejętności powinien osiągnąć uczeń po skończeniu określonego etapu kształcenia. Treści, które opisane zostały w postaci efektów kształcenia, wspierały pracę nauczycieli, którzy wiedzieli, w co muszą wyposażyć ucznia oraz jakie efekty sprawdzać. Ponadto dawały nauczycielowi autonomię kształtowania procesu edukacyjnego. Podstawa pozwoliła na dobór metod

[57]Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 15 lutego 1999 r. w sprawie podstawy programowe kształcenia ogólnego, Dz.U. 1999 nr 14 poz. 129, op. cit.

[58] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 23 grudnia 2008 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół, Dz. U. 2009 nr 4 poz. 17, http://prawo.sejm.gov.pl/isap.nsf/DocDetails.xsp?id=WDU20090040017, (dostęp: 02.03.2022).

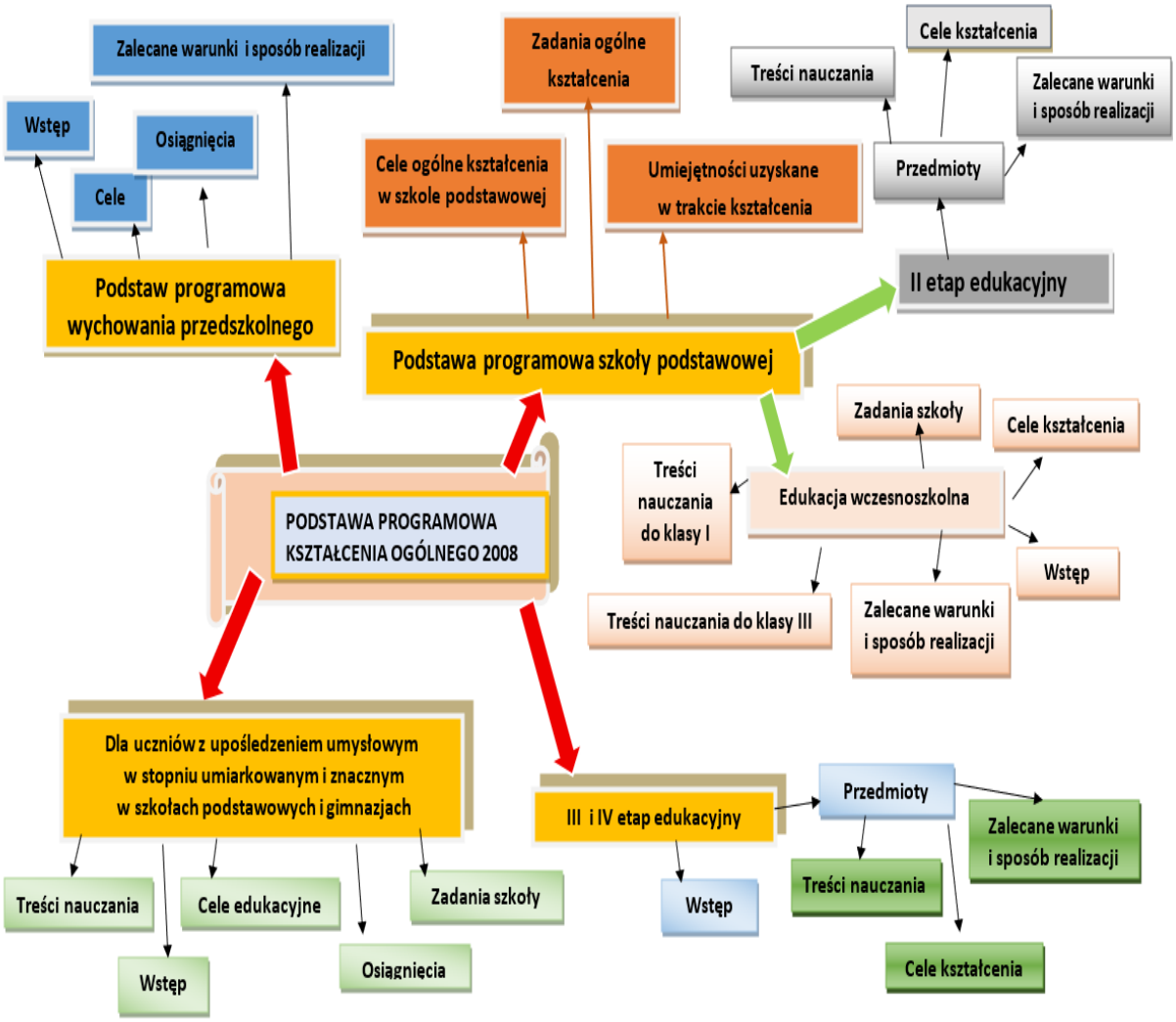
oraz form nauczania, które byłyby jak najbardziej adekwatne do zespołu uczniów, z którymi pracuje nauczyciel. W celu optymalizacji efektów nauczania, kształcenie podzielono na dwa etapy: I etap edukacyjny to edukacja wczesnoszkolna, obejmujący klasy I-III, II etap - obejmujący klasy IV-VI. Na tym etapie występowała edukacja przedmiotowa. Szkoła i przedszkole realizowały swoje zadania, tworząc szkolny zestaw programów nauczania, program wychowawczy i profilaktyczny szkoły. Obok zadań wychowawczych i profilaktycznych nauczyciele wykonywali również działania opiekuńcze odpowiednio do istniejących potrzeb. Klasy I-III, czyli edukacja wczesnoszkolna, realizowana była w formie kształcenia zintegrowanego. Treści kształcenia miały charakter spiralny, to znaczy, że w każdym następnym roku edukacji wiadomości i umiejętności nabyte przez ucznia miały być powtarzane i pogłębiane, a następnie rozszerzane.

Reforma ta wprowadziła zalecane warunki i sposób realizacji procesu kształcenia w edukacji wczesnoszkolnej, które obligowały nauczycieli uczących w klasie I do znajomości podstawy programowej wychowania przedszkolnego. Orientacja ta zapewniała ciągłość wychowania i kształcenia oraz pozwalała na prowadzenie zajęć przez nauczyciela z wykorzystaniem wiadomości i umiejętności, które już posiadały dzieci. W dodatku 1 września 2008 roku był tą datą, gdy dzieci sześcioletnie za zgodą rodziców przekroczyły mury szkoły. Taka sytuacja trwała do 2012 roku, gdzie rozpoczęcie nauki przez sześciolatków stało się obowiązkiem. Ze względu na to, że do szkoły zaczęły uczęszczać coraz młodsze dzieci, należało stworzyć im odpowiednie warunki lokalowe i otoczyć szczególną opieką. Sale lekcyjne były odpowiednio zaaranżowane i składały się z części edukacyjnej i rekreacyjnej. Część edukacyjna powinna być wyposażona w sprzęt audiowizualny, komputery z dostępem do Internetu, gry i zabawki dydaktyczne, kąciki tematyczne (np. przyrody), biblioteczkę itp. Należało ponadto utworzyć uczniowi warunki pozwalające na pozostawienie w szkole niektórych swoich podręczników i przyborów szkolnych. Liczba uczniów w klasie nie powinna być większa niż 26 osób. Zalecane warunki i sposób realizacji procesu kształcenia zostały opracowane również dla każdej edukacji. Wymagania edukacyjne, tak jak w edukacji wczesnoszkolnej, odnosiły się do uczniów o przeciętnych możliwościach[59]. Autorzy tej podstawy wyodrębnili treści nauczania w edukacji wczesnoszkolnej oddzielnie dla klasy I i osobno dla III. Jak tłumaczyli, podstawą wydzielenia klasy I było podkreślenie ciągłości procesu rozpoczętego w przedszkolu i kontynuowanego w szkole podstawowej, uwzględnienie możliwości rozwojowych dzieci w klasach

[59]Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 23 grudnia 2008 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół, Dz. U. 2009 nr 4 poz. 17, http://prawo.sejm.gov.pl/isap.nsf/DocDetails.xsp?id=WDU20090040017, (dostęp:02.03.2022).

I, a także właściwe rozmieszczenie treści nauczania w ramach I etapu edukacyjnego. Oddzielnie też przedstawiono wiadomości i umiejętności, jakimi miał dysponować uczeń kończący klasę III o przeciętnych możliwościach[60].

Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 23 grudnia 2008 roku w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół, obrazuje infografika nr 23.



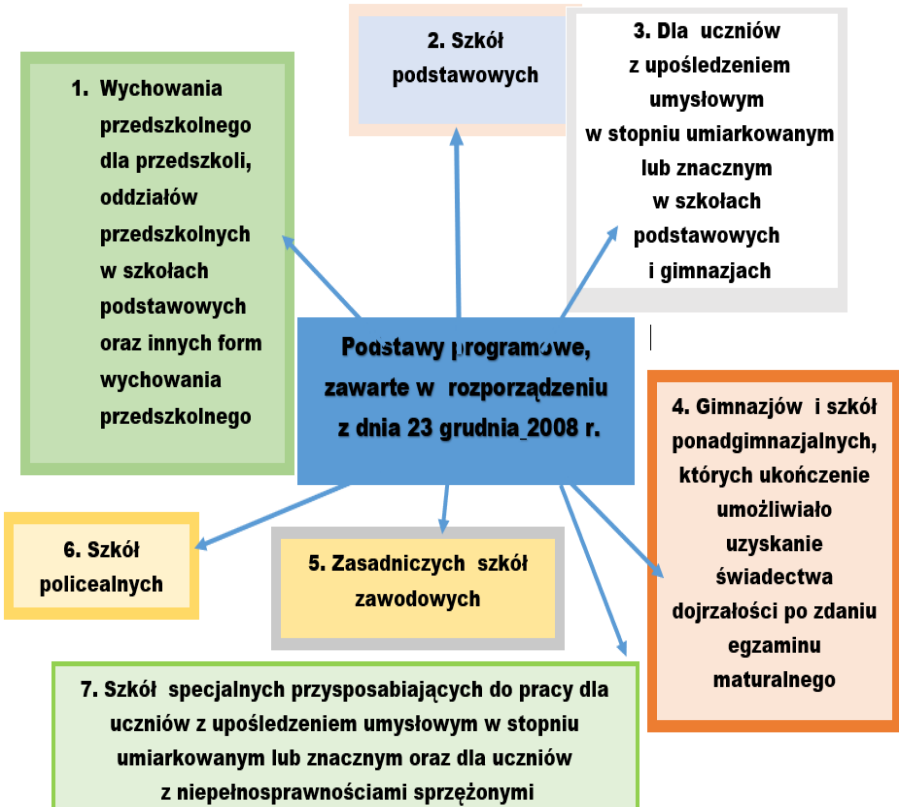
Infografika 23. Schemat podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkół podstawowych obowiązującej od 1 września 2009 roku.

Źródło: Opracowanie własne[61]

[60] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej) z dnia 23 grudnia 2008 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół, Dz. U. 2009, nr 4, poz.17, http://isap.sejm.gov.pl/isap.nsf/download.xsp/WDU20090040017/O/D20090017.pdf(dostęp: 12.04.2021).

[61] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej) z dnia 23 grudnia 2008 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół, Dz. U. 2009, nr 4, poz.17, http://isap.sejm.gov.pl/isap.nsf/download.xsp/WDU20090040017/O/D20090017.pdf (dostęp: 12.04.2021).

Podstawa programowa kształcenia ogólnego, obowiązująca od 1 września 2009 roku, dotyczyła wychowania przedszkolnego, szkoły podstawowej oraz III i IV etapu edukacyjnego. Każdy z nich zawierał cele, zadania, osiągnięcia oraz treści nauczania. Dostosowane były do rozwoju uczniów. Poniżej prezentuję podmioty objęte rozporządzeniem z dnia 23 grudnia 2008 (Infografika nr 24).



Infografika 24. Podmioty objęte rozporządzeniem z dnia 23 grudnia 2008 r.[62]

Źródło: Opracowanie własne

Jak pokazuje powyższa infografika, rozporządzenie ujmowało podstawy programowe wychowania przedszkolnego dla przedszkoli, oddziałów przedszkolnych w szkołach podstawowych oraz innych form wychowania przedszkolnego, kształcenia ogólnego dla szkół podstawowych, również dla uczniów z upośledzeniem umysłowym w stopniu umiarkowanym lub znacznym w szkołach podstawowych i gimnazjach. Ponadto dla gimnazjów i szkół ponadgim-

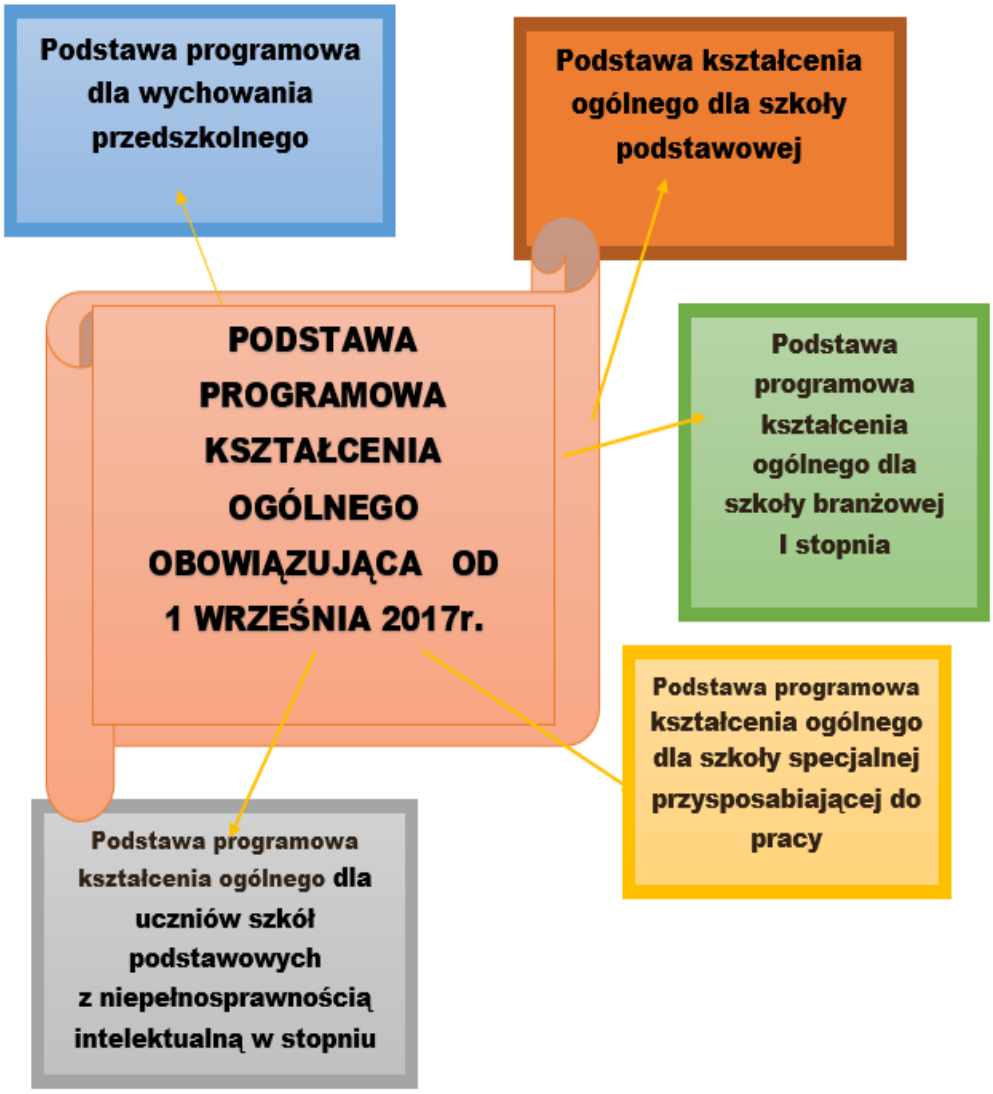
[62] Infografikę opracowano na podstawie Rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 23 grudnia 2008 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół, Dz. U. 2009, nr 4, poz.17, http://isap.sejm.gov.pl/isap.nsf/download.xsp/WDU20090040017/O/D20090017.pdf (dostęp: 12.04.2021).

nazjalnych, których ukończenie umożliwiało uzyskanie świadectwa dojrzałości po zdaniu egzaminu maturalnego. Poza tym dla zasadniczych szkół zawodowych, szkół policealnych i dla szkół specjalnych przysposabiających do pracy dla uczniów z upośledzeniem umysłowym w stopniu umiarkowanym lub znacznym oraz dla uczniów z niepełnosprawnościami sprzężonymi.

Podstawa ta zakładała powiązanie edukacji przedszkolnej z edukacją na wyższym szczeblu, co miało uwidocznić, iż kształcenie ogólne jest procesem ciągłym. Precyzyjny opis wymagań w podstawie na koniec każdego etapu kształcenia miał zapewnić spójność procesu nauczania. Podstawa programowa wprowadzona w 2009 roku stanowiła ważny krok w kierunku modernizacji systemu edukacji w Polsce. Jej najważniejszymi elementami były: przejrzysta struktura dokumentu, podział na etapy edukacyjne, orientacja na efekty kształcenia, czyli zamiast szczegółowego opisu materiału do zrealizowania większy nacisk położono na to, co uczeń powinien wiedzieć i potrafić po zakończeniu danego etapu edukacyjnego**.** Ponadto wyodrębnienie wymagań ogólnych oraz wskazanie warunków realizacji procesu dydaktycznego. Dzięki temu dokument ten stał się nie tylko zestawem treści nauczania, lecz także narzędziem wyznaczającym kierunki rozwoju współczesnej szkoły i organizacji procesu kształcenia. Nowością było wyodrębnienie wymagań ogólnych, które wskazywały główne kierunki kształcenia w danym przedmiocie. W przypadku matematyki obejmowały one między innymi rozwijanie sprawności rachunkowej, rozumowanie i argumentację czy wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji matematycznych. Wyszczególnienie tych obszarów miało sprzyjać rozwijaniu kompetencji poznawczych uczniów, a nie jedynie odtwarzaniu procedur. To sprzyjało także budowaniu bardziej refleksyjnego stosunku do wiedzy matematycznej, rozwijaniu kompetencji analitycznych oraz kształtowaniu umiejętności logicznego myślenia i uzasadniania wniosków. Dlatego podstawę tę można uznać za ważny element wspierający rozwój kultury matematycznej uczniów, ponieważ wskazywała na znaczenie matematyki jako narzędzia pomagającego zrozumienie otaczającej ucznia rzeczywistości.

Rok 2017, to kolejna reforma i zmiana podstaw programowych kształcenia ogólnego[63]. Komponenty podstawy programowej kształcenia ogólnego, wynikającej z rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 14 lutego 2017 r. przedstawia, poniższa infografika nr 25.

[63] Rozporządzenie Ministra EdukacjiNARODOWEJ1 z dnia 14 lutego 2017 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym, kształcenia ogólnego dla branżowej szkoły I stopnia, kształcenia ogólnego dla szkoły specjalnej przysposabiającej do pracy oraz kształcenia ogólnego dla szkoły policealnej



Infografika 25. Schemat podstawy programowej obowiązującej od 1 września 2017 roku

Źródło: Opracowanie własne

Jednym z najważniejszych elementów podstawy programowej z 2017 roku było dostosowanie jej do zmienionej struktury szkolnictwa. Wyróżniono następujące etapy edukacyjne: I etap edukacyjny – edukacja wczesnoszkolna (klasy I–III szkoły podstawowej), II etap edukacyjny – klasy IV–VIII szkoły podstawowej, III etap edukacyjny – szkoły ponadpodstawowe (m.in. liceum ogólnokształcące, technikum, branżowa szkoła I stopnia). Taki układ miał zapewnić większą ciągłość procesu kształcenia, szczególnie w ramach ośmioletniej szkoły podstawowej. Podobnie jak w poprzedniej podstawie programowej, dokument opierał się na dwóch głównych elementach, czyli celach kształcenia (wymaganiach ogólnych), które określały naj-

ważniejsze kompetencje rozwijane w ramach danego przedmiotu oraz wymaganiach szczegółowych – opisujących konkretne wiadomości i umiejętności, które uczeń powinien opanować. Podstawa programowa klarowniej podkreśla znaczenie rozwijania kompetencji kluczowych uczniów, takich jak: umiejętność logicznego i krytycznego myślenia, rozwiązywanie problemów, wykorzystywanie technologii informacyjno-komunikacyjnych, komunikowanie się i samodzielne uczenie się. W kontekście kształtowania kultury matematycznej dokument ten, podobnie jak poprzedni, wyraźnie wskazywał na takie elementy jak rozumowanie matematyczne, dostrzeganie zależności, argumentacja czy rozwiązywanie problemów matematycznych. Mocno podkreślał istotę i znaczenie logicznego myślenia, interpretowania zjawisk przy wykorzystaniu narzędzi matematycznych oraz stosowania matematyki w sytuacjach praktycznych.

Następna podstawa programowa, obowiązująca od 1 września 2019 roku, była częścią szerokiej reformy edukacji, która rozpoczęła się w 2017 roku i wiązała się z likwidacją gimnazjów[64]. Na poniższej infografice nr 26 zaprezentowałam schemat szczegółowych podstaw programowych.

[64] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 16 maja 2019 r. w sprawie podstaw programowych kształcenia w zawodach szkolnictwa branżowego oraz dodatkowych umiejętności zawodowych w zakresie wybranych zawodów szkolnictwa branżowego



Infografika 26. Schemat szczegółowy podstawy programowej kształcenia ogólnego obowiązujący od 1 września 2019 roku.

Źródło: Opracowanie własne

Podstawa programowa obowiązująca od 1 września 2019 roku stanowi rozwinięcie założeń reformy systemu oświaty, wprowadzonej w latach 2017–2019 w Polsce. Dokument ten został dostosowany do nowej struktury szkolnictwa ponadpodstawowego i obejmuje czteroletnie liceum ogólnokształcące, pięcioletnie technikum oraz szkoły branżowe. Zmiana ta miała zapewnić większą ciągłość procesu kształcenia po ukończeniu ośmioletniej szkoły podstawowej. Podobnie jak w poprzednich podstawach programowych, dokument opiera się na dwóch głównych elementach, czyli celach kształcenia (wymaganiach ogólnych), które wskazują najważniejsze kompetencje rozwijane w ramach danego przedmiotu oraz wymaganiach szczegółowych, które określają konkretne wiadomości i umiejętności, jakie powinien opanować uczeń. Takie właśnie rozwiązanie pozwala na jednoczesne wskazanie ogólnych kierunków edukacji

oraz precyzyjne określenie efektów kształcenia. Podstawa programowa obowiązująca od 2019 roku stanowi istotny element regulujący funkcjonowanie szkół ponadpodstawowych w Polsce. Jej priorytetowe elementy obejmują dostosowanie treści kształcenia do nowej struktury szkolnictwa, określenie celów kształcenia i wymagań szczegółowych, poszerzenie treści nauczania oraz zróżnicowanie poziomów kształcenia. Dokument ten wyznacza ramy programowe dla edukacji na poziomie ponadpodstawowym. Również ta podstawa może być uważana za istotny czynnik wspierający rozwój kultury matematycznej uczniów, ponieważ akcentuje znaczenie takich elementów, jak rozumowanie matematyczne, formułowanie i uzasadnianie wniosków, czy dostrzeganie pewnych zależności. Ponadto sprzyja kształtowaniu pojęć matematycznych.

Kolejna zmiana podstawy programowej została wprowadzona na mocy rozporządzenia Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 roku[65]. Zmiany te weszły w życie 1 września 2024 roku i objęły szkoły podstawowe (klasy IV–VIII) oraz szkoły ponadpodstawowe, w tym licea, technika oraz szkoły branżowe. Jedną z najważniejszych zmian było zmniejszenie zakresu wymagań szczegółowych w podstawie programowej. Treści nauczania zostały zredukowane średnio o około 20%, co miało na celu odciążenie uczniów i nauczycieli. Usunięto te zagadnienia, które uznano za nadmiernie rozbudowane na danym etapie edukacyjnym, a także trudne do realizacji w praktyce szkolnej i powtarzające się w kolejnych etapach kształcenia. Pomimo wprowadzonych modyfikacji utrzymano dotychczasową strukturę podstawy programowej, czyli cele kształcenia (wymagania ogólne), określające najważniejsze kompetencje rozwijane w ramach danego przedmiotu, wymagania szczegółowe, wskazujące konkretne wiadomości i umiejętności uczniów, a także zalecane warunki i sposoby realizacji, które stanowią wskazówki metodyczne dla nauczycieli. Modyfikacje dotyczyły 18 przedmiotów nauczanych w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych. Zmniejszenie liczby szczegółowych treści nauczania miało zwiększyć autonomię nauczycieli w planowaniu procesu dydaktycznego. Według Ministra Edukacji zmiany wprowadzone w 2024 roku mają charakter przejściowy, poprzedzają planowaną szerszą reformę programową systemu edukacji, której wdrożenie przewidywane jest w kolejnych latach. Zmiany wprowadzone w tej podstawie programowej również mogą być interpretowane w kontekście kształtowania kultury matematycznej uczniów. Redukcja szczegółowych wymagań programowych tworzy większą przestrzeń dla realizacji procesów, takich

[65] Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia, https://isap.sejm.gov.pl/isap.nsf/DocDetails.xsp?id=WDU20240001019, (dostęp:20.03.2023)

jak na przykład analizowanie zależności oraz rozwijanie umiejętności rozumowania i argumentacji. Stąd ta podstawa programowa może sprzyjać tworzeniu sytuacji, w których będzie rozwijana kultura matematyczna.

Podsumowując, podstawa programowa to fundamentalny dokument, na którym budowany jest nowoczesny system nauczania. Definicję podstawy programowej zawiera art. 4 pkt 24 ustawy Prawo oświatowe[66], i zgodnie z tym przepisem przez podstawę programową wychowania przedszkolnego lub podstawę programową kształcenia ogólnego należy rozumieć obowiązkowe zestawy celów kształcenia i treści nauczania, w tym umiejętności, które powinien posiadać uczeń po zakończeniu określonego etapu edukacyjnego oraz zadania wychowawczo-profilaktyczne szkoły, uwzględniane odpowiednio w programach wychowania przedszkolnego, programach nauczania i podczas realizacji zajęć z wychowawcą oraz umożliwiające ustalenie kryteriów ocen szkolnych i wymagań egzaminacyjnych, a także warunki i sposób realizacji tych podstaw programowych. Podstawa programowa powinna stanowić punkt odniesienia dla tworzenia programów nauczania, podręczników oraz planowania pracy nauczycieli. Ważne także są ramy wyznaczone przez podstawę, w których kształtuje się proces dydaktyczny, zapewniając jednocześnie spójność i ciągłość edukacji w skali całego kraju. To wszystko zapewni utrzymanie dobrego standardu kształcenia, a także zagwarantuje uczniom dostęp do podobnych treści i doświadczeń edukacyjnych niezależnie od miejsca realizacji ich nauki. Na gruncie obowiązującego prawa podstawa programowa pełni równocześnie kilka funkcji. Funkcję aksjologiczno-celowościową, ponieważ wyznacza cele kształcenia. Funkcję treściową, bo określa zakres nauczania i wymagania. Funkcję gwarancyjną, bo zabezpiecza minimum programowe, które państwo uznaje za niezbędne na danym etapie edukacyjnym. Funkcję kontrolną i egzaminacyjną, bo stanowi odniesienie dla oceniania szkolnego, egzaminów zewnętrznych i nadzoru pedagogicznego[67]. Jak twierdzi Dorota Gołębniak zmianie programowej powinna towarzyszyć ewaluacja, która jest kolejną zmianą, jaka zaszła wraz z ewolucją podstaw programowych[68]. Autorka definiuje ją w kontekście podstaw programowych jako „gromadzenie i wykorzystywanie informacji niezbędnych do udzielenia odpowiedzi na szereg pytań o wartość realizowanego programu. Chodzi nie tylko o jakość efektów – jak to, co zaszło, ma się do tego, co było planowane,

[66] Prawo oświatowe. Dziennik Ustaw - Dz.U.2025.1043 tj. Akt obowiązujący, wersja od: 1 stycznia 2026 r. do: 31 sierpnia 2027, [w:] https://sip.lex.pl/akty-prawne/dzu-dziennik-ustaw/prawo-oswiatowe-18558680/art-4 (dostęp: 23.12.2024).

[67] Lorens R., Miejsce i rola podstawy programowej w polskim systemie prawnym, [w:] https://www.mac.pl/blog/opinie-ekspertow/miejsce-i-rola-podstawy-programowej-w-polskim-systemie-prawnym (dostęp: 05.03.2026).

[68] Gołębniak, D., Program szkolny, [w:] Kwieciński, Z., Śliwerski, B, Pedagogika – podręcznik akademicki, T2., Warszawa 2004, s. 147.

ale nade wszystko o określenie mocnych i słabych stron danej aplikacji, czyli wartości wewnętrznej, instrumentalnej i względnej danego programu”[69]. Przy czym wartość wewnętrzna odnosi się do jakości samego programu, jego spójności, logiki oraz mocnych i słabych stron. Wartość instrumentalna dotyczy skuteczności programu, a wartość względna oznacza ocenę programu w kontekście jego efektywności, wymagań np. bazy materialnej, czy łatwości realizacji oraz w odniesieniu do innych, alternatywnych rozwiązań[70]. Jednocześnie należy podkreślić, że podstawa programowa nie jest tylko dokumentem administracyjnym, lecz także istotnym narzędziem modelowania określonej wizji edukacji oraz kompetencji uczniów. Wskazuje priorytetowe obszary wiedzy, umiejętności i postaw uczniów biorących udział w edukacji. W tym kontekście podstawa programowa odgrywa również szczególną rolę w kształtowaniu kultury intelektualnej uczniów, w tym także ich kultury matematycznej. Zakres treści matematycznych, sposoby formułowania wymagań oraz akcentowanie określonych kompetencji poznawczych może determinować sposób rozwijania myślenia matematycznego, rozumienia pojęć oraz budowania świadomego i refleksyjnego stosunku do wiedzy matematycznej. Konkludując, podstawa programowa to fundament organizacyjny i merytoryczny procesu kształcenia w Polsce, a jednocześnie ważny element w procesie rozwoju edukacji, dający możliwości rozwijania, kształtowania i doskonalenia kompetencji poznawczych i kultury matematycznej uczniów.

3.3. Edukacja matematyczna w klasach 1-3 szkoły podstawowej w świetle podstawy programowej

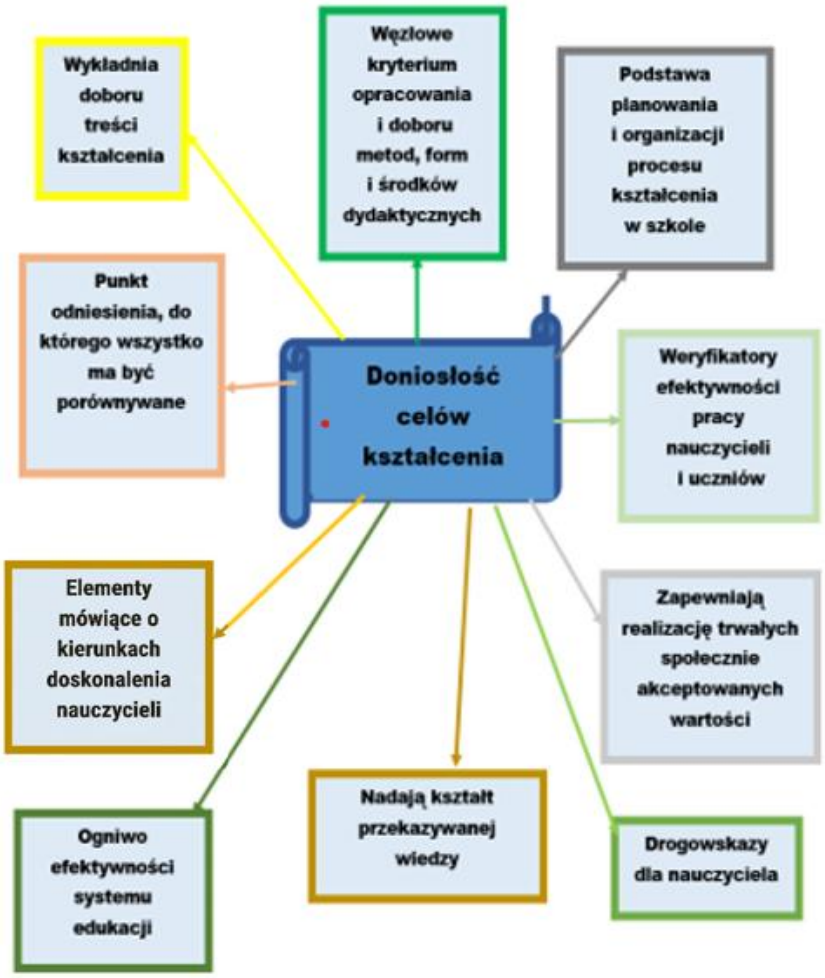
Edukacja matematyczna w klasach I–III szkoły podstawowej jest jednym z kluczowych obszarów edukacji wczesnoszkolnej. Stanowi fundament dla dalszego rozwoju intelektualnego dziecka w jego sferze poznawczej, pomaga w kształtowaniu logicznego myślenia oraz umiejętności interpretowania i porządkowania rzeczywistości. Edukacja matematyczna na tym etapie kształcenia nie powinna być rozumiana wyłącznie jako zbiór działań rachunkowych, lecz jako istotny środek wspierający rozwój operacyjnego myślenia, dostrzegania relacji, zależności i prawidłowości występujących w otaczającym świecie. Edukacja ta realizowana jest w sposób planowany i celowy zgodnie z podstawą programową kształcenia ogólnego, w której określono zarówno cele i zadania edukacji wczesnoszkolnej oraz treści kształcenia. W świetle podstawy programowej edukacja matematyczna ma charakter zintegrowany i praktyczny. Powinna

[69] Ibidem, s. 8.
[70] Ibidem

uwzględniać potrzeby rozwojowe dziecka, a także być ukierunkowana na stopniowe kształtowanie pojęć matematycznych poprzez działanie i obserwację. Ważna powinna być także konieczność budowania trwałych podstaw do dalszej nauki. Podstawa programowa kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej zakłada, że w klasach I–III proces nauczania ma charakter integralny. Oznacza to, że treści matematyczne pozostają w ścisłym związku z edukacją polonistyczną, społeczną, przyrodniczą, plastyczną czy techniczną. „Celem edukacji wczesnoszkolnej jest wspieranie całościowego rozwoju dziecka. Proces wychowania i kształcenia prowadzony w klasach I–III szkoły podstawowej umożliwia dziecku odkrywanie własnych możliwości, sensu działania oraz gromadzenie doświadczeń na drodze prowadzącej do prawdy, dobra i piękna. Edukacja na tym etapie jest ukierunkowana na zaspokojenie naturalnych potrzeb rozwojowych ucznia. Szkoła respektuje podmiotowość ucznia w procesie budowania indywidualnej wiedzy oraz przechodzenia z wieku dziecięcego do okresu dorastania. W efekcie takiego wsparcia dziecko osiąga dojrzałość do podjęcia nauki na II etapie edukacyjnym[71]".

Podstawą planowania i organizacji procesu kształcenia w nauczaniu początkowym są cele kształcenia. Są one także wykładnią doboru treści kształcenia. Zapewniają realizację trwałych społecznie, akceptowanych wartości. Weryfikują efektywność pracy nauczycieli i uczniów. Są drogowskazami dla nauczyciela i nadają kształt przekazywanej wiedzy. Są elementami wskazującymi kierunki doskonalenia nauczycieli, jak również punktem odniesienia, do którego wszystko ma być porównywane. Są także podstawą koncepcji kształcenia oraz wizji przeprowadzanych reform szkolnych. Rolę ich przedstawia poniższa infografika nr 27.

[71] Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym, kształcenia ogólnego dla branżowej szkoły I stopnia, kształcenia ogólnego dla szkoły specjalnej przysposabiającej do pracy oraz kształcenia ogólnego dla szkoły policealne, s. 8



Infografika 27. Rola/doniosłość celów kształcenia

Źródło: Opracowanie własne

Cele kształcenia edukacji wczesnoszkolnej w obowiązującej aktualnie podstawie programowej z dnia 28 czerwca 2024 zostały opisane w odniesieniu do czterech obszarów rozwojowych dziecka: fizycznego, emocjonalnego, społecznego i poznawczego. Cele te uczeń powinien osiągnąć w procesie wychowania i kształcenia przez rozwój prostych czynności praktycznych i intelektualnych w czynności bardziej złożone. W zakresie poznawczego obszaru rozwoju uczeń osiąga: potrzebę i umiejętność samodzielnego, refleksyjnego, logicznego, krytycznego i twórczego myślenia; umiejętność rozumienia podstawowych pojęć i działań matematycznych, samodzielne korzystanie z nich w różnych sytuacjach życiowych, wstępnej matematyzacji wraz z opisem tych czynności: słowami, obrazem, symbolem; umiejętność stawiania

pytań, dostrzegania problemów, zbierania informacji potrzebnych do ich rozwiązania, planowania i organizacji działania, a także rozwiązywania problemów; umiejętność czytania prostych tekstów matematycznych, np. zadań tekstowych, łamigłówek i zagadek, symboli[72]. Cele edukacji wczesnoszkolnej w Polsce ewoluowały w kierunku holistycznego podejścia do rozwoju dziecka z uwzględnieniem różnych aspektów życia i zdobywania wiedzy. Zmieniały się w zależności od kontekstu politycznego i społecznego. Od wychowania patriotycznego, przez kształtowanie obywateli socjalistycznych, aż po wartości uniwersalne i etyczne po 1989 roku. Celem edukacji wczesnoszkolnej jest wspomaganie dziecka w rozwoju intelektualnym, emocjonalnym, społecznym, etycznym, fizycznym i estetycznym. Do 1 września 1999 roku cele ogólne edukacji wczesnoszkolnej i matematycznej uwidocznione były w programach nauczania, natomiast od 1 września 1999 roku w podstawach programowych kształcenia ogólnego. W obowiązującej podstawie programowej zapisano, że ogólne cele rozwoju ucznia, osiągane na zakończenie edukacji wczesnoszkolnej, są źródłem celów szczegółowych, opisanych w formie efektów. Uczeń ma je osiągać, realizując zadania, wymagające wielokierunkowej aktywności. Zakres tej aktywności wytyczają, wymienione w podstawie programowej efekty kształcenia, przyporządkowane są poszczególnym dyscyplinom naukowym. Przedstawienie efektów kształcenia w odniesieniu do dyscyplin naukowych jest pewnego rodzaju konwencją, potrzebną dla uzyskania przejrzystości opisu, a nie dyrektywą organizacyjną. Proces kształcenia na tym etapie ma charakter zintegrowany, a nie przedmiotowy[73].

Cele edukacji matematycznej na etapie edukacji wczesnoszkolnej skupiają się na rozwijaniu podstawowych kompetencji matematycznych uczniów oraz przygotowaniu ich do dalszego kształcenia w tym zakresie. Dotyczą kształtowania pojęcia liczby oraz rozumienia systemu dziesiątkowego, kształtowania umiejętności rozwiązywania prostych problemów matematycznych, wspierania rozwoju logicznego myślenia i umiejętności wnioskowania, rozwijania sprawności rachunkowej w zakresie podstawowych działań arytmetycznych, rozwijania umiejętności rozumienia relacji przestrzennych i wielkościowych, rozwijania umiejętności dokonywania pomiarów i posługiwania się jednostkami miary. Cele edukacji matematycznej na etapie klas I–III można także rozpatrywać zarówno w perspektywie dydaktycznej, jak i rozwojowej. Z perspektywy dydaktycznej zasadniczym celem jest wyposażenie ucznia w elementarne kompetencje matematyczne, umożliwiające mu dalsze uczenie się tego przedmiotu na kolejnych

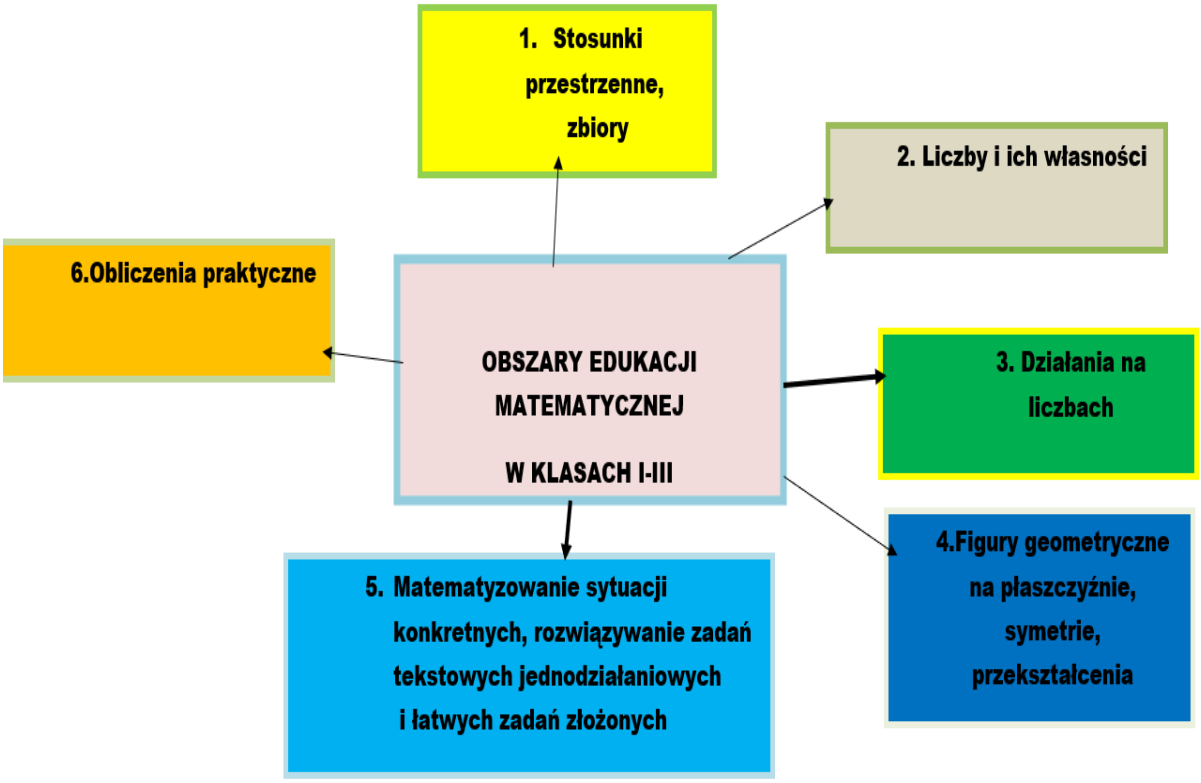
[72] Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej… op. cit., s.28-29.
[73] Ibidem

etapach kształcenia. Perspektywa rozwojowa eksponuje wdrażanie dziecka do uporządkowanego poznawania rzeczywistości, a także dostrzegania związków między zjawiskami i budowania przekonania, że matematyka stanowi narzędzie rozumienia świata[74]. Wobec tego podstawa programowa zakłada, że uczeń kończący klasę III nie tylko wykonuje proste obliczenia czy rozpoznaje podstawowe figury geometryczne, ale potrafi także wykorzystywać wiedzę matematyczną w codziennych sytuacjach, analizować proste problemy i uzasadniać własny tok myślenia.

Jednym z konstytutywnych celów edukacji matematycznej w klasach I–III jest rozwijanie rozumienia stosunków przestrzennych i cech wielkościowych. Na tym etapie dziecko uczy się określać położenie przedmiotów względem siebie, rozumie relacje typu: nad, pod, obok, nad, między, z lewej strony, z prawej strony, przed, za. Umiejętności te są istotne nie tylko w nauce matematyki, lecz także w rozwijaniu orientacji w przestrzeni i organizacji własnego działania. Paralelnie uczeń poznaje i porównuje cechy wielkościowe obiektów, takie jak wysokość, długość, ciężar, pojemność czy szerokość[75]. Dzięki takim działaniom matematyka staje się dla dziecka dziedziną osadzoną w konkretnej rzeczywistości, a nie jako zbiór abstrakcyjnych reguł oderwanych od doświadczenia. Realizacja celów powinna odbywać się w sposób dostosowany do możliwości rozwojowych dzieci, wykorzystując przy tym różnorodne metody problemowe oraz środki dydaktyczne wspomagające uczenie się poprzez działanie i doświadczenie.

Precyzyjnie określone cele w edukacji wczesnoszkolnej umożliwiają realizację różnych obszarów związanych z matematyką w klasach I-III. Występujące w podstawach programowych treści można pogrupować w następujące obszary, które przedstawia infografika 28.

[74] Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r…op. cit.
[75] Ibidem



Infografika 28. Obszary edukacji matematycznej świetle podstaw programowych

Źródło: Opracowanie własne

Istotnym obszarem jest rozumienie liczb i ich własności. Uczniowie uczą się liczyć w przód i wstecz – od podanej liczby po 1, po 2, po 10 itp. Uczą się także odczytywać i zapisywać liczby (od zera do tysiąca oraz wybrane liczby do miliona), a także rozumieć znaczenie cyfr w zapisie liczby w systemie dziesiątkowym. Podczas edukacji matematycznej dzieci poznają również liczby porządkowe oraz uczą się porównywać liczby i określać ich miejsce w ciągu liczbowym. Kolejnym obszarem jest wykonywanie działań arytmetycznych. Uczniowie opanowują dodawanie, odejmowanie, a następnie wprowadzane są elementy mnożenia i dzielenia w zakresie dostosowanym do możliwości rozwojowych dzieci. Ważne jest nie tylko mechaniczne wykonywanie działań, ale przede wszystkim w edukacji wczesnoszkolnej kładzie się szczególny nacisk na rozumienie sensu działań matematycznych. Podstawa programowa dla edukacji wczesnoszkolnej określa także osiągnięcia ucznia w zakresie rozwiązywania zadań tekstowych i problemów matematycznych. Dzieci uczą się analizować treść zadania, dobierać odpowiednie działania oraz interpretować otrzymany wynik. Ponadto podstawa zakłada, aby uczniowie sami

układali zadania i je rozwiązywali, konstruowali łamigłówki matematyczne, a także przedstawiali dane w prostych formach graficznych oraz uczyli się odczytywać informacje liczbowe[76]. Ważnymi elementami edukacji matematycznej są także pomiar i elementy geometrii. Uczniowie poznają podstawowe jednostki miary długości, masy czy czasu, uczą się dokonywać prostych pomiarów oraz rozpoznawać i nazywać podstawowe figury geometryczne. Działania te mają sprzyjać rozwijaniu umiejętności praktycznego zastosowania matematyki w codziennych sytuacjach, na przykład dostrzeganie symetrii w środowisku przyrodniczym, w sztuce użytkowej i innych wytworach człowieka obecnych w otoczeniu dziecka**.** W podstawie programowej wyróżniono także obszar związany z osiągnięciami w zakresie stosowania matematyki w sytuacjach życiowych oraz w innych obszarach edukacji. Zadaniem uczniów będzie klasyfikacja obiektów i różnych elementów środowiska społeczno-przyrodniczego z uwagi na wyodrębnione cechy; dostrzeganie rytmu w środowisku przyrodniczym, sztuce użytkowej i innych wytworach człowieka, obecnych w środowisku dziecka; wykonanie prostych obliczeń dotyczących czasu (doba, godzina, minuta, sekunda), zastosowanie znaków rzymskich co najmniej do XII; użycie określeń: gram, dekagram, kilogram, tona. Ponadto podstawa wskazuje, że nauczyciel powinien wykorzystać na lekcjach matematyki warcaby, szachy i inne gry planszowe lub logiczne do rozwijania umiejętności myślenia strategicznego, logicznego, rozumienia zasad itd., na podstawie których uczeń będzie tworzył własne strategie i zasady organizacyjne gier. Natomiast nabyte umiejętności podczas tych działań uczeń wykorzysta do rozwiązywania problemów, działań twórczych i eksploracji świata, dbając o własny rozwój i tworząc indywidualne strategie uczenia się[77].

W świetle obowiązującej podstawy programowej szczególnie ważne staje się rozwijanie u uczniów klas I-III umiejętności rozumienia matematyki, a nie tylko ćwiczenie sprawności rachunkowej. Działania te mają doprowadzić uczniów do tego, aby potrafili uzasadniać na przykład wybrany sposób rozwiązywania określonego zadania, a także wykorzystywać zdobyte umiejętności w sytuacjach praktycznych. Taki sposób ujmowania edukacji matematycznej sprzyja budowaniu trwałych struktur poznawczych u uczniów i zapobiega mechanicznemu uczeniu się. Stąd poniżej prezentuję tabelę porównawczą, dotyczącą edukacji matematycznej w klasach I–III. W tabeli nr 7 zestawiono główne założenia podstawy programowej, wprowadzonej rozporządzeniem z 2017 r. (obowiązującej od 2019 r.) oraz zmiany wynikające z rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 28 czerwca 2024 r.

[76] Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r…op. cit.
[77] Ibidem

Tabela 7. Porównanie założeń edukacji matematycznej w klasach I–III w podstawie programowej z 2017/2019 oraz zmian z 2024 roku

Obszar analizy	Podstawa programowa 2017 / obowiązująca od 2019 r.	Zmiany wprowadzone rozporządzeniem z 28 czerwca 2024 r.
Podejście do edukacji matematycznej	Matematyka jako element edukacji zintegrowanej rozwijający podstawowe umiejętności rachunkowe i logiczne myślenie.	Wzmocnienie podejścia funkcjonalnego, większy nacisk na wykorzystanie matematyki w sytuacjach praktycznych i problemowych.
Rola aktywności ucznia	Potrzeba uczenia się poprzez działanie i doświadczenie.	Silniejsze zaakcentowanie aktywności poznawczej ucznia, eksperymentowania oraz samodzielnego dochodzenia do rozwiązań.
Rozumienie liczb i systemu dziesiątkowego	Wprowadzanie pojęcia liczby, liczenie, porównywanie liczb, podstawy systemu dziesiątkowego.	Zachowanie dotychczasowych założeń, lecz większy nacisk na rozumienie znaczenia liczby i jej zastosowań w codziennych sytuacjach.
Działania arytmetyczne	Dodawanie i odejmowanie jako podstawowe działania, wprowadzenie mnożenia i dzielenia w prostych sytuacjach.	Utrzymanie zakresu treści, ale większe podkreślenie rozumienia sensu działań oraz stosowania różnych strategii obliczeniowych.
Zadania tekstowe	Rozwiązywanie prostych zadań tekstowych i sytuacji problemowych.	Rozszerzenie akcentu na analizę problemu, planowanie rozwiązania oraz interpretację wyniku.
Pomiar i zastosowania praktyczne	Wprowadzenie podstawowych jednostek miary i prostych pomiarów.	Podkreślenie praktycznego wykorzystania pomiarów w codziennych sytuacjach życiowych.
Geometria	Rozpoznawanie i nazywanie podstawowych figur geometrycznych.	Zachowanie dotychczasowych treści przy podkreśleniu rozwijania wyobraźni przestrzennej.
Cel ogólny edukacji matematycznej	Rozwijanie podstawowych kompetencji matematycznych uczniów.	Wzmocnienie roli matematyki jako narzędzia rozumienia świata i rozwijania kompetencji poznawczych ucznia.

Źródło: opracowanie własne na podstawie rozporządzenia Ministra Edukacji z dnia 14 lutego 2017 r. w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej oraz rozporządzenia Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniającego podstawę programową.

Dokonana w powyższej tabeli analiza porównawcza pokazuje, że wprowadzone zmiany w podstawie programowej w 2024 roku jedynie doprecyzowują i nieco modyfikują wcześniejsze założenia edukacji matematycznej w klasach I-III szkoły podstawowej. Przede wszystkim w obowiązującej podstawie programowej położono nacisk na wzmocnienie funkcjonalnego i problemowego charakteru nauczania matematyki oraz podkreślono znaczenie aktywności poznawczej ucznia. Takie właśnie podejście do nauczania matematyki w klasach początkowych pozostaje zgodne z koncepcjami dydaktyki matematyki, rozwijanymi przez takich badaczy, jak Zofia Krygowska, Edyta Gruszczyk-Kolczyńska, czy Zbigniew Semadeni, którzy wskazywali,

że efektywne i skuteczne kształcenie matematyczne powinno prowadzić ucznia do samodzielnego odkrywania zależności matematycznych oraz rozumienia sensu podejmowanych działań[78]. W rezultacie zmiany wprowadzone w podstawie programowej w 2024 roku to przede wszystkim próba dalszego wzmacniania takiego właśnie podejścia do nauczania matematyki w edukacji wczesnoszkolnej.

Analizując cele i treści edukacji matematycznej zawarte w podstawie programowej w 2024 r., należy podkreślić, że dokument ten akcentuje potrzebę integralnego i funkcjonalnego ujmowania matematyki. Co oznacza, że poszczególne treści powinny być realizowane w powiązaniu z aktywnością dziecka, jego doświadczeniem czy innymi obszarami, istotnymi w edukacji wczesnoszkolnej. Według tej podstawy matematyka ma być obecna w działaniu, w obserwacji, we wnioskowaniu, a także w rozmowie. To ma sprzyjać budowaniu trwałych struktur poznawczych, a także pozwoli uczniowi stopniowo dostrzegać sens i użyteczność poznawanych treści. Warto również podkreślić, że cele edukacji matematycznej, obejmujące umiejętności liczenia, klasyfikowania, porządkowania, mierzenia czy wnioskowania wspierają ogólny rozwój intelektualny ucznia, uczą systematyczności, precyzji myślenia, a także odpowiedzialności za własne rozumowanie. W tym aspekcie edukacja matematyczna staje się ważnym narzędziem kształtowania i doskonalenia kompetencji kluczowych, które mogą być wykorzystywane w innych obszarach uczenia się. To właśnie świadczy o tym, że podstawa programowa ujmuje matematykę nie tylko jako zestaw wiadomości i umiejętności, ale jako przestrzeń do rozwijania kompetencji poznawczych o charakterze uniwersalnym. W podstawie programowej ewidentnie zaznaczono, że „Istota edukacji matematycznej prowadzi do stopniowego odkrywania i poznania pojęć podstawowych, takich jak liczba czy działanie arytmetyczne. Proces ten oparty jest na intuicji matematycznej dziecka oraz własnych strategiach myślenia dziecka. Nauczyciel zobowiązany jest zatem tak planować zajęcia, aby wiedza matematyczna stopniowo układała się w logicznie powiązany system prowadzący od myślenia konkretno-obrazowego w kierunku myślenia pojęciowego. Pomaga w tym spiralny i liniowy układ treści”[79].

Podsumowując, podstawa programowa obejmująca edukację wczesnoszkolną pełni ważną rolę w wyznaczaniu kierunków kształcenia matematycznego uczniów klas I–III. Zawiera cele

[78] Zob. Gruszczyk-Kolczyńska E., Gustaw Treliński G., Semadeni Z., Beata Bugajska-Jaszczołt B., Czajkowska M., Matematyczna edukacja wczesnoszkolna. Teoria i praktyka. Warszawa 2015.
[79] Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r…op. cit.

edukacyjne, zakres treści oraz oczekiwane osiągnięcia dziecka kończącego pierwszy etap edukacyjny. Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. dotyczące nowej podstawy programowej wprowadziło istotne zmiany do wcześniej obowiązującego aktu prawnego. Zmiany te ogłoszono w Dz.U. 2024 poz. 996, a Ministerstwo Edukacji wskazywało je jako tzw. „uszczuplenie" podstaw programowych, przygotowane bez konieczności wymiany podręczników. W odniesieniu do edukacji matematycznej w klasach I–III dokument ten wyznacza ramy dla rozwijania myślenia logicznego, umiejętności klasyfikowania, porządkowania, dostrzegania różnych relacji oraz rozwiązywania zaistniałych sytuacji problemowych. Na pierwszym etapie edukacyjnym matematyka została wskazana jako narzędzie poznawania i porządkowania rzeczywistości, a to ma także istotne znaczenie dla rozwijania podstaw kultury matematycznej u uczniów z klas młodszych. Podstawa programowa akcentuje stopniowość, praktyczność i funkcjonalność uczenia się. Uczniowie klas I–III nie tylko poznają liczby i działania matematyczne, lecz także uczą się wykorzystywać je w codziennych sytuacjach: podczas planowania, mierzenia, porównywania czy rozwiązywania prostych problemów. Takie właśnie podejście sprzyja rozwijaniu trwałych podstaw rozumowania matematycznego, a także rozwija przekonanie, że matematyka ma sens i znajduje zastosowanie w życiu codziennym. Ministerstwo Edukacji, opisując zmiany z 2024 r., podkreśliło przede wszystkim, ograniczenie nadmiarowości treści przy zachowaniu możliwości korzystania z dotychczasowych podręczników[80]. Podstawa programowa pełni również funkcje normatywne i organizacyjne. Jest punktem odniesienia dla autorów programów nauczania, podręczników, a także nauczycieli planujących i realizujących proces dydaktyczny. Wskazuje, które doświadczenia matematyczne powinny stać się udziałem dziecka na początku edukacji szkolnej. W rezultacie jakość i sposób interpretacji zapisów podstawy programowej determinują, to czy edukacja matematyczna będzie wspierać rozwój ucznia, jego samodzielność, refleksyjność i świadomość podejmowania decyzji przy rozwiązywaniu problemów matematycznych, czy też ograniczy się do ćwiczenia prostych procedur. W podstawie programowej znalazł się również zapis, który podkreśla, że „Codzienna praca nauczyciela wyznaczona jest przez realizowany i interpretowany program nauczania, oparty na podstawie programowej kształcenia ogólnego dla edukacji wczesnoszkolnej. Interpretacja programu to dostosowanie sposobów osiągania celów, czyli efektów do indywidualnych potrzeb i możliwości uczniów. Nauczyciel, diagnozując umiejętności uczniów, ich możliwości i potrzeby, może tak organizować ich pracę, aby uczniowie osiągnęli cele wykraczające poza treści

[80] Zob. Uszczuplone podstawy programowe – rozporządzenia podpisane, [w:] https://www.gov.pl/web/edukacja/uszczuplone-podstawy-programowe--rozporządzenia-podpisane (dostęp: 24.03.2025).

określone w podstawie programowej”[81]. Zatem można skonstatować, że podstawa programowa edukacji matematycznej w klasach I–III stanowi istotny czynnik warunkujący rozwój kultury matematycznej uczniów. W przypadku mojej dysertacji ten konkretny zapis umożliwił mi wprowadzanie do edukacji matematycznej czynnika wspomagającego naukę matematyki, czyli fotografię, która stała się ważnym elementem wspierania rozwoju wybranych składników kultury matematycznej uczniów klas I-III.

Na zakończenie tego podrozdziału należy dodać, że 11 marca 2026 roku Minister Edukacji podpisała rozporządzenia wprowadzające nowe podstawy programowe wychowania przedszkolnego i kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej wraz ze zmianami w ramowych planach nauczania dla publicznych szkół podstawowych[82]. Nowa reforma określana jest jako szkoła według „Kompasu jutra”. Zmiany zapisane w rozporządzeniu będą wprowadzane stopniowo od roku szkolnego 2026/2027. Najpierw obejmą klasy I i IV szkoły podstawowej, a w kolejnych latach następne roczniki. Nowa podstawa ma, według Ministerstwa Edukacji, odejść od modelu szkoły opartej głównie na przekazywaniu wiedzy i w większym stopniu rozwijać kompetencje potrzebne w życiu społecznym i zawodowym.

Według tej podstawy edukacja matematyczna w klasach I-III „wspiera rozwój myślenia pozwalającego na doświadczanie, rozumienie, opisywanie świata w aspekcie ilościowym i przestrzennym; przez eksperymenty i doświadczenia matematyczne w interakcjach społecznych, w sytuacjach życia codziennego dzieci odkrywają własności matematyczne, dostrzegają regularności, rozwiązują problemy, wykorzystując różne strategie, a także komunikują rozwiązania, przedstawiając i uzasadniając swój sposób rozumowania; aktywnie uczestniczą w procesie matematyzacji zdobywanych doświadczeń, konstruując i rozwijając język matematyczny w naturalnych sytuacjach; korzystają z uważnego i dostosowanego do ich potrzeb wsparcia nauczyciela”[83]. Edukacja w klasach I-III pozostanie zintegrowana, ale program zostanie zbudowany wokół czterech kluczowych kompetencji: językowych, matematycznych, cyfrowych i ruchowych. Równolegle rozwijane mają być kompetencje przekrojowe, czyli myślenie krytyczne, kreatywność, umiejętność współpracy, a także rozwiązywanie problemów. Aby umożliwić realizację nowych treści, zwiększono tygodniowy wymiar zajęć w edukacji wczesnoszkolnej z 20 do 21 godzin.

[81] Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r… op. cit., s.61.

[82] Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 11 marca 2026 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym Na podstawie art. 47 ust. 1 pkt 1 lit. a i b ustawy z dnia 14 grudnia 2016 r. – Prawo oświatowe (Dz. U. z 2025 r. poz. 1043, 1160 i 1837 oraz z 2026 r. poz. 187 i 203).

[83] Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 11 marca 2026 r. w sprawie podstawy programowej…, op. cit., s.46.

Zmiany w nauczaniu matematyki w klasach I–III, wynikające z nowej podstawy programowej z 11 marca 2026 roku, która będzie wdrażana od 1 września 2026 r. mają przede wszystkim charakter jakościowy i koncepcyjny. Poniżej w tabeli nr 8 prezentuję istotne założenia i zmiany w edukacji matematycznej w klasach I-III oraz kierunki tych zmian.

Tabela 8. Edukacja matematyczna w klasach I–III – porównanie: podstawa programowa 2024 vs 2026

Obszar	Podstawa programowa 2024	Podstawa programowa 2026	Kierunek zmiany
Filozofia kształcenia	Akcent na realizację treści i umiejętności rachunkowych	Akcent na kompetencje i efekty uczenia się	Od wiedzy do kompetencji
Zakres treści	Stosunkowo rozbudowany, szczegółowy	Ograniczony i bardziej selektywny	Redukcja przeładowania
Rola rozumienia	Ważna, lecz często wtórna wobec procedur	Kluczowa – nacisk na rozumienie pojęć	Pogłębienie uczenia się
Zastosowania praktyczne	Obecne, lecz umiarkowane	Silnie eksponowane np. życie codzienne, finanse	Upraktycznienie matematyki
Rozwiązywanie problemów	Obecne, ale w ograniczonym zakresie	Centralny element nauczania	Wzmocnienie kompetencji problemowych
Kompetencje przekrojowe[84]	Niewyraźnie wyodrębnione	Wyraźnie zintegrowane z matematyką	Integracja kompetencji
Metody nauczania	Często schematyczne, ćwiczeniowe	Aktywne, eksploracyjne, projektowe	Aktywizacja ucznia
Indywidualizacja	Deklaratywna	Silniej akcentowana i praktyczna	Większa elastyczność
Integracja międzyprzedmiotowa	Obecna w edukacji zintegrowanej	Wzmocniona i bardziej świadoma	Holistyczne podejście
Technologia	Marginalna	Stopniowo wprowadzana	Umiarkowana cyfryzacja
Ocenianie	Opisowe, często formalne	Wspierające rozwój, informacja zwrotna	Ocenianie kształtujące

Źródło: opracowanie własne na podstawie Rozporządzenia Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 roku i Rozporządzenia Ministra Edukacji z dnia 11 marca 2026 roku.

[84] Kompetencje przekrojowe to zdolności do działania w różnych sytuacjach w szkole i poza nią z wykorzystaniem wiedzy, umiejętności i postaw rozwijanych w szkole. Kompetencje przekrojowe są rozwijane w ramach edukacji wczesnoszkolnej, poszczególnych przedmiotów nauczanych na II etapie edukacyjnym, międzyprzedmiotowo, a także w ramach realizacji zadań wychowawczo-profilaktycznych szkoły, podaję za: i Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 11 marca 2026 roku…, op. cit., s. 31.

Nowa podstawa z 11 marca 2026 roku w porównaniu z podstawą programową z 2024 roku nie wprowadza radykalnej zmiany zakresu treści matematycznych w klasach I–III. Natomiast dokonuje pewnej transformacji paradygmatu kształcenia. Matematyka zostaje przesunięta z poziomu nauczania proceduralnego w stronę kształtowania kompetencji, rozumienia i zastosowań praktycznych, przy jednoczesnym ograniczeniu nadmiaru treści i wzmocnieniu roli doświadczeń ucznia. Jedną z istotnych zmian jest właśnie odejście od nadmiernie rozbudowanego wykazu szczegółowych wymagań na rzecz ich selekcji i uporządkowania. Nowa podstawa programowa dąży do zmniejszenia nadmiaru treści, co zapewni lepsze dostosowanie procesu nauczania do możliwości i potrzeb rozwojowych uczniów w wieku wczesnoszkolnym. W rezultacie nauczyciel będzie miał większe możliwości działania w celu utrwalania priorytetowych pojęć, a te mogą ułatwić umiejętność rozumienia procesu matematycznego zamiast realizowania rozległego materiału w szybkim tempie. Zasadniczo zmienia się także sposób definiowania celów kształcenia matematycznego. W nowej podstawie wyraźnie położono akcent na rozwijanie kompetencji, takich jak krytyczne i logiczne myślenie, umiejętność rozwiązywania problemów oraz argumentowania. Matematyka przestaje być postrzegana jedynie jako zbiór procedur rachunkowych, a zaczyna pełnić rolę narzędzia poznawczego, które pomaga w interpretacji otaczającej ucznia rzeczywistości. W porównaniu z dokumentem z 2024 roku wyraźnie wzrosło znaczenie praktycznych zastosowań matematyki. Zadania są częściej osadzane w kontekstach życia codziennego, na przykład dokonywanie pomiarów czy organizowanie czasu. Takie podejście będzie sprzyjać kształtowaniu wiedzy matematycznej o charakterze użytecznym i funkcjonalnym, a także może wzmocnić motywację uczniów do podejmowania aktywności poznawczej. Nowa podstawa programowa preferuje strategie oparte na eksperymentowaniu, odkrywaniu i wspólnej pracy projektowej. Uczeń ma być aktywnym uczestnikiem procesu edukacyjnego, a nie tylko odbiorcą informacji i wiadomości. Podkreślono rolę indywidualizacji nauczania, uwzględniającą zróżnicowane tempo i styl uczenia się dzieci. W rezultacie uczeń staje się aktywnym podmiotem procesu edukacyjnego. Podstawa kładzie nacisk na indywidualizację nauczania, uwzględniając zróżnicowany styl uczenia się dzieci i ich indywidualne tempo pracy. Należy także zaznaczyć, że w nowej podstawie programowej wyraźnie wzmocniono znaczenie integracji matematyki z innymi obszarami kształcenia. Jest ona ujmowana jako część szerszego systemu wiadomości, powiązanego między innymi z edukacją przyrodniczą, społeczną czy technologiczną. Takie podejście może sprzyjać budowaniu koherentnego obrazu rzeczywistości, a także może wspierać rozwój różnych kompetencji uczniów. Reasumując, zmiany dokonane w podstawie programowej z 2026 roku prowadzą do reorganizacji modelu edukacji matematycznej w klasach I–III z modelu skoncentrowanego na reprodukcji wiedzy

i procedur na model ukierunkowany na rozumienie, zastosowanie oraz rozwój kompetencji. W konsekwencji edukacja matematyczna zyska bardziej funkcjonalny, zintegrowany i dostosowany do potrzeb ucznia charakter. Pomimo licznych reform programowych, a także wciąż rosnącej świadomości znaczenia wczesnego wspierania kompetencji matematycznych, praktyka edukacyjna ujawnia szereg ograniczeń, na przykład nadmierną schematyzację działań dydaktycznych czy też niewystarczające uwzględnianie indywidualnych możliwości rozwojowych dziecka. Stąd w kolejnym podrozdziale podejmę próbę zaprezentowania pewnych obszarów problemowych i ich konsekwencje dla jakości i skuteczności edukacji matematycznej w klasach I-III.

3.4. Krytyka edukacji matematycznej, realizowanej w przedszkolu i w klasach początkowych

Krytyczna refleksja nad edukacją matematyczną, realizowaną zarówno w przedszkolu, jak i w klasach początkowych stanowi istotny element współczesnego dyskursu pedagogicznego. Informacje zamieszczone w poprzednich podrozdziałach pokazują, że polski system edukacji przeszedł wiele reform. Mimo to od lat obserwujemy niezbyt zadowalające efekty w zakresie posługiwania się przez uczniów matematyką.

W ostatnim czasie w Polsce przeprowadzono cykl badań[85] umiejętności matematycznych uczniów klas trzecich szkół podstawowych. Prowadziła je Centralna Komisja Egzaminacyjna (2005–2011) oraz Instytut Badań Edukacyjnych (2012–2014). Polska wzięła także udział w międzynarodowych badaniach PISA (badanie piętnastolatków) oraz badaniach TIMSS (badanie uczniów w czwartym roku nauki). Zarówno wyniki polskich, jak i międzynarodowych badań pokazują, że nasi uczniowie, niezależnie od etapu kształcenia, dobrze rozwiązują typowe zadania według wyuczonego i utrwalonego schematu postępowania, natomiast mają trudności, gdy należy zastosować posiadaną wiedzę matematyczną w nowej, nietypowej z ich punktu widzenia, sytuacji.

[85] Dąbrowski M., Żytko M. (red.), Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej, cz. I: Raport z badań ilościowych. CKE, Warszawa 2007, cz. II: Konteksty szkolnych osiągnięć uczniów. CKE, Warszawa 2008; Kalinowska A., Murawska B. (red.), Diagnoza umiejętności językowych i matematycznych uczniów klas trzecich szkół podstawowych województwa kujawsko-pomorskiego. Bydgoszcz 2009; Dąbrowski M. (red.), Trzecioklasista 2010. Raport z badań ilościowych 2010. CKE, Warszawa 2011;Pregler A., Wiatrak E. (red.), Ogólnopolskie Badanie Umiejętności Trzecioklasistów. Raport OBUT 2011. CKE, Warszawa 2011; Pregler A., Wiatrak E. (red.), Ogólnopolskie Badanie Umiejętności Trzecioklasistów Raport OBUT 2012. CKE , Warszawa 2012; Pregler A. (red.), Ogólnopolskie Badanie Umiejętności Trzecioklasistów. Raport OBUT 2013. IBE, Warszawa 2013

Informują o tym raporty badań: OBUT (Ogólnopolskie Badanie Umiejętności Trzecioklasistów), prowadzone w latach 2006–2011, badania PISA (Program Międzynarodowej Oceny Umiejętności Uczniów - The Programme for International Student)[86], które odbyły się w latach: 2000, 2003, 2006, 2009, 2015, TIMSS - Polska uczestniczyła w edycjach 2011, 2015, 2019 i 2023[87], raporty o wynikach egzaminów maturalnych[88], opinie ekspertów oraz wyniki badań o powszechnym zjawisku płatnych korepetycji z matematyki[89]. Niskie wyniki kształcenia matematycznego potwierdzają ponadto raporty NIK[90].

Badania NIK,[91] prowadzone w latach 2015–2017 podają, że nauczanie matematyki w polskich szkołach nie sprzyjało optymalnemu rozwojowi kompetencji matematycznych uczniów. Statystyki wskazują, że średnio co szósty maturzysta nie zdał egzaminu maturalnego z matematyki. Aż 42% uczniów szkół ponadgimnazjalnych uzyskało na świadectwach jedynie ocenę dopuszczającą z tego przedmiotu. „Z drugiej strony, wyniki pokazują, że zaledwie 4% uczniów gimnazjów, 2% uczniów szkół podstawowych oraz jedynie 1% uczniów szkół ponadgimnazjalnych otrzymało ocenę celującą z matematyki”[92]. Opublikowane wyniki testów PISA w 2015 r. potwierdzają również, że obniżyły się umiejętności matematyczne polskich uczniów w stosunku do 2012 r. Wtedy średni wynik polskich uczniów w zakresie matematyki wyniósł 518 pkt, a w 2015 r. 504 pkt. W 2015 r. Polska była pod względem wyników z matematyki na świecie na miejscu 17, a w naukach ścisłych na 22. Spośród krajów UE lepsze od Polski wyniki uzyskały m.in. Estonia, Holandia, Dania czy Finlandia[93].

Edyta Gruszczyk - Kolczyńska[94] niezadowalające wyniki matur z matematyki przypisuje niskiej efektywności edukacji matematycznej dzieci. „Problem ten porusza również sprawozdanie z egzaminu maturalnego z 2018 roku” [95]. Pogląd ten podziela również Małgorzata Ma-

[86]Sitek M., Ostrowska E.B., PISA 2018 Czytanie, rozumienie, rozumowanie, Instytut Badań Edukacyjnych, Warszawa 2020 r., s.11.
[87] Dobosz-Leszczyńska W. (red.), Osiągnięcia matematyczne i przyrodnicze czwartoklasistów, Warszawa 2024, s. 13, https://pirls.ibe.edu.pl/wp-content/uploads/2024/12/2023-RAPORT-TIMSS.pdf, (dostęp:17.12. 2024r.).
[88] Rokrocznie raporty z egzaminów maturalnych znajdują się na stronie Centralnej Komisji Egzaminacyjnej pod adresem: https://bip.cke.gov.pl/artykuly/211/egzamin-maturalny.
[89] Bray M., Korepetycje. Cień rzucany przez szkoły, przekład K. Chodzińska ABC Wolters Kluwer Buisness, Warszawa 2012, s.37.
[90] Matematyka do poprawy: NIK o nauczaniu matematyki, https://www.nik.gov.pl/najnowsze-informacje-o-wynikach-kontroli/matematyka-do-poprawy.html, (dostęp: 17.12. 2024).
[91] Ibidem
[92] Matematyka do poprawy: NIK o nauczaniu matematyki, s.1, https://www.nik.gov.pl/najnowsze-informacje-o-wynikach-kontroli/matematyka-do-poprawy.html, (dostęp: 17.12. 2024).
[93] Ibidem
[94] Gruszczyk-Kolczyńska E., O kryzysie edukacji matematycznej dzieci. Rozpaczliwe wołanie o działania naprawcze, https://www.matematykadlawszystkich.pl/mednr1/Gruszczyk.pdf, (dostęp:17.12. 2024).
[95]Daniel J., Szafrańska I., Fałat M., Sprawozdanie z egzaminu maturalnego 2018 Matematyka, s. 46. Microsoft Word - 20180920 Sprawozdanie 2018 - Matematyka , (dostęp:17.12. 2024).

kiewicz pisząc „według relacji nauczycieli uczniowie rozpoczynający naukę w szkołach średnich często nie znają nazw liczb i wyników dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia. Mylą też skracanie i redukcję wyrazów podobnych, nie rozróżniają nazw pojęć figur geometrycznych”[96]. E. Gruszczyk-Kolczyńska podaje, że jedną z przyczyn niskich wyników edukacji matematycznej w klasach I-III było wprowadzenie od 1 września 1999 roku kształcenia zintegrowanego, które zastąpiło dotychczasową edukację wczesnoszkolną[97]. W kształceniu zintegrowanym następuje łączenie wiedzy i umiejętności z różnych dziedzin w ramach jednego procesu edukacyjnego - interdyscyplinarnego. Treści kształcenia mają w nim charakter otwarty, przenikają się. Uczeń ma od razu dostęp do wielu obszarów wiedzy, dostosowanych oczywiście do jego możliwości poznawczych w danym wieku. Powiązania między ideą kształcenia zintegrowanego a poszczególnymi treściami muszą być opracowane systematycznie i spójnie. W przeciwnym wypadku skuteczność edukacyjna tego programu będzie niewielka”[98].

Analiza wyników badań umiejętności matematycznych trzecioklasistów, prowadzonych w skali lokalnej[99,] krajowej[100] i międzynarodowej[101] pokazuje dosyć niekorzystny obraz efektów matematycznego kształcenia na pierwszym etapie edukacji. Jest to istotne, ponieważ dzieci rozpoczynające edukację szkolną wnoszą z przygotowania przedszkolnego duży potencjał do uczenia się matematyki w szkole podstawowej. Jak twierdzi Edyta Gruszczyk-Kolczyńska „(…) co czwarty uczeń nie potrafi sprostać wymaganiom stawianym na lekcjach matematyki już na początku edukacji szkolnej, a uczniom tym trudno jest pomóc, gdyż na przyczyny pierwotne szybko nakładają się przyczyny wtórne. Mechanizm ten sprawia, że uczniowie ci tracą zaufanie do swoich możliwości umysłowych i nie potrafią korzystać z edukacji matematycznej w następnych latach szkolnych. Towarzyszy temu nasilająca się niechęć do wysiłku umysłowego, która dosłownie rozlewa się na inne przedmioty szkolne. Zniszczeniu ulega też motywacja do nauki i pojawiają się poważne trudności wychowawcze[102]”. Autorka ustaliła także pewne czynniki, które mogą negatywnie wpływać na nauczanie matematyki w klasach początkowych.

[96]Makiewicz M., Fragmenty opinii przygotowanej na zamówienie NIK, s.21, https://www.nik.gov.pl/plik/id,20330,vp,22953.pdf, (dostęp:29.12.2024r.).
[97] Gruszczyk-Kolczyńska E., Diagnoza kryzysu w matematycznym kształceniu dzieci oraz rekomendowane działania naprawcze, https://www.nik.gov.pl/plik/id,19329,vp,21937.pdf, (dostęp: 17.12. 2024r.).
[98] Tatara A., Edukacja wczesnoszkolna wokół problemów i nowych rozwiązań, s. 12, w: Edukacja Elementarna w Teorii i Praktyce, 10(37/3), 11-28.
99 Dudel B., Głoskowska-Sołdatow M., Kompetencje matematyczne i kompetencje naukowo techniczne w edukacji wczesnoszkolnej, Toruń 2017.
[100] Por. Dąbrowski M., (Za) trudne, bo trzeba myśleć. O efektach nauczania matematyki na I etapie kształcenia, IBE, Warszawa 2013.
[101] Konarzewski K., Osiągnięcia szkolne polskich trzecioklasistów w perspektywie międzynarodowej, Centralna Komisja Egzaminacyjna, Warszawa 2012.
[102] Gruszczyk-Kolczyńska E., Zielińska E., Dziecięca matematyka …, op.cit., s. 9.

Pierwszy to nadmierny formalizm, czyli matematyka realizowana w klasach I-III często koncentruje się na formalnych aspektach tego przedmiotu, takich jak zapamiętywanie reguł i algorytmów, zamiast na rozwijaniu zrozumienia pojęć i umiejętności logicznego myślenia. Takie właśnie podejście może ograniczać zdolność dzieci do stosowania wiedzy matematycznej w praktycznych sytuacjach. Drugi czynnik, to źle dobrane przez nauczycieli metody nauczania, które nie będą rozwijać kreatywnego myślenia i zdolności adaptacyjnych. Kolejny, to brak indywidualizacji w procesie kształcenia, a przede wszystkim ignorowanie przez nauczycieli indywidualnych różnić, dotyczących tempa nauk i stylów uczenia się uczniów. Dzieci, które uczą się wolniej, mogą czuć się zniechęcone, a te, które uczą się szybciej, mogą być znudzone i niezaangażowane. Następny czynnik to niewystarczające powiązanie z rzeczywistością. Jeśli matematyka jest nauczana w oderwaniu od codziennego życia i realnych zastosowań, dzieci mogą mieć problem z dostrzeżeniem jej wartości i znaczenia. To z kolei może wpływać na ich motywację do nauki. Ostatni czynnik to niedostateczne wykorzystanie materiałów dydaktycznych, co może ograniczać możliwości doświadczania matematyki w sposób konkretny i interaktywny[103].

W założeniach programu edukacji zintegrowanej nie ma podziału czasu edukacyjnego na wyraźne odcinki. Małgorzata Żytko uważa, że nauczyciel powinien elastycznie dysponować czasem, dzieląc go w dowolny sposób ze względu na potrzeby uczniów[104]. Zjawisko to ma pozytywny, jak i negatywny wpływ na proces nauczania matematyki, gdyż - jak pisze Edyta Gruszczyk -Kolczyńska - nauczanie matematyki w ramach kształcenia zintegrowanego pozwala nauczycielom znacząco skracać czas przeznaczony na kształtowanie zarysów pojęć i umiejętności matematycznych w klasach początkowych. Zaś integrowanie wszystkiego ze wszystkim utrudnia dzieciom matematyzację sytuacji przedstawianych w zadaniach z treścią[105]. Ponadto zintegrowanie „w miejsce poznawczo przekonującej aktywności matematycznej proponuje się dzieciom sztucznie tworzone międzyprzedmiotowe zlepki tematyczne, rachunki „ubrane" w kolejne wersje środowiskowych asocjacji, w których matematykę upatruje się w przeliczaniu bałwanków zimą, liczeniu kwiatków na rabatce wiosną i porządkowaniu liści przy temacie Polska jesień"[106]. Wprowadzenie treści z innych obszarów kształcenia skutecznie

[103] Gruszczyk-Kolczyńska E., Zielińska E., Dziecięca matematyka-dwadzieścia lat później, Kraków 2015, s. 9-15.
[104] Żytko M., Integracja treści kształcenia, art. cyt. W: Agata Tatara, Edukacja wczesnoszkolna wokół problemów i nowych rozwiązań. Edukacja Elementarna w Teorii i Praktyce, 10(37/3),2016, s. 11-28.
105 Gruszczyk-Kolczyńska E., Diagnoza kryzysu w matematycznym kształceniu dzieci oraz rekomendowane działania naprawcze, https://www.nik.gov.pl/plik/id,19329,vp,21937.pdf, (dostęp:17.12. 2024 r.).
[106] Nowak-Łojewska A., Wybrane obszary edukacji matematycznej. Poradnik dla nauczycieli klas I-III, https://ore.edu.pl/wp-content/uploads/phocadownload/EFS/Wybrane-obszary-edukacji-matematycznej-dzieci_ANowak-Lojewska.pdf, (dostęp: dostęp:17.12. 2024).

przeszkadzają dzieciom skupić się na problemach matematycznych. Edyta Gruszczyk-Kolczyńska podaje konkrety przykład: „W pewnym zeszycie ćwiczeń na stronach matematycznych dążono jednocześnie do kształtowania przemienności dodawania i wzbogacania dziecięcej wiedzy o świecie zwierząt. Dlatego umieszczono na jednej stronie zadania o krokodylach, o słoniach i żyrafach. Dzieci, jak to dzieci, całą uwagę skupiły na zwierzętach. Nie dostrzegły problemu matematycznego, że dla wygody liczenia można zmieniać kolejność dodawanych składników, bo suma się nie zmienia. Nie pomogły starania nauczycielki, aby im to uświadomić – dla dzieci nadal najważniejsze były zwierzęta”[107].

W modelu zintegrowanym, w którym kładziony jest nacisk na łączenie treści z różnych dziedzin, dostrzega się „zbyt nikłe uwzględnienie indywidualizacji treści i metod kształcenia (szczególnie do uzdolnień, zainteresowań i tempa pracy uczniów), jak również eksperymentowanie osiągnięć poznawczych uczniów w postaci wiadomości, zaś niedocenianie umiejętności i kształtowania tych postaw”[108]. Niedostosowanie procesu nauczania-uczenia się do indywidualnych potrzeb i zainteresowań dzieci może być powodem do frustracji tych, którzy nie nadążają za programem, jak i znużenia zdolnych, którym brakuje odpowiednich wyzwań.

Matematyka jest przedmiotem formalnym i abstrakcyjnym, dlatego nauczyciele, aby ich uczniowie osiągnęli sukces edukacyjny, powinni „pokonać dystans, jaki dzieli dziecięcy sposób myślenia (oparty na poznawalnym zmysłowo konkrecie), a sferą wnioskowania hipotetyczno-dedukcyjnego, prowadzonego na obiektach abstrakcyjnych”[109]. Jest to możliwe poprzez odpowiednią aranżację procesu nauczania uczenia się, opartą na teorii reprezentacji Jerome Brunera, którego zdaniem – konstruktywistyczny człowiek rozwija się poznawczo dzięki konstruowaniu w umyśle reprezentacji ogólnie rozumianych zdarzeń[110].

Niestety nauczyciele najczęściej stosują formalny sposób nauczania matematyki, który dość szybko może doprowadzić do zniweczenia osiągniętych już w przedszkolu przez dzieci sukcesów intelektualnych i emocjonalnych. Nauczyciele zazwyczaj dążą do tego, aby dokładnie wyjaśnić uczniom wszelkie zagadnienia, starając się uchronić ich przed popełnianiem błędów. Wielokrotnie pokazują procedurę rozwiązywania zadania i omawiają go z klasą, uważając, że taki sposób pozwoli uczniom na samodzielne radzenie sobie z podobną trudnością matematyczną. Taki sposób wprowadzania uczniów w świat matematycznych doznań jest mało

[107] Gruszczyk-Kolczyńska E., Diagnoza kryzysu w matematycznym kształceniu dzieci oraz rekomendowane działania naprawcze…, op. cit.
[108] Bereźnicki F., Reforma edukacji narodowej- istotny problem społeczny, Toruń 1997, nr 11, s. 41.
[109]Makiewicz M., Fragment opinii przygotowanej na zamówienie NIK, https://www.nik.gov.pl/plik/id,20330,vp,22953.pdf, (dostęp: 17.12. 2024).
[110] Bruner J., Poza dostarczone informacje, Warszawa 1978, s. 23-27.

efektywny, gdyż myślenie matematyczne nie polega na przypominaniu sobie przez uczniów, jak rozwiązywali poprzednie zadanie. W miarę upływu lat szkolnych, uczniowie mają coraz większy problem z segregowaniem wiedzy matematycznej zgodnie ze sposobami przekazywanymi przez nauczyciela. Wynika to z faktu, iż operacje matematyczne są coraz bardziej abstrakcyjne, a tym samym mniej czytelne nie tylko ze względu na poziom złożoności, ale także z tego powodu, że uczniowie przestają nadawać im znaczenie[111]. Takie podejście w nauczaniu nie sprzyja rozwijaniu umiejętności myślenia krytycznego i kreatywności[112]. „Skupienie się nauczycieli na nauczaniu matematyki poprzez zapamiętywanie wzorów i reguł, zamiast na rozwijaniu postaw intuicyjnych i poglądowych implikuje, potwierdzony badaniami empirycznymi niski poziom ukształtowania wyobraźni przestrzennej uczniów”[113].

Na lekcjach matematyki w szkole podstawowej dzieci ćwiczą rachunki, a nauczyciele pokazują im jedną drogę rozwiązywania problemów. Często sposób prowadzenia lekcji nie jest zgodny z potrzebami ani możliwościami dzieci. Nauczyciele wiedzą, że powinni stosować różnorodne metody nauczania, ale w praktyce szkolnej na ogół tego nie robią – wynika z to z danych Instytutu Badań Edukacyjnych[114]. Ponadto raport ten ujawnił kolejny problem. Nauczyciele skupiają się na kształtowaniu postaw odtwórczych u uczniów, a nie na kształceniu rozumowania[115]. „Podstawową przyczyną złych wyników nauczania matematyki w klasach najmłodszych jest to, iż szkoła w wielu wypadkach ogranicza się do autorytarnego nauczania, nie doceniając uczenia się opartego na samodzielnym myśleniu i eksperymentowaniu przez dzieci”[116].

W aktualnym systemie edukacji szkolnej nie zwraca się wystarczającej uwagi na rozwijanie zdolności matematycznych, szczególnie w kontekście edukacji wczesnoszkolnej. Jak zauważa E. Gruszczyk-Kolczyńska - więcej niż połowa dzieci polskich - przed rozpoczęciem szkolnej edukacji - wykazuje się uzdolnieniami do nauki matematyki, a co czwarte wysokim stopniem zadatków takich uzdolnień. Po kilku miesiącach nauki w szkole większość tych dzieci przestaje

[111] Kalinowska A., Pozwólmy dzieciom działać – mity i fakty o rozwijaniu myślenia matematycznego, Warszawa 2010, s. 8.
[112] Żytko M., Ogólnopolskie Badanie Umiejętności Trzecioklasistów (OBUT) – pedagogiczny eksperyment z „politycznymi konsekwencjami”, Teraźniejszość – Człowiek – Edukacja, Nr 4(64), 2013 r., s. 113.
[113] Panek D., Pardała A., Diagnozowanie wyobraźni przestrzennej uczniów i studentów, [w:] Dydaktyka matematyki nr 21. Seria V, Kraków 1999 r., s 80.
[114] Karpiński M., Nauczanie matematyki w szkole podstawowej. Raport z badania, https://www.ibe.edu.pl/pl/aktualnosci/520-matematyka-w-szkole-podstawowej, (dostęp:17.12. 2024).
[115] Ibidem
[116] Semadeni Z., Trudności i niepowodzenia w uczeniu się matematyki, [w:] Nauczanie matematyki w klasach początkowych. Podręcznik dla nauczyciela, red. Z. Semadeni, t. 1, wyd. II rozszerz., Warszawa 1991, s. 113.

manifestować swoje znakomite możliwości umysłowe. Powodem takiej sytuacji jest spychanie tych dzieci do poziomu przeciętnych uczniów[117].

„Dzieci z zadatkami uzdolnień matematycznych z wielkim trudem dostosowują się do wzorca przeciętnego ucznia ze względu na cechy swojego umysłu i na to, co już wiedzą i potrafią z matematyki. Dzieci te są przez nauczycieli pouczane, nadmiernie strofowane i przywoływane do porządku. Na dodatek rodzice uzdolnionych dzieci z reguły podtrzymują stanowisko nauczyciela i przymuszają je do tego, aby były w szkole grzeczne, a więc przeciętne. Efektem tej zmasowanej presji społecznej jest to, że uzdolnione matematycznie dzieci już po kilku miesiącach nauki w szkole przestają manifestować swoje znakomite możliwości umysłowe. Towarzyszy temu niszczący proces rozleniwiania umysłów dzieci z zadatkami uzdolnień matematycznych i radości z działalności matematycznej. Niestety, nie sposób tego wszystkiego naprawić w następnych latach szkolnej edukacji”[118].

Innym z słabych punktów w nauczaniu matematyki jest wprowadzenie do procesu nauczania-uczenia się rozwiązywania zadań z zeszytów ćwiczeń lub kart pracy. Zjawisko to, nazywane jest papierową matematyką. „Wielu nauczycieli zaczęło je preferować, ponieważ dzięki niemu nie muszą dokładnie przygotowywać się do lekcji. Nie dostosowują się do rozwoju dzieci. Rozdają uczniom karty pracy lub polecą otworzyć zeszyty ćwiczeń na odpowiedniej stronie, przeczytają zadanie i przypilnują, aby uczniowie wpisali w odpowiednie miejsca właściwe liczby lub znaki działań i relacji. Skutki uboczne papierowej matematyki są dodatkowo zaostrzone przez niedostatki w kształceniu nauczycieli, szczególnie w obszarze edukacji matematycznej”[119].

W badaniach[120] dotyczących jakości kształcenia matematyki w szkołach podstawowych (w tym w klasach III) i gimnazjach województwa kujawsko-pomorskiego, przeprowadzonych w ramach „Programu poprawy jakości kształcenia”, zauważono wyraźny rozdźwięk pomiędzy opiniami nauczycieli, a odczuciami uczniów. Nauczyciele chwalą tzw. papierową matematykę, jednakże uczniowie wyrażają swoje niezadowolenie, co ilustrują ich wypowiedzi podczas przeprowadzonych wywiadów. Z relacji dzieci wynika, że karty pracy są postrzegane jako elementy nauki, które wywołują w nich poczucie znudzenia, zniechęcenia. Jedna z uczennic podkreśliła:

[117] Fragment opinii przygotowanej na zamówienie NIK przez prof. dr hab. Edytę Gruszczyk-Kolczyńską, https://www.nik.gov.pl/aktualnosci/matematyka-do-poprawy.html, (dostęp:17.12. 2024).
[118] Gruszczyk-Kolczyńska E., Diagnoza kryzysu w matematycznym kształceniu dzieci oraz rekomendowane działania naprawcze, Warszawa 2018, [w:] https://www.nik.gov.pl/plik/id,19329,vp,21937.pdf, (dostęp:11.12. 2024 r.).
[119] Ibidem
[120] Nowakowska A., Orzechowska M., Sosulska D., Zambrowska M., i in. „Bydgoski bąbel matematyczny O wprowadzaniu zmian w nauczaniu matematyki w klasach I–III, Warszawa 2014. https://www.ibe.edu.pl/images/download/IBE_Bydgoski_Babel_Matematyczny_NET.pdf, (dostęp:17.12. 2024).

„Nie lubię kart pracy, bo są nudne. To, co jest nudne, wywołuje niechęć.” Uczniowie zwracają uwagę na monotonię związaną z wielokrotnym rozwiązywaniem podobnych zadań oraz z koniecznością pracy z wieloma grafami, co w ich odczuciu staje się przytłaczające: „Nudne też są grafy, jeden to jeszcze, ale 15! – to już jest okropnie nudne”[121].

Stosowanie papierowej matematyki wiąże się z licznymi zagrożeniami, ponieważ dzieciom nie należy jedynie słownie wyjaśniać sensu kształtowanych pojęć i prawidłowości, bowiem „kształtowanie wiadomości i umiejętności matematycznych polega na organizowaniu sytuacji życiowych, wymagających np. liczenia oraz serii zadań matematycznych, które dziecko może rozwiązać, manipulując odpowiednio dobranymi przedmiotami”[122], czego brakuje w papierowej matematyce. Nauczanie w papierowej matematyce sprowadza się do doświadczeń ikonicznych i symbolicznych. Brak jest doświadczeń enaktywnych. Proces nauczania w tym przypadku, jest niepełny. Dzieci pozbawione są tak ważnych czynności manipulacyjnych oraz towarzyszących im rozumowań. Brak przestrzeni na analizę własnych doświadczeń, wnioskowanie i kreowanie nowych rozwiązań zaburzają naturalny proces uczenia się. Ponadto powszechne stosowanie na lekcjach ćwiczeń do matematyki oducza uczniów czytania ze zrozumieniem oraz właściwego interpretowania treści zadań[123].

Jak podkreśla Edyta Gruszczyk-Kolczyńska, „dzieci mogą matematyzować doświadczenia logiczne i matematyczne, jeżeli proces uczenia się jest pełny, czyli obejmuje przechodzenie: od reprezentacji enaktywnych (manipulacyjnie wprowadzane zmiany), przez reprezentację ikoniczną (wizualne doświadczanie skutków obserwowanych zmian) do reprezentacji symbolicznych, do słownego ujęcia sensu tych zmian i zapisania ich w formie np. działania”[124].

Często nauczyciele edukacji przedszkolnej i wczesnoszkolnej[125] zapominają o tym, że metody nauczania i uczenia się powinny być dostosowane do możliwości rozwojowych uczniów i stosują metody podające- co prowadzi do mechanicznego rozwiązywania zadań, czego skutkiem może być niezrozumienie podstawowych pojęć matematycznych oraz „rozwijanie postaw intuicyjnych i poglądowych implikuje, potwierdzony badaniami empirycznymi, niski poziom ukształtowania wyobraźni przestrzennej uczniów”[126]. Bolączką w nauczaniu i uczeniu się

[121]Ibidem
[122] Gruszczyk-Kolczyńska E.(red.), Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz edukacja matematyczna dzieci w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i pierwszym roku szkolnej edukacji, Warszawa 2009, s.33.
[123] Matematyka do poprawy: NIK o nauczaniu matematyki, s.21, https://www.nik.gov.pl/najnowsze-informacje-o-wynikach-kontroli/matematyka-do-poprawy.html, (dostęp:17.12. 2024).
[124] Gruszczyk-Kolczyńska E., O kryzysie edukacji matematycznej dzieci. Rozpaczliwe wołanie o działania naprawcze, s.16, https://www.matematykadlawszystkich.pl/mednr1/Gruszczyk.pdf, (dostęp:17.12. 2024).
[125] Żytko M., Ogólnopolskie Badanie Umiejętności Trzecioklasistów (OBUT) – pedagogiczny eksperyment z „politycznymi konsekwencjami”, Teraźniejszość – Człowiek – Edukacja, Nr 4(64), 2013, s.113.
[126] Panek D., Pardała A., Diagnozowanie wyobraźni przestrzennej uczniów i studentów, [w:] Dydaktyce matematyki nr 21. Seria V, Kraków 1999, s 80.

dzieci edukacji matematycznej jest to, że nauczyciele przygotowują standardowe zadania i ćwiczenia, które nie są atrakcyjne, nie motywują do działania i wysiłku poznawczego. Zapominają, że stosując aktywizujące metody nauczania, osiągnęliby lepsze wyniki nauczania i uczynili proces uczenia się bardziej angażującym i kreatywnym.

Innym elementem, ujemnie ocenianym w edukacji matematycznej, podkreśla to również raport z badania OBUT[127] - jest to, że „głównym celem edukacji na początkowym etapie kształcenia (…) jest realizacja podstawy programowej, a nie rozwój dzieci i zaspokajanie ich indywidualnych potrzeb edukacyjnych. Jednym z ważnych zadań nauczyciela w klasach początkowych jest monitorowanie realizacji podstawy programowej, a nie planowanie pracy z dziećmi stosownie do ich potrzeb rozwojowych"[128]. Konsekwencją takiego podejścia do realizacji podstawy programowej staje się działanie nauczycieli, które można umownie nazwać „schizofrenicznym". W dziennikach i dokumentach monitorują podstawę, a na lekcji pracują inaczej, dostosowując ofertę edukacyjną do możliwości dzieci, które są zróżnicowane, ale z pewnością większe, niż jest to określone w podstawie programowej dla I etapu kształcenia[129].

Krytyka skierowana również została w stronę niedostosowania procesu nauczania do indywidualnych potrzeb ucznia, o czym już wcześniej pisałam, podając czynniki sformułowane przez Edytę Gruszczyk-Kolczyńską, które mogą negatywnie wpływać na nauczanie matematyki w klasach początkowych. „Indywidualizacja w nauczaniu jest terminem tradycyjnie definiowanym jako uwzględnianie w systemie dydaktyczno–wychowawczym różnic indywidualnych między uczniami i stosowanie takich zabiegów pedagogicznych, które (przy uwzględnianiu owych różnic) sprzyjają maksymalnemu rozwojowi osobowości uczących się"[130]. Bogusław Niemierko natomiast definiuje kształcenie indywidualne jako „kształcenie – zorientowane na jednostkę, a nie grupę uczniów; swoiste dla każdego nauczyciela, którego system dydaktyczny jest spójny; prowadzone z pojedynczym uczniem, jak w trybie korepetycyjnym; dostosowane do różnic między uczniami, jakie zostały wcześniej rozpoznane; zwiększające różnice między uczniami i odrębność poszczególnych uczniów; rozwijające niezależność ucznia od grupy i – szerzej - od otoczenia społecznego"[131]. Na potrzeby mojej pracy terminem indy-

[127] Żytko M., Ogólnopolskie Badanie Umiejętności Trzecioklasistów (OBUT) – pedagogiczny eksperyment z „politycznymi konsekwencjami", Teraźniejszość – Człowiek – Edukacja, Nr 4(64) 2013 s. 114,
[128] Ibidem, s.114
[129] Ibidem s.114-115.
[130] Śliwerski B., Na ostrzu noża. „Vox Educandi" 2005, nr 1 (15), s. 3.
[131] Niemierko B., Kształcenie szkolne. Podręcznik skutecznej dydaktyki, Warszawa 2007, s. 200.

widualizacja określam – uwzględnianie w systemie dydaktyczno – wychowawczym różnic indywidualnych między uczniami i stosowanie takich zabiegów pedagogicznych, które sprzyjają maksymalnemu rozwojowi osobowości uczących się.

Nauczyciele edukacji wczesnoszkolnej w niewielkim zakresie lub w ogóle nie stosują indywidualizacji procesu nauczania-uczenia się, prowadząc zajęcia „równym frontem", nie zauważając indywidualnych potrzeb dzieci. Konsekwencją takich działań jest frustracja dzieci mających problemy oraz niewykorzystanie potencjału uzdolnionych matematycznie. Problem niestosowania indywidualizacji lub stosowania w bardzo wąskim zakresie podkreśla Raport Polska 2030. Zapisano w nim, że: „Jednym z kierunków reform oświaty musi być indywidualizacja procesu nauczania przy zachowaniu wysokich standardów co do oczekiwanych efektów nauczania. (…) Jeden model szkoły, jeden sposób nauczania dla wszystkich powoduje, że szkoła nie jest dobra dla nikogo. Kończą się czasy „masowego" kształcenia dzieci według jednego programu (…). Na dziś polskim szkołom w większości wciąż bardzo daleko do realizacji idei edukacji spersonalizowanej, która sprowadza się do tego, aby szkoła podjęła wysiłek dopasowania się do zróżnicowanych potrzeb i predyspozycji uczniów, a nie skupiała się na dopasowaniu każdego ucznia do oferowanego modelu nauczania"[132]. Fragment tego raportu „podnosi potrzebę konstruowania edukacji na miarę każdego ucznia zgodnie z jego rozwojem, predyspozycjami i oczekiwaniami. Jest to możliwe dzięki zmianie obecnej szkoły i nadanie jej nowego oblicza. Zadaniem szkoły przyszłości jest stworzenie oferty edukacyjnej dla wszystkich, dla różnych grup uczniów i substandardowych, i ponadstandardowych"[133] (pod względem uzdolnień, motywacji, postaw), czyli silniejsze niż kiedykolwiek różnicowanie wymagań i indywidualizowanie pracy z uczniami. „Głęboka dyferencjacja procesu kształcenia staje się potrzebą i szansą minimalizacji niepowodzeń szkolnych"[134]. Celem zastosowania indywidualizacji pracy z uczniem, jest poprawianie jego wyników uczenia się poprzez wykorzystanie w najwyższym stopniu możliwości oraz stopnia rozwoju [135]. Są różne sposoby indywidualizacji nauczania. Dotyczyć one mogą zróżnicowania przydziałów czasowych, celów edukacyjnych, treści programowych, metod, form, stosowanych środków, jak również strategii uczenia się.

Wadą obecnego systemu jest również brak programów autorskich, opracowywanych przez nauczyciela lub grupę nauczycieli. Ponadto pisane do tych programów podręczniki są tworzone

[132] Boni M. (red.), Polska 2030. Wyzwania rozwojowe. Kancelaria Prezesa Rady Ministrów, Warszawa 2009.
[133] Stróżyński K., Nowe potrzeby edukacyjne na IV etapie kształcenia. „Otwarta Szkoła" 2002, nr 4.
[134] Karpińska A., W poszukiwaniu źródeł edukacyjnego sukcesu. Wyzwania – strategie – złożoność XXI wieku. [w:] Edukacyjne tendencje XXI wieku w dialogu i perspektywie, (red.) A. Karpińska, Białystok 2005, s. 19.
[135] Kruszewski K. (red.), Sztuka nauczania. Czynności nauczyciela, Warszawa 2004, s.130-131.

przez osoby zatrudnione przez wydawnictwa. Nie ma więc możliwości dostosowania tych podręczników do indywidualnych potrzeb uczniów ze względu na brak znajomości specyficznych potrzeb lokalnych społeczności oraz uczniów konkretnej klasy i pojedynczego ucznia.

Raport Najwyższej Izby Kontroli porusza również problem związany z programami nauczania w polskich szkołach. Z analiz NIK wynika, że w 85% zbadanych placówek, mimo posiadania odpowiednich uprawnień, nauczyciele nie podjęli decyzji o opracowaniu własnych programów nauczania. Zamiast tego, skorzystali z gotowych propozycji dedykowanych przez wydawnictwa edukacyjne[136].

Innym niedociągnięciem związanym z procesem nauczania matematyki, jak zauważa Małgorzata Makiewicz „jest zaniedbywanie ogólnej refleksji nad matematycznością świata i użytecznością matematyki. Nie poświęca się odpowiedniego miejsca kulturze matematycznej, a w szczególności językowi matematycznemu, który prowadzi uczniów do konstruowania wiedzy i rozwijania ich myślenia. Język matematyki jest niezbędnym elementem kultury matematycznej, który decyduje o dalszym kształceniu oraz pozwala dzieciom na wyrażanie swoich myśli w sposób uporządkowany i przejrzysty" [137]. „Bez dobrze wykształconego języka matematyki nie można w pełni komunikować się w zakresie matematycznych problemów, nie można przedstawić poprawnego rozwiązania problemu, nawet jeśli pojęcia są opanowane, a pomysł jest dobry. Niezrozumienie treści zadania lub niemożność sformułowania poprawnej odpowiedzi w sytuacji egzaminu (np. matury) stanowi poważne utrudnienie, a czasami wręcz uniemożliwia rozwiązanie problemu"[138]. Niewłaściwe akcentowanie utylitarnego charakteru kompetencji kształconych przez matematykę oraz niedostrzeganie tzw. wartości społecznych, to następny mankament w edukacji matematycznej[139].

Kolejny zarzut kierowany do nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej to nieprawidłowy sposób planowania zajęć. Większość nauczycieli w przedszkolach i klasach początkowych wprowadza dzieci w zbyt skomplikowane pojęcia matematyczne, czynią to zbyt wcześnie. Jean Piaget zwraca uwagę na „zbyt pospieszne przechodzenie od struktury jakościowej omawianych zagadnień do bezpodstawnie szybkiego wprowadzania, np. stosunków liczbowych i praw ilościowych"[140]. Wynika to z braku zrozumienia „raczej sposobu nauczania, nie zaś jego treści"[141].

[136] Matematyka do poprawy. NIK o nauczaniu matematyki, https://www.nik.gov.pl/najnowsze-informacje-o-wynikach-kontroli/matematyka-do-poprawy.html, (dostęp:29.12.2024).
[137] Makiewicz M., Opinia w przedmiocie diagnozy problemów związanych z procesem nauczania matematyki w szkole (począwszy od IV klasy szkoły podstawowej) wraz z odpowiednimi rekomendacjami, s.7, https://www.nik.gov.pl/plik/id,19330,vp,21938.pdf, (dostęp:17.12. 2024).
[138] Ibidem
[139] Ibidem
[140] Piaget J., Dokąd zmierza edukacja?, przeł. M. Domańska, Warszawa 1977, s. 28.
[141] Ibidem s. 24.

Edukacji matematycznej nie sprzyja także zła organizacja pracy nauczycieli. Dzieci są często wprowadzane w świat bardziej zaawansowanych zagadnień bez zachowania odpowiedniej organizacji procesu uczenia się, który jak pisze E. Gruszczyk-Kolczyńska, zaczyna się „od działań wykonywanych na konkretach poprzez słowne (werbalne) określenie ich sensu, do symbolicznego zapisywania czynności matematycznych”[142] oraz niedostosowania edukacji do rzeczywistych potrzeb rozwojowych dzieci i możliwości konstruowania przez nich wiadomości i umiejętności matematycznych, jak również brak odwoływania się nauczycieli do doświadczeń uczniów. Istotną kwestią podnoszoną w nauczaniu matematyki jest konieczność odwoływania się do dotychczasowych doświadczeń dziecka oraz przyjęcie założenia, że matematyka nie składa się z kawałków, lecz jest ciągłą, spójną i hierarchiczną strukturą. Posługuje się własnym językiem, a ubrana w abstrakcyjne pojęcia stanowi ogromne wyzwanie, któremu muszą sprostać i uczniowie, i nauczyciele[143].

Dla nauczycieli wychowania przedszkolnego i edukacji wczesnoszkolnej połączenie wiedzy z zakresu procesu uczenia się jednostki, psychologii dziecka, pedagogiki i metodyki edukacji matematycznej jest trudne. Dlatego w rzeczywistości szkolnej integracja wiedzy z tych właśnie obszarów może stanowić wyzwanie. Wynika to z faktu, że te zagadnienia są zazwyczaj wykładane jako osobne przedmioty i to w różnych latach studiów. Taki sposób kształcenia powoduje, że nauczyciele często: „organizują edukację matematyczną, nie troszcząc się o prawidłowości rozwoju umysłowego i uczenia się dzieci oraz wybierają autorskie programy i pakiety edukacyjne, pomijając to, w jakim stopniu respektowane są w nich prawidłowości rozwoju umysłowego dzieci”[144].

Nauczyciele odgrywają kluczową rolę w edukacji matematycznej. Ich podejście do nauczania, umiejętności komunikacyjne oraz zdolność do motywowania uczniów mają ogromny wpływ na efektywność procesu edukacyjnego. Niestety, nie wszyscy nauczyciele są odpowiednio przygotowani do prowadzenia zajęć matematycznych. Często brakuje im wiedzy na temat nowoczesnych metod nauczania czy umiejętności pracy z dziećmi o różnych potrzebach. „Problem ten może być generowany przez posiadanie przez nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej niskich kompetencji w zakresie pedagogicznych i psychologicznych podstaw kształtowania

[142] Gruszczyk-Kolczyńska E. (red.), Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz edukacja matematyczna dzieci w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i w pierwszym roku szkolnej edukacji, Warszawa 2009, s. 14.
[143] Matematyka do poprawy. NIK o nauczaniu matematyki, s.2, https://www.nik.gov.pl/najnowsze-informacje-o-wynikach-kontroli/matematyka-do-poprawy.html, (dostęp: 29.12.2024).
[144] Gruszczyk-Kolczyńska E. (red.), Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz edukacja matematyczna dzieci w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i w pierwszym roku szkolnej edukacji, Warszawa 2009, s. 15.

wiadomości i umiejętności matematycznych. Konsekwencją jest rozbieżność pomiędzy sposobem nauczania matematyki a realnymi możliwościami umysłowymi uczniów”[145]. Wszelkie działania naprawcze w kształceniu edukacji matematycznej mają szczególne znaczenie nie tylko do kształcenia wiedzy i umiejętności, ale także do ogólnego rozwoju myślenia człowieka, gdyż, jak stwierdził J. Piaget, matematyka posiada „walory kształcące i rozwijające umiejętności logicznego myślenia”[146].

Nauczyciele matematyki już w szkołach podstawowych sygnalizują, że w edukacji początkowej nie jest najlepiej z nauczaniem matematyki. Skarżą się, że wielu uczniów nie potrafi spełnić ich oczekiwań, mało wiedzą, co jest konsekwencją niskiego poziomu matematycznego kształcenia w klasach początkowych[147]. Potwierdzają to wyniki Ogólnopolskiego Badania Umiejętności Trzecioklasistów (OBUT), które zostały przeprowadzone w 2013 roku, gdzie średni wynik ucznia piszącego test matematyczny wyniósł 10,62 punktu na 18 możliwych[148]. Badanie powtórzono w 2014, w którym średni wynik trzecioklasisty biorącego udział w badaniach wyniósł 7,9 punktu na 14 możliwych[149]. Istotnym obszarem krytyki jest także redukowanie matematyki do rachunków i procedur. Praktyka szkolna oraz programy nauczania koncentrują się głównie na kształtowaniu sprawności rachunkowej, marginalizując inne aspekty kompetencji matematycznych, takie jak argumentowanie, rozumowanie, modelowanie czy komunikowanie się językiem matematyki. Tak zawężony obraz matematyki nie sprzyja rozwijaniu jej kulturowego wymiaru, w którym istotne są między innymi logiczne myślenie, precyzja wypowiedzi czy zdolność dostrzegania określonych struktur i zależności[150]. Kolejnym problemem jest niewystarczające wykorzystanie potencjału zabawy i sytuacji zadaniowych, bliskich doświadczeniu dziecka. W edukacji przedszkolnej zabawa powinna stanowić podstawową formę aktywności również w obszarze matematyki. Wiele okazji do uczenia się występuje właśnie w czasie spontanicznych lub organizowanych, indywidualnych i zbiorowych zabaw, podczas których dzieci zdobywają wiele umiejętności i przyswajają związane z tymi zabawami nowe informacje. Dzieci uczą się tego, czego chcą się uczyć, a przecież w rzeczywistości uczą się

[145] Matematyka do poprawy. NIK o nauczaniu matematyki, s.20, https://www.nik.gov.pl/najnowsze-informacje-o-wynikach-kontroli/matematyka-do-poprawy.html, (dostęp: 29.12.2024).
[146] Piaget J., Dokąd zmierza edukacja?, przeł. M. Domańska, Warszawa 1977.
[147] Remża P., Uwarunkowania niepowodzeń szkolnych z matematyki, Białystok 2025, s. 43.
[148] Pregler A., (red.), Ogólnopolskie Badanie Umiejętności Trzecioklasistów Raport OBUT 2013, Instytut Badań Edukacyjnych, Warszawa 2013, s.8.
[149] Karpiński M., Nowakowska A., Orzechowska M., Sosulska D., Zambrowska M., Ogólnopolskie Badanie Umiejętności Trzecioklasistów Raport OBUT 2013, Instytut Badań Edukacyjnych, Warszawa 2013, s.7.
[150] Treliński G., Stosowanie matematyki jako problem dydaktyki matematyki, Kraków 1982, s.28.

tego, czego chce nauczyciel i w tym tkwi cała mądrość edukacji małego dziecka[151]. W kontekście edukacji wczesnoszkolnej krytyce podlega również system oceniania, który niestety bardzo często nie uwzględnia indywidualnego procesu uczenia się dziecka. Nauczyciele, stosując ocenianie opisowe, często koncentrują się na efektach końcowych, pomijając drogę dochodzenia do rozwiązania. Brakuje także działań związanych z analizą popełnionych przez uczniów błędów, które odpowiednio omawiane i interpretowane mogą pełnić funkcję diagnostyczną i rozwojową[152].

Krytyce podlega także słabe powiązanie matematyki z codziennym doświadczeniem dziecka. Często nauczanie realizowane jest w oderwaniu od realnych sytuacji życiowych, co może utrudniać uczniom dostrzeganie użyteczności i sensu matematyki. Należy podkreślić, że nauczanie matematyki w edukacji wczesnoszkolnej powinno opierać się na kontekstach bliskich dzieciom, umożliwiając jednocześnie naturalne odkrywanie pojęć matematycznych poprzez działanie, zabawę i eksplorację.

Kończąc, warto podkreślić, że „nie ma absolutnej niezdolności do uczenia się matematyki, nie istnieje także swego rodzaju matematyczna ślepota. Dlatego każdy normalny i zdrowy uczeń, przy prawidłowym nauczaniu, może przyswoić podstawowe pojęcia i umiejętności matematyczne”[153]. Natomiast niepowodzenia w matematyce nie oznaczają braku zdolności matematycznych. Aby przezwyciężyć trudności w nauce tego przedmiotu, wystarczy właściwe wsparcie ze strony nauczyciela, motywacja czy dostosowanie metod nauczania do etapu rozwojowego uczniów. Należy także rozszerzyć kompetencje nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej o wiadomości i umiejętności potrzebne do diagnozowania u dzieci tych kompetencji, które są konieczne do odnoszenia sukcesów w nauce matematyki w szkole, kształtowania u dzieci dojrzałości do edukacji matematycznej, prowadzenia zajęć dydaktyczno-wyrównawczych z dziećmi, które nie potrafią sprostać oczekiwaniom stawianym im w szkolnym nauczaniu matematyki[154]. Ponadto niezbędne jest też rozszerzenie kompetencji nauczycieli klas I-III o wiedzę i umiejętności dotyczące manifestowania przez uczniów specyficznych trudności w nauce matematyki, rozpoznawania u uczniów sygnałów specyficznych trudności w opanowaniu wia-

[151] Adamek I., Praktyka rozwojowa w wychowaniu małego dziecka, Kraków 1998, s.107.
[152] Zob. Konopka I. (red.), Ocenianie w klasach I-III, Warszawa 2015.
[153] Podaję za Gruszczyk-Kolczyńska A.Z., Dlaczego dzieci nie potrafią uczyć się matematyki?, Warszawa 1989, s. 101.
[154] Gruszczyk-Kolczyńska E., Diagnoza kryzysu w matematycznym kształceniu dzieci oraz rekomendowane działania naprawcze, Warszawa 2018, [w:] https://www.nik.gov.pl/plik/id,19329,vp,21937.pdf, (dostęp: 11.12. 2024).

domości i umiejętności matematycznych, aby nie dopuścić do blokad w uczeniu się matematyki, form i metod prowadzenia zajęć dydaktycznych z dziećmi, które nie potrafią korzystać z edukacji organizowanej im w szkole[155].

Podsumowując, krytyka edukacji matematycznej realizowanej w przedszkolu i klasach początkowych, opisana przeze mnie w niniejszym podrozdziale, ma charakter wielowymiarowy. Obejmuje aspekty systemowe, dydaktyczne, a także psychologiczne. Koncentruje się wokół takich problemów szczegółowych, jak nadmierna formalizacja, dominacja metod podawczych, słabe powiązanie treści matematycznych z doświadczeniem ucznia, niedostateczne przygotowanie nauczycieli do realizacji procesu dydaktycznego w klasach młodszych czy niewłaściwe ocenianie. Elementem krytyki edukacji matematycznej jest także utrzymująca się dominacja transmisyjnego modelu nauczania, w którym nauczyciel pełni rolę nadawcy wiadomości, a uczeń jest biernym odbiorcą. Taki właśnie model zmniejsza możliwości samodzielnego konstruowania wiedzy przez dziecko. W praktyce szkolnej oznacza to, że uczniowie tylko incydentalnie mają możliwość samodzielnie zgłębiać problemy matematyczne, formułować hipotezy czy dochodzić do rozwiązań w oparciu o własne doświadczenia. W miejsce tego przeważają zadania zamknięte, które wymagają zastosowania jednego, z góry określonego schematu działania. Ponadto nauczyciele zbyt szybko wprowadzają abstrakcyjne zapisy matematyczne bez wcześniejszego opanowania pojęć na poziomie konkretnym. Wskazane powyżej ograniczenia akcentują potrzebę redefinicji podejścia do nauczania matematyki w klasach I-III. Podkreślają konieczność odejścia od schematycznego modelu nauczania matematyki, wskazując na podejście związane z aktywnością poznawczą dziecka, jego doświadczeniem. Jednocześnie zwracają uwagę na potrzeby rozwojowe uczniów i społeczno-kulturowy wymiar uczenia się oraz na rozwój kultury matematycznej uczniów.

[155] Gruszczyk-Kolczyńska E., Diagnoza kryzysu w matematycznym kształceniu dzieci oraz rekomendowane działania naprawcze…, op. cit.

Rozdział IV. Założenia metodologiczne badań własnych

Skutkiem prawidłowo i rzetelnie przeprowadzonych badań pedagogicznych jest obiektywny i rzeczywisty obraz badanego zjawiska. Podjęty w pracy temat dotyczy wspierania rozwoju wybranych składników kultury matematycznej uczniów klas 1-3 szkoły podstawowej za pomocą fotografii. W poprzednich rozdziałach zaprezentowałam teoretyczne założenia, dotyczące badanego zjawiska. Podkreśliłam ważność nauczania matematyki, która oferuje różnorodne korzyści, wykraczające poza samą umiejętność liczenia. Uczy myśleć logicznie i analitycznie. A także uczy strukturyzowanego podejścia do problemów, od ich zdefiniowania, przez poszukiwanie rozwiązań, aż po ocenę ich skuteczności. Często nauczanie i uczenie się matematyki bywa wyzwaniem. Wymaga wytrwałości, cierpliwości, a przede wszystkim samodyscypliny. Niezmiernie ważne są także działania nauczyciela, które mają zmotywować uczniów do nauki tego trudnego przedmiotu, jakim jest matematyka. Stąd konstruując pracę naukową i planując własne badania, istotne jest, aby uzyskane wyniki były użyteczne zarówno dla teorii, jak i dla praktyki pedagogicznej[1]. Efektywność przeprowadzanych badań naukowych determinowana jest przede wszystkim prawidłowym przygotowaniem całego procesu badawczego, na który składają się istotne elementy takie, jak przedmiot i cele badań, problemy badawcze, zmienne i wskaźniki, metody i techniki badań oraz organizacja i przebieg badań. W niniejszym rozdziale zostaną szczegółowo scharakteryzowane poszczególne elementy. Z perspektywy metodologii badań pedagogicznych podjęta w pracy działalność badawcza ma postać badań diagnostycznych o charakterze ilościowo-jakościowym, która umożliwia budowanie wiedzy obiektywnej, będącej podstawą odkrywania praw i formułowania prawidłowości odnoszących się do eksplorowanych zjawisk[2].

4.1. Przedmiot i cele badań

Podstawowym elementem każdego badania naukowego jest określenie przedmiotu i celów badań. W ujęciu teoretycznym, przedmiot badań jest ważnym punktem, wokół którego organizuje się całe przedsięwzięcie badawcze. Istotne jest jego precyzyjne zdefiniowanie, co pozwala badaczowi skoncentrować się na określonym aspekcie rzeczywistości, unikając tym samym

[1] Palka S., *Metodologiczne aspekty uprawiania pedagogiki* [w:] *Orientacje w metodologii badań pedagogicznych*, S. Palka (red.), Wydaw. Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 1998, s. 13.
[2] Zaręba E., *Badania empiryczne ilościowe i jakościowe w pedagogice*, [w:] Orientacje w metodologii badań pedagogicznych, S. Palka (red.), Wydaw. Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 1998, s. 43-45.

rozpraszania się na zbyt szerokie i mało konkretne obszary. Prowadzenie badań naukowych zawsze odnosi się do określonych przedmiotów i sposobu, w jaki jest on postrzegany[3]. Przedmiotem badań naukowych mogą być elementy rzeczywistości, czyli pewna dziedzina zjawisk społecznych, która znalazła się w kręgu zainteresowań badacza. Mogą to być także obiekty, rzeczy lub zjawiska, o których badacz chce formułować twierdzenia i które zamierza poznać bliżej[4], lub „wszystko to, co składa się na tak zwaną rzeczywistość społeczną, a więc zbiorowości i zbiory społeczne, instytucje społeczne, procesy i zjawiska społeczne"[5]. W odniesieniu do danego przedmiotu badań naukowcy prowadzą dany proces badawczy, a następnie formułują zasady, teorię i prawidłowości. Będąc czynnym nauczycielem matematyki, twierdzę, że kultura matematyczna jest także faktorem ułatwiającym życie w społeczeństwie i umożliwiającym zaspokojenie różnych potrzeb. Stąd w swojej pracy przedmiotem badań empirycznych uczyniłam wybrane składniki kultury matematycznej uczniów klas 1-3 szkoły podstawowej.

Kolejnym punktem przy realizacji procesu badawczego jest sformułowanie celów badań. „Zasadniczym celem poznania naukowego jest zdobycie wiedzy maksymalnie ścisłej, maksymalnie pewnej, maksymalnie ogólnej, maksymalnie prostej, o maksymalnej zawartości informacji"[6]. Na potrzeby mojej dysertacji cel badań rozumiany będzie jako dogłębne poznanie wybranego fragmentu rzeczywistości społecznej. W tym miejscu należy zaznaczyć, że głównym celem badań jest poznanie, które umożliwi skuteczne działanie[7]. Cel musi być konkretny, klarowny i realny, ale też adekwatny do możliwości, jakie posiada badacz[8]. Powinien zawierać zamiary, intencje i jego główne idee[9]. W badaniach naukowych, związanych z pedagogiką; istotne znaczenie ma koncepcja celów opracowanych przez Janusza Gniteckiego[10], który rozróżnia cele teoretyczne, poznawcze i praktyczne. Cele teoretyczne służą uzyskaniu danych weryfikujących aktualny stan wiedzy, jednocześnie wzbogacają teoretyczną wiedzę pedagogiczną. Pod pojęciem celu poznawczego kryją się czynności związane z opisywaniem, wyjaśnianiem oraz przewidywaniem zjawisk pedagogicznych. Natomiast cele praktyczne związane są z opracowaniem wytycznych pod adresem eksplorowanych zjawisk w pracy badawczej[11].W

[3] Maszke A.W., *Metody i techniki badań pedagogicznych*, Rzeszów 2008, s. 48.
[4] Por. Nowak S., *Metodologia badań społecznych*, Warszawa 2012, s. 31; A. W. Maszke, *Metody i techniki badań pedagogicznyc*h…, op. cit., s.91.
[5] Sztumski J., *Wstęp do metod i technik badań społecznych*, Śląsk, Katowice 1995, s. 7.
[6] Pilch T., *Zasady badań pedagogicznych,* Warszawa 1998, s. 8.
[7] Pilch T., *Zasady badań pedagogicznych*, Żak, Warszawa 1995, s. 19.
[8] Zaczyński W.P., *Praca badawcza nauczyciela…,* op. cit., s. 86.
[9] Creswell J.W., *Projektowanie badań naukowych*, Kraków 2013, s. 131.
[10] Gnitecki J., *Zarys metodologii badań w pedagogice empirycznej*, Zielona Góra 1993, s. 128.
[11] Ibidem, s. 129–131.

oparciu o wyżej zaprezentowane rozumienie celów badań, ze szczególnym uwzględnieniem koncepcji Janusza Gniteckiego sformułowałam następujące cele:

- diagnoza, analiza oraz określenie poziomu kultury matematycznej uczniów klas 1-3 w wybranych obszarach (cel poznawczy);
- analiza fotoedukacji matematycznej jako koncepcji dydaktycznej wspierającej rozwój kultury matematycznej uczniów edukacji wczesnoszkolnej (cel teoretyczny);
- określenie dyrektyw pedagogicznych dotyczących kształtowania u uczniów kultury matematyczne (cel praktyczny).

4.2. Problemy badawcze

Zaplanowane badanie naukowe powinno opierać się na problemie badawczym. Jak twierdzi Heliodor Muszyński, określony przez badacza temat pracy i cel badania prowadzą do potrzeby określania problemów badawczych, które powinny być oparte na opisie stanu rzeczy oraz próbie wyjaśnienia związków pomiędzy zjawiskami, które stanowią stan rzeczy między sobą[12]. „Problem badawczy to tyle, co pewne pytanie lub zespół pytań, na które odpowiedzi ma dostarczyć badanie”[13]. Należy jednak podkreślić, że nie każde pytanie stawiane przez badacza może być problemem badawczym. Z pytań badawczych należy wykluczyć wszelkie pytania, których celem jest otrzymanie gotowych odpowiedzi od innych osób. W metodologii badań podkreśla się trzy podstawowe źródła wyłaniających się problemów badawczych. Są to osobiste preferencje badacza, potrzeby społeczne i znajomość aspektów naukowo-metodologicznych[14]. Natomiast biorąc pod uwagę rolę, zakres i przedmiot problemów, wyróżnia się problemy ogólne i szczegółowe; problemy teoretyczne i praktyczne; oraz problemy podstawowe i cząstkowe[15]. Dobry problem badawczy to taki, który wynika z dotychczasowych osiągnięć nauki i nie jest zawieszony w teoretycznej i metodologicznej próżni[16], a także jest dla samego badacza bodźcem intelektualnym „wywołującym reakcję w postaci badań naukowych”[17]. Istotne jest, aby problemy badawcze były sprecyzowane w sposób klarowny, prosty i zrozumiały, tak aby badacz wyczerpał informacje na temat, który poddał badaniom. W prowadzo-

[12] Muszyński H., *Metodologiczne vademecum badacza pedagoga*, Poznań 2018, s. 101.
[13] Nowak S., *Metodologia badań socjologicznych. Zagadnienia ogólne*, Warszawa 1970, s. 214.
[14] Łobocki M., *Metody badań pedagogicznych*, Warszawa 1978, s. 61.
[15] Pilch T., Bauman T., *Zasady badań pedagogicznych: strategie ilościowe i jakościowe*, Warszawa 2001, s. 43.
[16] Brzeziński J., *Metodologia badań psychologicznych*, Warszawa 2019, s. 217.
[17] Frankfort-Nachmias C., Nachmias D., *Metody badawcze w naukach społecznych*, , Poznań 2001, s. 251.

nych badaniach empirycznych poszukiwałam relacji zachodzących pomiędzy fotoedukacją matematyczną i rozwojem wybranych elementów kultury matematycznej. Uwzględniając powyższe sformułowałam następujący problem główny i problemy szczegółowe:

Problem główny

W jakim stopniu wprowadzenie do procesu realizacji zajęć z obszaru edukacji matematycznej fotoedukacji determinuje rozwój wybranych elementów kultury matematycznej uczniów klas I-III szkoły podstawowej?

Problemy szczegółowe:

1. W jakim stopniu zajęcia z wykorzystaniem fotoedukacji determinują poziom sprawności matematycznej uczniów klas I-III szkoły podstawowej?
2. W jakim stopniu zajęcia z wykorzystaniem fotoedukacji matematycznej kształtują język matematyczny uczniów klas I-III szkoły podstawowej?
3. W jakim stopniu zajęcia z wykorzystaniem fotoedukacji matematycznej kształtują wyobraźnię matematyczną uczniów klas I-III szkoły podstawowej?
4. W jakim stopniu zajęcia z wykorzystaniem fotoedukacji matematycznej determinują rozwój elegancji matematycznej uczniów klas I-III szkoły podstawowej?
5. W jakim stopniu zajęcia z wykorzystaniem fotoeduakcji matematycznej determinują rozwój twórczości matematycznej uczniów klas I-III szkoły podstawowej?

4.3. Zmienne i wskaźniki badań

Następnym krokiem przy realizacji badań jest określenie zmiennych i wskaźników. Zmienne badawcze to obserwowane podstawowe cechy konstytutywne dla danego wydarzenia lub zjawiska[18]. Celem zmiennych jest uszczegółowienie głównego przedmiotu badań naukowych oraz problemów badawczych, jakie zamierza się rozwiązać. Zmienne muszą być: empiryczne, poznawcze, mierzone, liczone i opisywane”[19].

Ze względu na kategorie, w jakich zmienne mogą zostać wyrażone, wymienić można: zmienne niezależne, które określają charakter oddziaływań, w których upatruje się przyczyn określonych zmian. Czyli zmiennymi niezależnymi są „zjawiska wpływające na powstanie i zprzebieg zjawisk będących zmiennymi zależnymi”[20]; zmienne zależne, w których wzajemne

[18] Łobocki M., Wprowadzenie do metodologii badań pedagogicznych, Kraków 2009, s. 32.
[19] Pilch T., *Zasady badań pedagogicznych*, Warszawa 1995, s. 31–32.
[20] Skorny Z., *Prace magisterskie z psychologii i pedagogiki: przewodnik metodologiczny dla studiujących nauczycieli*, Warszawa 1984, s. 50.

oddziaływanie zmiennych na siebie powodują zmiany w zespole zmiennych - innej zmiennej, czyli za zmienną zależną traktuje się „zjawisko podlegające wpływom innych zjawisk. Czynimy je przedmiotem badań i staramy się oddalić od zjawisk spełniających funkcję niezależnej lub pośredniczącej”[21]. Ze względu na zakres zjawisk, spełniających funkcję zmiennych, można wyróżnić zmienne globalne, które obejmują szeroki zakres zjawisk, oraz zmienne szczegółowe (cząstkowe), obejmujące węższy zakres badanych zjawisk[22]. W metodologii wyróżnia się także zmienne pośredniczące, nazywane również zmiennymi interweniującymi; zmienne kontrolne, których zadaniem jest wyjaśnienie związków przyczynowo-skutkowych między badaną zmienną zależną i niezależną; używa się ich głównie wtedy, gdy zmienne zależne, niezależne oraz interweniujące nie są w stanie wytłumaczyć zachodzących pomiędzy nimi zależności – istnieją wątpliwości co do ich słuszności[23]. W pracy wyróżniłam następujące zmienne:

Zmienna niezależna główna:

Fotoedukacja matematyczna – rozumiana jako zespół wszystkich działań uczniów i nauczycieli ukierunkowanych na: czytanie fotografii, ich interpretowanie oraz komentowanie przynoszące nowe pytania, hipotezy, zadania, problemy, lub na aktywność, której źródłem jest postawienie problemu bazującego na wiedzy dotychczasowej oraz dążenie do fotograficznej wizualizacji wzbogaconej o porządkowanie, klasyfikowanie i nazywanie[24].

Zmienna zależna główna:

Kultura matematyczna

Dla przypomnienia: kultura matematyczna uczniów to zbiór postaw, wartości i umiejętności, które kształtują podejście jednostki do matematyki oraz do rozwiązywania problemów matematycznych. Obejmuje ona sprawność matematyczną, język matematyczny, wyobraźnię przestrzenną, twórczość matematyczną oraz elegancję matematyczną.

Zmienne zależne szczegółowe:

- ✓ sprawności matematyczne
- ✓ język matematyczny
- ✓ wyobraźnia matematyczna

[21] Ibidem, s. 51.
[22] Bereźnicki F., *Prace magisterskie z pedagogiki*, Szczecin 2000, s. 40.
[23] Łobocki M., *Metody badań pedagogicznych…,* op. cit., s. 34-35.
[24] Makiewicz M., O fotografii iw edukacji matematycznej. Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów, Szczecin 2013, s.71.

- ✓ elegancja matematyczna
- ✓ twórczość matematyczna

Ze zmiennymi ściśle powiązane są wskaźniki. Są nimi między innymi symptomy, cechy, a także charakterystyczne przejawy dla badanego zjawiska[25]. Wskaźniki powinny być określane po to, by odczytać i zrozumieć interesujące badacza zjawiska i fakty[26]. Czyli wskaźniki to mierzalna cecha, lub zjawisko, na podstawie wystąpienia, którego można z pewnością, bądź określonym prawdopodobieństwem stwierdzić, że zjawisko, którym badacz się zajmuje zachodzi[27]. Mieczysław Łobocki wyróżnia wskaźniki empiryczne wskazujące na zmienną, którą można w łatwy i bezpośredni sposób zaobserwować; wskaźniki definicyjne, które wynikają z definicji badanej zmiennej oraz wskaźniki inferencyjne, odnoszące się do zjawisk, których nie można bezpośrednio zaobserwować oraz nie wchodzą do definicji badanych zdarzeń i faktów[28]. Wskaźnikami w mojej pracy będzie ilość punktów uzyskana przez uczniów w trakcie rozwiązywanego testu oraz informacje poczynione przez nauczycieli w trakcie obserwacji uczniów, co szczegółowo prezentuje tabela nr 9.

Tabela 9. Zmienne i wskaźniki badań własnych

<table>
<tr><td rowspan="2">Zmienna niezależna główna
FOTOEDUKACJA MATEMATYCZNA</td><td>wskaźnik</td></tr>
<tr><td>Scenariusze lekcji, prace fotograficzne uczniów wykorzystane na zajęciach w ramach edukacji matematycznej</td></tr>
<tr><td>Zmienna zależna główna
KULTURA MATEMATYCZNA</td><td></td></tr>
<tr><td>Zmienne zależne szczegółowe</td><td>wskaźnik</td></tr>
<tr><td>sprawności matematyczne</td><td>Liczba punktów uzyskana przez uczniów w badaniu testowym</td></tr>
<tr><td>język matematyczny</td><td rowspan="4">Ocena nauczyciela wyrażona na podstawie arkusza obserwacji według następującej skali stopnia opanowania: „bardzo dobry”, „wystarczający”, „niewystarczający”</td></tr>
<tr><td>wyobraźnia matematyczna</td></tr>
<tr><td>elegancja matematyczna</td></tr>
<tr><td>twórczość matematyczna</td></tr>
</table>

[25] Pilch T., Zasady badań pedagogicznych.=, Wrocław 1977, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, s. 51.
[26] Cieślarczyk M., Chojnacki Z., Techniki i narzędzia badawcze stosowane w pracach magisterskich i doktorskich, Wydawca**:** Akademia Obrony Narodowej 2006, s. 30.
[27] Zob. Nowak S., Metodologia badań socjologicznych, Warszawa 1970; T. Pilch, T. Bauman, Zasady badań pedagogicznych. Strategie ilościowe i jakościowe, Wydawnictwo Żak, Warszawa 2001, s. 53.
[28] Łobocki M., Metody i techniki badań pedagogicznych, Wydawnictwo Impuls, Kraków 2011, s. 36.

4.4. Metody, techniki i narzędzia badań własnych

W efektywnym zaplanowaniu swoich działań badawczych istotny jest wybór odpowiednich metod i technik[29]. Metoda badawcza to zespół teoretycznie uzasadnionych zabiegów koncepcyjnych i instrumentalnych, obejmujących postępowanie badacza, które zmierza do rozwiązania określonego problemu[30]. Metoda badawcza odnosi się do ogólnych dyrektyw oraz norm postępowania dydaktycznego, czyli obowiązujących bez względu na cel, jakiemu ma ona służyć, i warunki, w jakich zostaje ona zastosowana[31]. Metoda badań to „sposób systematycznie stosowany, to znaczy stosowany w danym przypadku z intencją zastosowania go także przy ewentualnym powtórzeniu się analogicznego zadania"[32]. W naukach pedagogicznych metoda badawcza: „(…) jest opisem toku wykonywania w sposób spójny czynności badawczych, prowadzących do pozyskania danego rodzaju danych"[33]. Przeprowadzone badania realizowane były metodą eksperymentu pedagogicznego, rozumianego jako badanie relacji między celowo dobranymi oddziaływaniami, a ściśle określonymi skutkami, jakie powstają w wyniku wspomnianych oddziaływań[34]. Eksperyment realizowany był techniką grup równoległych, która zakłada konieczność uwzględnienia dwóch grup badanych: grupy eksperymentalnej oraz grupy kontrolnej, celowo wprowadzonego czynnika eksperymentalnego wyłącznie w grupie eksperymentalnej oraz dwukrotnego pomiaru (początkowego i końcowego), mającego na celu kontrolę dokonujących się zmian[35]. W prowadzonych badaniach wyodrębniono trzy grupy eksperymentalne, a mianowicie: grupę uczniów klasy I, klasy II, oraz klasy III szkoły podstawowej. Równolegle wyodrębniono trzy grupy kontrolne. Grupy do eksperymentu dobrano na podstawie autorskich testów sprawności matematycznej oraz danych z arkusza obserwacji. Grupy, które uzyskały niższe wyniki uczyniono eksperymentalnymi i wprowadzono do nich zmienną niezależną główną, czyli fotoedukację matematyczną. Natomiast grupy, które uzyskały lepsze wyniki, uczyniono kontrolnymi i realizowano tradycyjną metodą nauczania matematyki w klasach I-III.

Całość eksperymentu przeprowadzono w Zespole Szkół Publicznych w Szewnie. Wszystkie klasy biorące udział w eksperymencie – uczniowie grupy eksperymentalnej i kontrolnej

[29] Łobocki M., *Metody i techniki badań pedagogicznych*, Kraków 2000, s. 28.
[30] Kamiński A., Metoda, technika, procedura badawcza w pedagogice empirycznej [w:] Metodologia pedagogiki społecznej, red. R. Wroczyński, T. Pilch, Wrocław 1974, s. 46.
[31] Łobocki M., Wprowadzenie do metodologii badań pedagogicznych, Kraków 2009, s. 225.
[32] Kotarbiński T., *Próba zastosowania pewnych pojęć prakseologii do metodologii pracy umysłowej*, Warszawa 1957, s. 667.
[33] Muszyński H., *Metodologiczne vademecum badacza pedagoga…, op. cit.*, s. 137.
[34] Łobocki M., *Wprowadzenie do metodologii*…op. cit., s. 237
[35] Ibidem, s. 239.

realizowały program autorstwa Jadwigi Hanisz „Program edukacji wczesnoszkolnej w klasach 1-3 szkoły podstawowej”[36].

Kolejnym etapem było określenie technik, które są podporządkowane przyjętej metodzie eksperymentu pedagogicznego. Metody i techniki są ze sobą w ścisłym związku i wzajemnie się uzupełniają. Różnica między nimi polega na tym, że metoda dotyczy całości działań mających na celu rozwiązanie postawionego problemu, a technika w sposób szczegółowy określa formy postępowania i możliwość wysnuwania wniosków w danych badaniach. Techniki badawcze to czynności praktyczne, regulowane starannie wypracowanymi dyrektywami, które umożliwiają otrzymanie sprawdzalnych informacji, faktów i opinii[37]. Do realizacji swoich badań wykorzystałam następujące techniki badawcze: *analizę literatury, technikę intuicyjną, testy matematyczne oraz obserwację.* Za pomocą szczegółowej analizy literatury przedmiotu został zebrany materiał, który uzasadnił potrzebę podjęcia badań. Natomiast technika intuicyjna posłużyła do przeprowadzenia na zasadzie rozważań i dedukcji szczegółowej analizy pojęć podstawowych, zastosowanych w niniejszej pracy. Testy matematyczne zostały opracowane przeze mnie dla uczniów klasy pierwszej drugiej i trzeciej. Przy ich użyciu zmierzałam do zdiagnozowania jednego z elementów kultury matematycznej, a mianowicie sprawności matematycznych. Test badający sprawność matematyczną ucznia z klasy I zawiera 6 zadań, test sprawności matematycznej ucznia z klasy II również 6 zadań i test sprawności matematycznej ucznia z klasy III 7 zadań. W teście sprawności matematycznej ucznia z klasy I znalazły się pytania stwierdzające czy badani uczniowie, w grupie eksperymentalnej i kontrolnej, w sposób właściwy opanowali sprawność liczenia, zapisywania liczby za pomocą symboli matematycznych, porównywania przedmiotów względem jednej cechy – wielkości, określania położenia przedmiotów przedstawionych na płaszczyźnie, wykonywania działań dodawania i odejmowania. Test sprawności matematycznej ucznia z klasy II obejmował pytania, które określały sprawność badanych uczniów w obszarze umiejętności czytania tekstu matematycznego, określania zależności miedzy wielkościami w podanym zadaniu, pamięciowego mnożenia i dzielenia liczb, zastosowania własności mnożenia i działania odwrotnego, jakim jest dzielenie, obliczenia iloczynu mając podane dwa czynniki, poprawnego określenia miejsca przedmiotów (orientacja przestrzenna), prawidłowego ułożenia działań i obliczenia oraz określenia zależności wynikające z symetrii. Natomiast test sprawności matematycznej ucznia z klasy III obejmował pytania dotyczące rozwiązywania zadań tekstowych przy użyciu różnych strategii, a także umiejętności

[36] Hanisz J., Program edukacji wczesnoszkolnej w klasach 1-3 szkoły podstawowej, Warszawa 2017.
[37] Kamiński A., Metoda, technik, procedura badawcza w pedagogice empirycznej, [w:] Metodologia pedagogiki społecznej, red. R. Wroczyński, T. Pilch, Wrocław 1974, s. 42.

wykonywania obliczeń kalendarzowych z wykorzystaniem informacji zawartych w treściach zadań. Testy te wykorzystano dwukrotnie, na początku eksperymentu oraz w pomiarze końcowym, a uzyskane dane posłużyły do analizy i oceny efektów prowadzonego eksperymentu pedagogicznego w obszarze sprawności matematycznych uczniów klas I-III szkoły podstawowej. Wzory wykorzystanych testów znajdują się w aneksie niniejszego opracowania.

Drugą techniką wykorzystaną w moich badaniach była obserwacja realizowana w formie obserwacji uczestniczącej. Każdy nauczyciel biorący udział w badaniach, przy użyciu arkusza obserwacji, opracowanego dla każdej grupy badanych uczniów, dokonał dwukrotnej oceny indywidualnej każdego ucznia. Arkusz obserwacyjny zawierał cztery obszary tematyczne, a mianowicie język matematyczny, wyobraźnia matematyczna, elegancja matematyczna oraz twórczość matematyczna, które były oceniane na trójstopniowej skali oceny stopnia opanowania: *„bardzo dobry", „wystarczający", „niewystarczający*". Wzory wykorzystanych arkuszy obserwacji znajdują się w aneksie pracy. Uzyskane tą drogę informacje pozwoliły na rozwiązanie diagnostycznych problemów sformułowanych, przeze mnie w podrozdziale 4.2.

4.5. Organizacja badań, charakterystyka próby badawczej

Podstawą dobrze zrealizowanego procesu badawczego jest jego szczegółowe i precyzyjne zaplanowanie, polegające na ustaleniu założeń metodologicznych, przygotowaniu i przeprowadzeniu badań, a następnie analizowaniu i syntezowaniu danych, które prowadzą do wyciągnięcia wniosków i uogólnień[38]. Ponadto bardzo ważny jest dobór próby badawczej; istotne jest, by doboru próby dokonać w sposób przemyślany[39]. Wielkość grupy badawczej powinna wynikać z postawionych celów i problemów badawczych. Mieczysław Łobocki wyróżnia trzy rodzaje grup badanych pod względem ich wielkości. Grupa mała, licząca do trzydziestu osób; grupa przejściowa, licząca od trzydziestu do stu osób oraz grupa duża, w której badamy ponad sto osób[40].

Badania zasadnicze poprzedzone zostały badaniami pilotażowymi, które trwały od 15 marca do 25 maja 2024. W badaniu wzięli udział wszyscy chętni uczniowie klas I-III w liczbie 130 osób. Zgodnie z istotą badań pilotażowych ich zasadniczym celem była weryfikacja przygotowanych narzędzi badań w postaci testu oceny sprawności matematycznych oraz arkusza

[38]Zob. Creswell J.W., Projektowanie badań naukowych. Metody jakościowe, ilościowe i mieszane, tłumaczenie J. Gilewicz, Kraków 2013; Pilch Z., Zasady badań pedagogicznych, Warszawa 1998.
[39] Babbie E.R., Badania społeczne w praktyce, Warszawa 2004, s. 131.
[40] Łobocki M., Metody badań pedagogicznych…, op. cit., s. 174–175.

obserwacji. Badania te prowadzono w każdej grupie wiekowej osobno. Po analizie zebranych danych dokonano korekt w poszczególnych narzędziach, np. z testu do oceny sprawności matematycznych dla uczniów klasy pierwszej, który w pierwotnej wersji miał 9 zadań, w wersji ostatecznej uwzględniono jedynie 6, usuwając zadania, które były zbyt łatwe dla uczniów lub były zbyt trudne. Korekty dokonano po analizie skuteczności rozwiązywania poszczególnych zadań. Zbyt łatwe zadania odrzucano w przypadku, gdy poprawnych odpowiedzi udzieliło od 80 do 100% uczniów objętych badaniami pilotażowymi. W przypadku zadań zbyt trudnych kryterium odrzucenia określono na poziomie 0 – 20% poprawnych odpowiedzi. Procedurę tę zastosowano w stosunku do testów dla poszczególnych klas. W klasie II z testu również odrzucono trzy pytania, a w klasie III dwa pytania, pozostawiając siedem. Kryteria odrzucenia danego zadania zostały określone przeze mnie na użytek prowadzonych badań. W przypadku arkusza obserwacji zastosowanego w pilotażu dokonano jedynie korekt językowych, określających obszary podlegające ocenie. Po przeprowadzeniu badań pilotażowych przystąpiłam do organizacji i realizacji badań zasadniczych. Zostały one przeprowadzone wśród uczniów klasy I, II i III szkoły podstawowej, przy czym w grupie eksperymentalnej w klasie I badaniami objęto 41 uczniów, w klasie II – 47 uczniów natomiast w klasie III – 41 uczniów. W grupie kontrolnej badaniami objęto 36 uczniów klasy I, 54 – w klasie II oraz 42 w klasie III. Uczniowie objęci badaniami zasadniczymi nie uczestniczyli w badaniach pilotażowych. Badania przeprowadzono w Zespole Szkół Publicznych w Szewnie. Strukturę tego zespołu tworzy Publiczne Przedszkole, które swą działalnością obejmuje ogółem 92 przedszkolaków oraz Publiczna Szkoła Podstawowa, do której uczęszcza 368 uczniów i zlokalizowana jest w województwie świętokrzyskim. Szkoła realizuje misję, która brzmi „*Pozwalamy każdemu rozwijać się jego własnym rytmem*”. Jest to szkoła, która jako jedna z nielicznych w Polsce realizuje proces kształcenia odwołując się do zasad nauczania według pedagogiki Planu Daltona. Uczy ona dzieci samodzielności, pracy w grupie i odpowiedzialności – cech, które będą potrzebne uczniom w dorosłej rzeczywistości. W związku z powyższym placówka nominowana jest do uzyskania certyfikatu Szkoły Daltońskiej. W Polsce są tylko dwie szkoły daltońskie, szkoła w Szewnie będzie trzecią w kraju. W szkole pracuje 49 nauczycieli, w tym pedagog, psycholog, logopeda, surdopedagog, tyflopedagog, oligofrenopedagog, nauczyciele terapeuci, nauczyciele wspomagający oraz posiadający kwalifikacje do prowadzenia zajęć z terapii autyzmu i Treningu Umiejętności Społecznych. Szkoła współpracuje ze Światową Organizacją Wychowania

Przedszkolnego[41]. W szkole od 1 września 2019 roku funkcjonuje klasa dwujęzyczna z językiem angielskim. Przedmiotami prowadzonymi w języku angielskim jest matematyka, biologia i muzyka. Szkoła posiada swoje strony internetowe[42].

Przed przystąpieniem do badań właściwych, przeprowadziłam wśród nauczycieli edukacji przedszkolnej i wczesnoszkolnej oraz nauczycieli matematyki cyklu szkoleń poświęconych koncepcji fotoedukacji matematycznej, przy czym pierwsze z nich poświęcone zostało charakterystyce podstawowych założeń tej koncepcji, drugie dotyczyło kształtowania kompetencji nauczycieli w obszarze nadawania fotografiom matematycznego tytułu i opisywania językiem matematycznym fotografii, natomiast trzecie poświęcone zostało opracowaniu scenariuszy zajęć z edukacji matematycznej z wykorzystaniem fotografii. Stanowiły one podstawę do opracowania scenariuszy zajęć zrealizowanych w toku eksperymentu. Przykładowe scenariusze zajęć zostały umieszczone w aneksie.

Po uzyskaniu zgody na przeprowadzenie eksperymentu (władze oświatowe, nauczyciele, rodzice), przystąpiłam do realizacji badań zasadniczych, które zostały przeprowadzone w dniach od 15 września 2024 roku do 15 maja 2025 roku. W pierwszej fazie dokonałam oceny sprawności matematycznej przy użyciu skonstruowanego do celów moich badań testów, których wzory znajdują się w aneksie pracy. Ponadto nauczyciele pracujący w klasach objętych badaniami dokonali, na podstawie obserwacji, przy użyciu arkusza obserwacji, opracowanego dla każdej grupy badanych uczniów, indywidualnej oceny poszczególnych komponentów kultury matematycznej. Badaniami objęto uczniów dwóch klas pierwszych, dwóch drugich oraz dwóch trzecich. Po przeprowadzeniu badań wstępnych i dokonaniu stosownej analizy ilościowej i jakościowej utworzono grupy eksperymentalne i kontrolne, a podstawą dokonanego podziału były wyniki uzyskane w toku badania wstępnego, przy czym grupę eksperymentalną tworzyli uczniowie z dwóch klas, które w ogólnym wyniku uzyskały wynik słabszy w stosunku do pozostałych dwóch klas. W ten sposób powstała grupa eksperymentalna klasy I, II i III,

[41] Światowa Organizacja Wychowania Przedszkolnego OMEP (Organisation Mondiale pour l'Education Prescolaire) powstała 1948 roku w Pradze. To międzynarodową organizacja pozarządowa. Ma status organizacji doradczej przy UNESCO. Dąży do zapewnienia najmłodszym dzieciom całego świata możliwie jak najlepszych warunków życia i rozwoju, niezależnie od zróżnicowania materialnego, kulturowego i klasowego. Skupia ludzi różnych zawodów działających na rzecz dzieci od narodzin do ósmego roku życia. OMEP popiera i inicjuje badania naukowe oraz różne formy wymiany doświadczeń zmierzające do zapewnienia dziecku prawa do rozwoju. Interweniuje, gdy naruszane są prawa dziecka. Zob. OMEP Polska, Prawa od samego początku, [w:] https://omep.org.pl/co-to-jest-omep/ (dostęp: 14.09.2025).

[42] Zespół Szkół Publicznych w Szewni: http://www.szewnasp.hekko.pl/; https://www.facebook.com/p/Zesp%C3%B3%C5%82-Szk%C3%B3%C5%82-Publicznych-w-Szewnie-100076359456002/?locale=pl_PL

pozostałe klasy z wynikami badań wstępnych wyższymi uczyniono grupami kontrolnymi, o czym już pisałam w podrozdziale *4.4. Metody, techniki i narzędzia badań własnych*.

Przed przystąpieniem do realizacji cyklu zajęć objętych eksperymentem odbyłam spotkanie z rodzicami uczniów, uczestników eksperymentu w celu przedstawienia im założeń oraz zwróciłam się do nich z prośbą, by zapewnili oni warunki umożliwiające wykonanie albumu zdjęć, których przewodnim tematem była matematyka. W toku realizacji eksperymentu nauczyciele przeprowadzili 10 dwugodzinnych zajęć dydaktycznych w oparciu o przygotowane scenariusze zajęć z wykorzystaniem materiałów fotograficznych. Natomiast 5 zajęć, również dwugodzinnych, nauczyciele realizowali z wykorzystaniem materiałów fotograficznych, wykonanych przez uczniów. Materiały fotograficzne stały się podstawą prowadzonych zajęć. W sumie w grupie eksperymentalnej przeprowadzono ogółem po 15 zajęć dydaktycznych, dwugodzinnych, realizowanych na poziomie klasy pierwszej, drugiej i trzeciej. Wszystkie zajęcia, zarówno w grupie eksperymentalnej, jak i kontrolnej, realizowano zgodnie z programem kształcenia Jadwigi Hanisz. Przed wprowadzeniem zajęć z fotoedukacji, zarówno w grupie kontrolnej, jak i w eksperymentalnej dokonano pomiaru wstępnego za pomocą testu badającego sprawności matematyczne, o czym już pisałam w poprzednim podrozdziale. Po zakończeniu zajęć w ramach eksperymentu dokonano pomiaru końcowego w grupie eksperymentalnej i kontrolnej, a uzyskane wyniki zostaną przedstawione w kolejnej części mojej dysertacji.

Wartością dodaną przeprowadzonego eksperymentu pedagogicznego, poświęconego analizie relacji pomiędzy fotoedukacją matematyczną i kształtowaniem kultury matematycznej były dwa wydarzenia. Pierwsze z nich to organizacja wernisażu fotografii wykonanych przez uczniów grupy eksperymentalnej, na który składały się wybrane przez samych uczniów fotografie na temat „Moja matematyka w fotografii". Na wernisaż zaproszono rodziców, nauczycieli i uczniów wszystkich klas Publicznej Szkoły Podstawowej w Szewnie. Wernisaż pokazał ciekawą i atrakcyjną formę matematyki z ekspresją artystyczną uczniów. Dzieci poprzez własne fotografie zademonstrowały obecność matematyki w ich codziennym otoczeniu, dostrzegając ją między innymi w kształtach, rytmach, wzorach czy symetrii. Dzieci wykazały się spostrzegawczością i umiejętnością interpretacji pojęć matematycznych w sposób kreatywny i intuicyjny. Przedsięwzięcie to miało wymiar również motywacyjny dla innych uczniów, budując pozytywny stosunek do nauki matematyki. Drugie wydarzenie to udział uczniów klas I-III i wybranych przez nich fotografii w XV Międzynarodowym Konkursie „Matematyka w obiektywie"[43]. Bezpośrednim impulsem do utrwalania matematycznej rzeczywistości na fotografiach

[43] „Konkurs fotograficzny MATEMATYKA W OBIEKTYWIE jest częścią międzynarodowego projektu naukowo-dydaktycznego MATHEMATICS IN FOCUS. Pierwsza edycja odbyła się w roku 2010. Organizatorem

była wizyta uczniów klas I-III (3 października 2024 roku) na wystawie „Matematyka w obiektywie, która została zorganizowana w Akademii Pedagogiki Specjalnej im. Marii Grzegorzewskiej w Warszawie. Dzieci zwiedzały ją w asyście najlepszego przewodnika – pomysłodawcy i kierownika projektu, dr hab. Małgorzaty Makiewicz, prof. Uniwersytetu Szczecińskiego i Akademii Pedagogiki Specjalnej im. Marii Grzegorzewskiej.

Dane uzyskane po zakończeniu eksperymentu oraz za pomocą narzędzi badawczych poddałam szczegółowej analizie. Ich ilościowy i jakościowy opis będzie przedmiotem dyskusji i refleksji naukowych w kolejnym rozdziale piątym.

przedsięwzięcia jest Uniwersytet Szczeciński i Akademia Pedagogiki Specjalnej im. Marii Grzegorzewskiej w Warszawie. Pomysłodawcą i kierownikiem projektu jest dr hab. Małgorzata Makiewicz, prof. APS, prof. US. Projekt obejmuje: konkurs fotograficzny, badania naukowe w obszarach dydaktyki matematyki i komparatystyki mediów, publikacje, konferencje, wystawy, wykłady otwarte oraz warsztaty dla uczniów i nauczycieli" szerzej na ten temat [w:] https://mwo.usz.edu.pl/

Rozdział V. Kultura matematyczna uczniów klas 1-3 szkoły podstawowej – analiza wyników badań własnych

W niniejszym podrozdziale zaprezentuję szczegółową analizę otrzymanych wyników badań własnych, które dotyczyły kultury matematycznej i jej komponentów, czyli sprawności matematycznych, języka matematycznego, wyobraźni matematycznej, elegancji matematycznej oraz twórczości matematycznej. Otrzymane wyniki pozwolą odpowiedzieć na sformułowany w rozdziale metodologicznym problem główny i problemy szczegółowe. Dla przypomnienia, problem główny brzmiał: *W jakim stopniu wprowadzenie do procesu realizacji zajęć z obszaru edukacji matematycznej fotoedukacji determinuje rozwój wybranych elementów kultury matematycznej uczniów klas I-III szkoły podstawowej?* Natomiast problemy szczegółowe sformułowano następująco: *W jakim stopniu zajęcia z wykorzystaniem fotoedukacji determinują poziom sprawności matematycznej uczniów klas I-III szkoły podstawowej? W jakim stopniu zajęcia z wykorzystaniem fotoedukacji matematycznej kształtują język matematyczny uczniów klas I-III szkoły podstawowej? W jakim stopniu zajęcia z wykorzystaniem fotoedukacji matematycznej kształtują wyobraźnię matematyczną uczniów klas I-III szkoły podstawowej? W jakim stopniu zajęcia z wykorzystaniem fotoedukacji matematycznej determinują rozwój elegancji matematycznej uczniów klas I-III szkoły podstawowej? W jakim stopniu zajęcia z wykorzystaniem fotoeduakcji matematycznej determinują rozwój twórczości matematycznej uczniów klas I-III szkoły podstawowej?* Sprawności matematyczne zostały zbadane za pomocą autorskiego testu skonstruowanego oddzielnie dla klasy pierwszej, drugiej i trzeciej. Natomiast umiejętności uczniów w zakresie kolejnych komponentów kultury matematycznej, czyli języka matematycznego, wyobraźni matematycznej, elegancji matematycznej oraz twórczości matematycznej dokonano na podstawie obserwacji przeprowadzonych przez nauczycieli. Dla celów porównawczych przeprowadzono obserwację wstępną i końcową. Obserwację wstępną dokonano w październiku 2024 roku, natomiast końcową w maju 2025 roku. Obserwacje prowadzono zarówno w grupie eksperymentalnej i kontrolnej uczniów klas pierwszych, drugich i trzecich. W grupie eksperymentalnej wykorzystano fotoedukację. W grupie kontrolnej program kształcenia z zakresu edukacji matematycznej realizowano zgodnie z programem autorstwa Jadwigi Hanisz, bez wykorzystania fotoedukacji matematycznej. Badając umiejętności wykorzystano arkusz obserwacji, który skonstruowałam na użytek moich badań o czym szczegółowo pisałam w rozdziale czwartym.

5.1. Sprawności matematyczne badanych uczniów klas I-III

Zgodnie z przyjętymi założeniami metodologicznymi badań własnych, w roku szkolnym 2024/25 w klasach I-III przeprowadzono cykl zajęć z wykorzystaniem fotoedukacji matematycznej, który objął ogółem 15 dwugodzinnych jednostek metodycznych. Przy czym 10 spośród nich realizowano na podstawie scenariuszy zajęć z wykorzystaniem materiałów fotograficznych, przygotowanych przez nauczycieli oraz 5 jednostek, również przygotowanych przez nauczycieli, których osnową zajęć uczyniono fotografie wykonane przez uczniów. Podstawą prowadzonych zajęć był program autorstwa Jadwigi Hanisz[1]. Przed wprowadzeniem zajęć z fotoedukacji, zarówno w grupie kontrolnej, jak i w eksperymentalnej dokonano pomiaru wstępnego za pomocą testu badającego sprawności matematyczne, o czym już pisałam w poprzednim rozdziale. Po zakończeniu zajęć w ramach eksperymentu dokonano pomiaru końcowego w grupie eksperymentalnej i kontrolnej. Pomiaru wstępnego dokonano we wrześniu 2024 roku, natomiast końcowego w maju 2025 roku. Uzyskane wyniki zaprezentuję oddzielnie dla klasy pierwszej, oddzielnie dla klasy drugiej i oddzielnie dla klasy trzeciej.

5.1.1. Sprawności matematyczne uczniów klasy I szkoły podstawowej

W klasie pierwszej sprawności matematyczne zostały sprawdzone za pomocą testu, składającego się z 6 zadań, które dotyczyły sprawności liczenia, zapisywania liczby za pomocą symboli matematycznych, porównywania przedmiotów względem jednej cechy – wielkości, określania położenia przedmiotów przedstawionych na płaszczyźnie oraz wykonywania działań dodawania i odejmowania. W wyniku przeprowadzenia badań wstępnych oraz końcowych, dotyczących sprawności matematycznych w grupie eksperymentalnej i kontrolnej uzyskałam dane, które przedstawiam w poniższej tabeli nr 10.

[1] Hanisz J., Program edukacji wczesnoszkolnej. Klasy 1-3. Warszawa 2017.

Tabela 10. Zestawienie danych z badań testowych uczniów pierwszej klasy z uwzględnieniem grupy eksperymentalnej i kontrolnej

Etap badania	Grupa eksperymentalna			Grupa kontrolna		
	N	$\bar{x}$	S	N	$\bar{x}$	S
Pomiar wstępny	41	7,82	1,49	36	8,47	1,13
Pomiar końcowy	41	8,83	1,06	36	8,56	1,03

N – liczba badanych
$\bar{x}$ - średnia liczba punktów uzyskanych w badaniu testowym
S – odchylenie standardowe

Z powyższych danych jednoznacznie wynika, że w grupie eksperymentalnej oraz kontrolnej mamy do czynienia ze wzrostem poziomu sprawności matematycznych badanych uczniów. W grupie eksperymentalnej wzrost ten wyniósł 1,01 pkt. w stosunku do wyniku uzyskanego w badaniach wstępnych. W grupie kontrolnej wzrost ten wyniósł 0,09 pkt. Zasadnym jest pytanie, czy stwierdzony wzrost sprawności matematycznych uczniów klas I jest istotny z punktu widzenia prowadzonych analiz. Oceny dokonałam, wykorzystując narzędzie statystyczne w postaci testu *t-Studenta* dla dwóch średnich w wersji dla dwóch prób zależnych[2]. Test ten jest klasyczną metodą statystyczną, służącą do porównywania dwóch średnich powiązanych prób. Służy do sprawdzenia, czy różnica między dwiema średnimi arytmetycznymi jest istotna statystycznie, a stosowany jest w sytuacji, gdy porównujemy te same osoby w dwóch pomiarach – wstępnym i końcowym. Uczniowie grupy eksperymentalnej w badaniu wstępnym testem sprawności matematycznych uzyskali średni wynik na poziomie 7,82 pkt., natomiast w pomiarze końcowym wartość średniej zwiększyła się o 1,01 pkt. do poziomu 8,83 pkt. W wyniku przeprowadzonych obliczeń statystycznych okazało się, że wartość testu *t-Studenta* dla prób zależnych wynosi: $t = 4,87$ $(df = 40, t_{\alpha} = 2,02, \alpha = 0,05)$. Oznacza to istotny statystycznie wzrost średnich wyników uzyskanych w grupie eksperymentalnej, co może oznaczać, że wprowadzenie do procesu kształcenia fotoedukacji matematycznej ma istotne znaczenie edukacyjne.

Test t-Studenta dla prób zależnych służy do oceny istotności statystycznej różnic między dwiema średnimi, natomiast nie określa on siły związku (tzw. *effect size*) między badanymi zmiennymi. Służy temu wskaźnik siły efektu dla różnicy między dwiema średnimi[3]. Obliczona

[2] Lewicki Cz., Zbiór zadań ze statystyki dla pedagogów. Rzeszów 1989, s. 105-111.
[3] Patrz np.: Cohen, J., Statistical power analysis for the behavioral sciences (2nd ed.). Lawrence Erlbaum Associates, New York 1988, s. 8-21; Prajzner A,, *Wybrane wskaźniki wielkości efektu w badaniach psychologicznych.* Annales Univesitatis Mariae Curie-Skkłodowska. Sectio Paedagogia-Psychologia, 2022 35(4), s. 139-157.

wartość Cohen's d wyniosła 1,08 i wskazuje na bardzo duży efekt[4]. Innymi słowy, różnica między średnimi uzyskanymi w badaniu wstępnym i końcowym w grupie eksperymentalnej, jest istotna statystycznie, a wielkość efektu wprowadzenia fotoedukacji do zajęć dydaktycznych w ramach edukacji matematycznej jest bardzo duża. Uczniowie klasy pierwszej, uczestnicy eksperymentu, w sposób zdecydowany poprawili swoje sprawności matematyczne.

W grupie kontrolnej przeprowadzona analiza statystyczna wskazuje, że różnica między średnim wynikiem uzyskanym w badaniu wstępnym i końcowym jest nieistotna statystycznie. Wartość testu *t-Studenta* wynosi: t = 0,50 (df =40, t_α = 2,02, α = 0,05). Średni wynik badania końcowego w grupie kontrolnej jest nieco wyższą w stosunku do badania wstępnego, ale różnica ta nie jest wystarczająco duża, by uznać ją za statystycznie istotną. Obliczona wartość Cohen's d wyniosła 0,11 i wskazuje na bardzo mały efekt[5], co oznacza, że różnica między średnimi ma niewielkie znaczenie praktyczne i edukacyjne.

Jak już wcześniej zaznaczyłam, w badaniu sprawności matematycznych uczniów klasy pierwszej użyłam testu skonstruowanego na użytek moich badań. Składał się on z sześciu zadań, które posłużyły do diagnozy sprawności matematycznych. Zadanie 1, 2 i 5 były podstawą oceny sprawności rachunkowej, w tym umiejętność liczenia elementów i zapisu przy pomocy symboli matematycznych, analizy prostego tekstu matematycznego – zadania tekstowego, ułożenie do niego działania matematycznego i jego rozwiązanie, umiejętność liczenia w zakresie 10 oraz znajomość właściwości matematycznej – odejmowanie jest odwrotnością dodawania. Zadania 3 i 4 służyły ocenie umiejętności porównywania przedmiotów z uwzględnieniem ich wielkości, oceny orientacji przestrzennej (nad, pod), określanie położenia przedmiotów na płaszczyźnie. Natomiast zadanie 6 posłużyło do oceny umiejętności dostrzegania przez badanych regularności rytmicznej. Efektem przeprowadzonych badań testowych w grupie eksperymentalnej i kontrolnej są dane empiryczne, które przedstawiam w tabeli nr 11 i 12.

Tabela 11. Szczegółowe dane uzyskane w badaniu testowym oraz analizie statystycznej uczniów klasy pierwszej w grupie eksperymentalnej

	Pomiar wstępny		Pomiar końcowy		Wskaźniki	
	$\bar{x}$	S	$\bar{x}$	S	t-Studenta	d_Cohena
Zad. 1.	0,83	0,38	1,00,	0,00	2,86	0,63
Zad. 2.	1,95	0,36	2,20	0,65	3,61	0,80
Zad. 3	0,85	0,36	0,95	0,22	2,04	0,45

[4] Ibidem.
[5] Ibidem

	Pomiar wstępny		Pomiar końcowy		Wskaźniki	
	$\bar{x}$	S	$\bar{x}$	S	t-Studenta	d_Cohena
Zad. 4.	0,93	0,27	1,00	0,00	2,13	0,47
Zad. 5.	2,43	0,70	2,63	0,72	2,56	0,56
Zad. 6	0,95	0,22	1,00	0,00	1,66	0,37

$\bar{x}$ - średnia liczba punktów uzyskanych w badaniu testowym
S – odchylenie standardowe

Tabela 12. Szczegółowe dane uzyskane w badaniu testowym oraz analizie statystycznej uczniów klasy pierwszej w grupie kontrolnej

	Pomiar wstępny		Pomiar końcowy		Wskaźniki	
	$\bar{x}$	S	$\bar{x}$	S	t-Studenta	d_Cohena
Zad. 1.	0,97	0,17	1,00	0,00	1,06	0,25
Zad. 2.	2,14	0,54	2,17	0,67	0,29	0,07
Zad. 3	1,00	0,00	0,94	0,23	- 1,56	- 0,37
Zad. 4.	0,97	0,17	1,00	0,00	1,06	0,25
Zad. 5.	2,44	0,77	2,44	0,76	0,00	0,00
Zad. 6	0,94	0,23	1,00	0,00	1,56	0,37

$\bar{x}$ - średnia liczba punktów uzyskanych w badaniu testowym
S – odchylenie standardowe

Przeprowadzona szczegółowa analiza danych ilościowych (tab.11) jednoznacznie wskazuje, że w grupie eksperymentalnej, w której realizowano cykl zajęć z wykorzystaniem fotoedukacji matematycznej, obserwujemy wzrost sprawności matematycznych badanych uczniów. W przypadku zadań 1, 2, 3, 4 i 5 różnica między pomiarem wstępnym a końcowym jest statystycznie istotna. Przy czym w przypadku zadania 2 (analiza zadania tekstowego, ułożenie działania matematycznego i jego rozwiązanie) siła efektu, mierzona wskaźnikiem d_Cohena jest duża, co oznacza, że wykorzystanie fotoedukacji w procesie kształcenia w sposób znaczący poprawiło wyniki badanych uczniów. W pozostałych zadaniach siła efektu wykorzystania fotoedukacji w zajęciach dydaktycznych oceniona jest na poziomie średnim. Poprawa wyników badanych jest wyraźna. Jedynie w przypadku zadania 6 badani uczniowie poprawili swoje wyniki, ale różnica pomiędzy badaniem wstępnym i końcowym jest nieistotna statystycznie.

W przypadku grupy kontrolnej (tab. 12) różnice pomiędzy wynikami uzyskanymi w badaniu wstępnym i końcowym nie są istotne statystycznie. Rozmiary efektów mierzone współczynnikiem d_Cohena są bardzo małe, co oznacza w praktyce brak istotnej zmiany. Analizując wyniki uzyskane przez badanych w poszczególnych zadaniach, w żadnym przypadku nie stwierdzono istotności statystycznej; rozmiary efektów określone zostały na poziomie bardzo małym lub małym. W zadaniu 3, którego istota polegała na porównywaniu przedmiotów względem jednej cechy – wielkości – w grupie kontrolnej odnotowałam regres. Wyniki uzyskane przez uczniów w grupie kontrolnej jednoznacznie wskazują, że w toku realizacji cyklu zajęć z zakresu edukacji matematycznej, których tematyka była analogiczna do tematyki zajęć realizowanych w grupie eksperymentalnej, nie odnotowano wyraźnego wzrostu sprawności matematycznych, zarówno w wyniku ogólnym, jak i w poszczególnych zadaniach. Standardowa praca nauczyciela, która sprowadza się do realizacji poszczególnych tematów zawartych w programie kształcenia, bez wprowadzania do procesu kształcenia dodatkowych elementów, np. fotoedukacji matematycznej, utrzymuje dotychczasowy poziom sprawności matematycznych bez efektu dodatkowego w postaci wzrostu tych sprawności.

Reasumując, należy przyjąć, że wprowadzenie fotoedukacji do procesu kształcenia matematycznego na poziomie pierwszej klasy szkoły podstawowej przyniosło realny i potwierdzony metodami statystycznymi efekt edukacyjny. Najsilniejszy progres wystąpił w obszarze zadania wymagającego bardziej złożonych operacji intelektualnych – analiza zadania tekstowego i jego rozwiązanie poprzez odpowiednie działania matematyczne – co w praktyce oznacza, z jednej strony, skuteczność fotoedukacji matematycznej w rozwijaniu sprawności matematycznych, z drugiej zaś zdecydowaną akceptację przez uczniów tej formy prowadzenia zajęć z zakresu edukacji matematycznej.

5.1.2. Sprawności matematyczne uczniów klasy II szkoły podstawowej

W klasie drugiej sprawności matematyczne zostały sprawdzone za pomocą testu, składającego się z 6 zadań, które określały sprawność badanych uczniów w obszarze umiejętności czytania tekstu matematycznego, określania zależności między wielkościami w podanym zadaniu, pamięciowego mnożenia i dzielenia liczb, zastosowania własności mnożenia i działania odwrotnego, jakim jest dzielenie, obliczenia iloczynu mając podane dwa czynniki, poprawnego określenia miejsca przedmiotów (orientacja przestrzenna), prawidłowego ułożenia działań i obliczenia, oraz określenia zależności wynikających z symetrii. Uzyskane wyniki przedstawiam w poniższej tabeli nr 13.

Tabela 13. Zestawienie danych z badań testowych uczniów drugiej klasy z uwzględnieniem grupy eksperymentalnej i kontrolnej

Etap badania	Grupa eksperymentalna			Grupa kontrolna		
	N	$\bar{x}$	S	N	$\bar{x}$	S
Pomiar wstępny	47	7,17	1,84	54	8,01	1,75
Pomiar końcowy	47	9,16	1,14	54	7,96	1,47

N – liczba badanych
$\bar{x}$ - średnia liczba punktów uzyskanych w badaniu testowym
S – odchylenie standardowe

Z danych zawartych w powyższej tabeli wynika, że w grupie eksperymentalnej odnotować należy zdecydowany wzrost wartości średniej liczby punktów uzyskanych w badaniu testowym. W badaniach wstępnych uczniowie grupy eksperymentalnej uzyskali średni wynik na poziomie 7,17 pkt., co stanowi 71,70% możliwych do uzyskania punktów. W badaniu końcowym średnia liczba punktów uzyskanych przez badanych uczniów osiągnęła poziom 9,16 pkt. (91,60%). Oznacza to wzrost sprawności matematycznych o 1,99 pkt (19,90%). W przypadku grupy kontrolnej mamy do czynienia z sytuacją, kiedy wynik końcowy w postaci średniej ilości uzyskanych punktów jest niższy w stosunku do wartości uzyskanej w pomiarze wstępnym, a różnica wynosi 0,05 pkt. Z powyższych danych jednoznacznie wynika, że wprowadzenie do procesu kształcenia fotoedukacji matematycznej w sposób istotny przyczynia się do wzrostu sprawności matematycznych uczniów drugiej klasy szkoły podstawowej. W celu weryfikacji tej tezy przeprowadziłam analizę statystyczną z wykorzystaniem testu *t-Studenta* dla dwóch średnich w wersji dla dwóch prób zależnych oraz *d_Cohena,* określającego siłę relacji między zmiennymi[6].

Obliczenia dokonane w oparciu o dane ilościowe uzyskane w grupie eksperymentalnej jednoznacznie wskazują, że wprowadzenie fotoedukacji matematycznej do zajęć prowadzonych na poziomie klasy drugiej szkoły podstawowej w istotny sposób determinuje sprawności matematyczne badanych uczniów. Wartość testu *t-Studenta* dla prób zależnych wynosi: $t = 8,35$ ($df = 46$, $t_\alpha = 2,02$, $\alpha = 0,05$). Oznacza to istotny statystycznie wzrost średnich wyników, uzy-

[6] Lewicki Cz., Zbiór zadań ze statystyki dla pedagogów…op.cit., s. 105-111; patrz także: Cohen, J., *Statistical power analysis for the behavioral sciences*…,s. 8-21; A. Prajzner, Wybrane wskaźniki wielkości efektu w badaniach psychologicznych…, s. 139-157.

skanych w grupie eksperymentalnej, a wprowadzenie do procesu kształcenia fotoedukacji matematycznej ma znaczenie edukacyjne. Obliczona wartość d_Cohen wyniosła 1,22 i wskazuje na bardzo duży efekt oddziaływania[7]. Różnica pomiędzy średnimi uzyskanymi w badaniu wstępnym i końcowym jest statystycznie istotna i wskazuje jednoznacznie na bardzo silny wpływ fotoedukacji matematycznej na rozwój sprawności matematycznych badanych uczniów. Uzyskane w grupie kontrolnej wyniki wskazują na stabilność sprawności matematycznych badanych uczniów. Brak jest przesłanek wskazujących na rozwój tych sprawności, co w konsekwencji należy ocenić negatywnie.

Efektem przeprowadzonych badań testowych w grupie eksperymentalnej są dane empiryczne, które przedstawiam w tabeli nr 14.

Tabela 14. Szczegółowe dane uzyskane w badaniu testowym oraz analizie statystycznej uczniów klasy drugiej w grupie eksperymentalnej

	Pomiar wstępny		Pomiar końcowy		Wskaźniki	
	$\bar{x}$	S	$\bar{x}$	S	t-Studenta	d_Cohena
Zad. 1.	2,36	1,00	2,66	0,63	2,35	0,34
Zad. 2.	0,67	0,58	1,29	0,37	8,36	1,22
Zad. 3	0,87	0,33	0,97	0,16	2,40	0,35
Zad. 4.	1,66	0,60	1,98	0,14	4,03	0,59
Zad. 5.	0,28	0,46	0,83	0,31	9,28	1,35
Zad. 6	1,33	0,32	1,34	0,29	0,22	0,03

$\bar{x}$ - średnia liczba punktów uzyskanych w badaniu testowym
S – odchylenie standardowe

Analiza zmian, które dokonały się pod wpływem fotoedukacji w grupie eksperymentalnej, w zakresie sprawności matematycznych wskazuje, że największe zmiany obserwuję w obszarze rozumienia istoty symetrii, w tym umiejętności tworzenia figury symetrycznej względem prostej oraz umiejętności dostrzegania zależności wynikających z symetrii (zad. 5). Średni wynik uzyskany przez badanych uczniów w badaniu wstępnym wyniósł 0,28 pkt., co oznacza 27,66% możliwych do uzyskania punktów. W badaniu końcowym wskaźnik ten wzrósł do poziomu 0,83 pkt. (89,36%). Oznacza to, że realizacja zajęć z wykorzystaniem fotoedukacji matematycznej w sposób istotny przyczyniła się do rozwoju sprawności matematycznych w ob-

[7] Ibidem.

szarze zagadnień związanych z symetrią w matematyce. Tezę tę potwierdza analiza statystyczna. Występująca różnica pomiędzy pomiarem początkowym a końcowym jest istotna statystycznie. Wartość testu *t-Studenta* wynosi: $t = 9,28$ ($df = 46$, $t_\alpha = 2,02$, $\alpha = 0,05$). Wartość wskaźnika d_Cohena wynosi 1,35, co oznacza bardzo silny wpływ zajęć z wykorzystaniem fotoedukacji na rozwój tego elementu sprawności matematycznych badanych uczniów.

Wysoki wskaźnik wzrostu obserwuję w przypadku oceny sprawności w działaniach opartych na umiejętności mnożenia, w tym wykorzystania działania odwrotnego – dzielenia (zad. 2)**.** W badaniu wstępnym średni wynik to 0,67 pkt, co oznacza 44,68% możliwych do uzyskania punktów. W badaniu końcowym wskaźnik ten osiągnął poziom 1,29 pkt (85,82%). Można zatem przyjąć, że cykl zajęć z wykorzystaniem w edukacji matematycznej fotoedukacji w sposób istotny przyczynił się do wzrostu tej jednej z podstawowych umiejętności, jakimi jest umiejętność mnożenia i dzielenia. Analiza istotności statystycznej różnicy pomiędzy pomiarem wstępnym a końcowym jednoznacznie wskazuje, że jest ona statystycznie istotna. Wartość testu *t-Studenta* wynosi: $t = 8,36$ ($df = 46$, $t_\alpha = 2,02$, $\alpha = 0,05$). Wartość wskaźnika d_Cohena wynosi 1,22, co w konsekwencji oznacza bardzo silny wpływ zajęć dydaktycznych z wykorzystaniem fotoedukacji na rozwój sprawności matematycznych badanych uczniów.

Kolejny obszar sprawności matematycznych, który w sposób znaczący zmienił się pod wpływem zajęć z wykorzystaniem fotoedukacji, dotyczy orientacji przestrzennej badanych uczniów, w tym analizy tekstu matematycznego i określania miejsca jednego elementu względem drugiego (nad, pod). W badaniu wstępnym badani uczniowie w tym zadaniu (zadanie 4) osiągnęli średni wynik na poziomie 1,66 pkt., co oznacza 83,00% możliwych do uzyskania punktów. W badaniu końcowym średnia liczba punktów uzyskanych przez badanych uczniów osiągnęła poziom 1,98 pkt. (99,00%). Różnica pomiędzy średnią uzyskaną w badaniu wstępnym i końcowym jest istotna statystycznie. Wartość testu *t-Studenta* wynosi: $t = 4,03$ ($df = 46$, $t_\alpha = 2,02$, $\alpha = 0,05$), a wskaźnik d_Cohena wynosi 0,59, i oznacza średni efekt wpływu fotoedukacji matematycznej na rozwój tego elementu sprawności matematycznych. Uczniowie po skończonych zajęciach wykazują wyraźnie lepszy poziom wykonania tego typu zadań.

W obszarze sprawności matematycznych dotyczących rozwiązywania zadań praktycznych (zad. 1), w tym umiejętności analizy tekstu zadania, układania odpowiedniego działania matematycznego oraz jego poprawnego rozwiązania, obserwuję również pozytywne zmiany. W badaniu wstępnym sprawność ta została oceniona w postaci średniej liczby punktów uzyskanych przez badanych uczniów na poziomie 2,36 pkt. (78,67%) w badaniu końcowym wskaź-

nik ten wzrósł do wartości 2,66 pkt. (88,67%). Przeprowadzona analiza istotności różnic wskazuję, że występująca różnica średniej liczby punktów uzyskanych przez badanych uczniów w badaniu testowym jest istotna statystycznie. Wartość statystyki *t-Studenta* wynosi: t = 2,35 (df =46, t_α = 2,02, α = 0,05). Natomiast wielkości efektu wykorzystania fotoedukacji w grupie uczniów drugiej klasy w tym obszarze należy ocenić jako mały. Wartość wskaźnika Coheana wynosi: d = 0,34.

W zadaniu szóstym, którego istotą była diagnoza sprawności matematycznych w zakresie orientacji przestrzennej (za, przed), liczenia oraz uwzględnienia kolorów jako kryterium działań matematycznych (liczenie), nie obserwuję istotnych zmian poziomu wykonania tego zadania. W badaniu wstępnym średnia liczba punktów uzyskanych przez badanych uczniów to 1,34 pkt., natomiast w badaniu końcowym wzrosła do wartości 1,34 pkt. Występująca różnica nie jest statystycznie istotna. Wartość statystyki t-Studenta to : t = 0,22 (df =46, t_α = 2,02, α = 0,05), a wartość siły efektu Cohena wynosi d = 0,03, co oznacza znikomy wpływ fotoedukacji matematycznej na poziom tego elementu sprawności matematycznej.

Reasumując należy stwierdzić, że realizacja zajęć dydaktycznych z wykorzystaniem fotoedukacji matematycznej w grupie uczniów klasy drugiej w sposób znaczący wpłynęła na rozwój sprawności matematycznych badanych uczniów. Bardzo duża siła efektu (d_Cohena – 1,22) oraz znaczący wzrost wyników w postaci średniej liczby punktów uzyskanych w badaniu testowym wskazuje, że wykorzystanie fotoedukacji matematycznej w realizowanych zajęciach ma zdecydowanie pozytywny wpływ na osiągnięcia uczniów w obszarze sprawności matematycznych. Uzyskane efekty jednoznacznie wskazują, że ta forma realizacji procesu edukacji matematycznej na poziomie uczniów klasy drugiej jest efektywna i należy ją rekomendować do dalszego wykorzystania.

Zdecydowanie inaczej przedstawia się sytuacja w grupie kontrolnej. Świadczą o tym wyniki uzyskane przez uczniów zaliczonych właśnie do grupy kontrolnej. W badaniu wstępnym średnia liczba punktów uzyskanych przez badanych uczniów to 8,01 pkt., natomiast w badaniu końcowym wartość średniej obniżyła się do poziomu 7,96 pkt. Analiza statystyczna różnicy między średnimi wskazuje, że jest ona nieistotna statystycznie. Wartość statystyki t-Studenta wynosi: t = 0,23 (df =53, t_α = 2,02, α = 0,05), natomiast wielkość efektu d_Cohena została określona na poziomie: d = 0,03. Powyższa analiza wskazuje na brak zmian będących efektem realizacji kolejnych zajęć dydaktycznych przewidzianych programem nauczania. Różnica między średnimi, mieszcząca się w przedziale błędu statystycznego (p = 0,05), w praktyce oznacza stabilność poziomu sprawności badanych uczniów.

Szczegółowa analiza wykonania poszczególnych zadań testowych, której wyniki przedstawiam w poniższej tabeli nr 15, jednoznacznie potwierdza powyżej sformułowaną tezę.

Tabela 15. Szczegółowe dane uzyskane w badaniu testowym oraz analizie statystycznej uczniów klasy drugiej w grupie kontrolnej

	Pomiar wstępny		Pomiar końcowy		Wskaźniki	
	$\bar{x}$	S	$\bar{x}$	S	t-Studenta	d_Cohena
Zad. 1.	2,50	0,84	2,35	0,89	- 1,27	- 0,27
Zad. 2.	0,90	0,55	0,98	0,42	1,18	0,16
Zad. 3.	0,94	0,23	0,96	0,18	0,69	0,09
Zad. 4.	1,72	0,60	1,76	0,51	0,52	0,07
Zad. 5.	0,59	0,50	0,70	0,46	1,68	0,23
Zad. 6	1,45	0,33	1,02	0,47	- 2,78	- 0,38

$\bar{x}$ - średnia liczba punktów uzyskanych w badaniu testowym
S – odchylenie standardowe

Obserwowane zmiany w realizacji poszczególnych zadań testowych wskazują, że w przypadku zadania 1, którego istota polegała na rozwiązaniu zadania praktycznego, w tym wykorzystania przez badanego umiejętności analizy tekstu zadania, układania odpowiedniego działania matematycznego oraz jego poprawnego rozwiązania, oraz w zadaniu 6, które służyło do oceny orientacji przestrzennej (za, przed) badanych, liczenia oraz uwzględnienia kolorów jako kryterium działań matematycznych obserwuję nieznaczny spadek wartości średniej liczby punktów uzyskanych przez badanych uczniów. Różnica między badaniem wstępnym i końcowym jest nieistotna statystycznie, a wielkość efektu d_Cohena jest znikoma. W pozostałych zadaniach występuje niewielki wzrost wartości średniej, przy czym nie ma on charakteru istotnego statystycznie. Również wielkość efektu należy ocenić jako znikomy.

Reasumując, realizacja cyklu zajęć z obszaru edukacji matematycznej, czyli zajęć wynikających z realizacji programu nauczania, jednoznacznie wskazuje, że nie wywołują one istotnych zmian w rozwoju podstawowych elementów kultury matematycznej, jakim są sprawności matematyczne badanych uczniów. Stabilność osiągnięć uczniów z grupy kontrolnej pokazuje konieczność dokonania zmian w prowadzonej przez nauczycieli strategii dydaktycznej.

5.1.3. Sprawności matematyczne, uczniów klasy III szkoły podstawowej

W klasie trzeciej eksperyment również prowadzony był według zasad określonych w rozdziale metodologicznym mojego opracowania. Pomiaru wstępnego i końcowego dokonano także w oparciu o test przygotowany na użytek prowadzonych badań. Test składał się z siedmiu zadań. Zadanie pierwsze dotyczyło oceny umiejętności pamięciowego dodawania i odejmowania w zakresie 100 z przekroczeniem progu 10, i było oceniane w skali od 0 do 3 pkt. Zadanie drugie służyło ocenie umiejętności rozwiązywania zadań tekstowych, dostrzegania zależności między wielkościami, wyszukiwania danych, zapisu odpowiedniego działania i jego rozwiązania. Zadanie to oceniane było również w skali od 0 do 3 pkt. Zadanie trzecie to ocena sprawności matematycznych badanych uczniów w zakresie symetrii względem osi i oceniane było w skali od 0 do 2 pkt. Zadanie czwarte poświęcone zostało ocenie umiejętności analizy tekstu matematycznego z analizą relacji między wielkościami określonymi w tekście, trafności wyboru odpowiedzi spełniającej określone w zadaniu warunki. Zadanie oceniane było w skali od 0 do 3 pkt. Zadanie piąte zmierzało o określenia umiejętności praktycznych w postaci odczytu wskazań termometru, porównywania wskazań i określenia wartości najwyższej. Zadanie oceniano w skali od 0 do 1 pkt. Zadanie szóste z kolei służyło ocenie orientacji przestrzennej badanego ucznia poprzez ocenę umiejętności analizy tekstu matematycznego oraz umiejętności rozróżniania lewej i prawej strony ciała na podstawie analizy fotografii. Zadanie to było oceniane w skali od 0 do 2 pkt. Zadanie ostatnie dotyczyło oceny umiejętności praktycznych w postaci dokonywania prostych obliczeń kalendarzowych z wykorzystaniem informacji zawartych w treści zadania. Punktowane było w skali od 0 do 3 pkt. Badaniami objęto ogółem, w grupie eksperymentalnej 41 uczniów i w grupie kontrolnej 42 uczniów trzeciej klasy szkoły podstawowej. W wyniku przeprowadzenia badań wstępnych i końcowych w grupie eksperymentalnej oraz kontrolnej uzyskano dane, które przedstawiam w poniższej tabeli nr 16.

Tabela 16. Zestawienie danych z badań testowych uczniów trzeciej klasy z uwzględnieniem grupy eksperymentalnej i kontrolnej

Etap badania	Grupa eksperymentalna			Grupa kontrolna		
	N	$\bar{x}$	S	N	$\bar{x}$	S
Pomiar wstępny	41	9,09	3,64	42	11,15	3,76
Pomiar końcowy	41	12,94	2,58	42	11,58	3,39

N – liczba badanych
$\bar{x}$ - średnia liczba punktów uzyskanych w badaniu testowym
S – odchylenie standardowe

Z danych zawartych w powyższej tabeli wynika, że w grupie eksperymentalnej odnotowano znaczący wzrost poziomu sprawności matematycznych, mierzonego średnią liczbą punktów uzyskanych przez uczniów trzeciej klasy. W pomiarze wstępnym uzyskali oni średnią liczbę punktów na poziomie 9,09 pkt., co stanowi 53,47% możliwych do uzyskania punktów. W badaniu końcowym, po realizacji cyklu zajęć z wykorzystaniem fotoedukacji matematycznej wskaźnik ten wzrósł do poziomu 12,94 pkt. (76,12%). W grupie kontrolnej w pomiarze wstępnym badani uczniowie uzyskali średnią na poziomie 11,15 pkt. (65,59%), natomiast w pomiarze końcowym wskaźnik ten wzrósł o 0,43 pkt i wyniósł 11,58 pkt (68,12%).

Z analizy zmian wartości średniej liczby punktów uzyskanych przez badanych uczniów grupy eksperymentalnej i kontrolnej w pomiarze wstępnym i końcowym jednoznacznie wynika, że zajęcia z wykorzystaniem fotoedukacji matematycznej w sposób znaczący determinują poziom sprawności matematycznych uczniów klasy trzeciej szkoły podstawowej. Potwierdzeniem powyższej tezy jest analiza istotności różnic, której dokonałam, wykorzystując do tego celu test t-Studenta dla grup zależnych oraz współczynnik d_Cohena określający wielkość siły wpływu badanej zmiennej. Otrzymane wyniki prezentuję w tabeli nr 17.

Tabela 17. Zestawienie wskaźników statystycznych uzyskanych w badaniu testowym uczniów trzeciej klasy z uwzględnieniem grupy eksperymentalnej i kontrolnej

	Grupa eksperymentalna				Grupa kontrolna			
	$\bar{x}$	S	t	d	$\bar{x}$	S	t	d
Pomiar wstępny	9,09	3,64	7,60	1,68	11,15	3,76	0,78	0,12
Pomiar końcowy	12,94	2,58			11,58	3,39		

$\bar{x}$ *- średnia liczba punktów uzyskanych w badaniu testowym*
S – odchylenie standardowe
t – wartość t-Studenta
d – wartość współczynnika Cohena

Obliczenia dokonane w oparciu o dane ilościowe uzyskane w grupie eksperymentalnej jednoznacznie wskazują, że wprowadzenie fotoedukacji matematycznej do zajęć prowadzonych na poziomie klasy trzeciej szkoły podstawowej w istotny sposób determinują sprawności matematyczne badanych uczniów. Wartość testu *t-Studenta* dla prób zależnych wynosi: t = 7,60 (df =40, t_α = 2,02, α = 0,05). Oznacza to istotny statystycznie wzrost średnich wyników uzyskanych w grupie eksperymentalnej, a wprowadzenie do procesu kształcenia fotoedukacji matematycznej ma znaczenie edukacyjne. Obliczona wartość Cohen's d wyniosła 1,68 i wskazuje na ogromny, według standardów Cohena, efekt oddziaływania[8]. Oznacza to, że realizacja zajęć z wykorzystaniem fotoedukacji matematycznej ma znaczący wpływ na rozwój podstawowych sprawności matematycznych uczniów trzeciej klasy. W grupie kontrolnej obserwuję stabilność poziomu sprawności matematycznych, co w konsekwencji oznacza brak rozwoju tego elementu kultury matematycznej. Świadczy o tym przeprowadzona analiza istotności różnic pomiędzy średnimi uzyskanymi przez badanych uczniów w pomiarze wstępnym i końcowym. Wartość statystyki *t-Studenta* dla prób zależnych wynosi: t = 0,78 (df =40, t_α = 2,02, α = 0,05), co oznacza brak istotnej statystycznie zmiany. Wartość d_Cohena wynosi d = 0,12, co oznacza, według kryteriów Cohena[9], znikomą wielkość efektu. Brak jest przesłanek wskazujących na rozwój sprawności matematycznych uczniów realizujących zajęcia wynikające z programu nauczania, co należy ocenić negatywnie.

Szczegółowe wyniki wykonania poszczególnych zadań testowych, przedstawiam w poniższej tabeli nr 18.

[8] Prajzner A, *Wybrane wskaźniki wielkości efektu w badaniach psychologicznych…,op. cit.*. (od 0,00 do 0,20 mały efekt, od 0,21 do 50 średni efekt; 0,51 do 0,80 duży efekt), s. 139-157.
[9] Ibidem.

Tabela 18. Szczegółowe dane uzyskane w badaniu testowym oraz analizie statystycznej uczniów klasy trzeciej w grupie eksperymentalnej

	Pomiar wstępny		Pomiar końcowy		Wskaźniki	
	$\bar{x}$	S	$\bar{x}$	S	t-Studenta	d_Cohena
Zad. 1.	1,68	1,15	2,41	0,74	4,63	1,02
Zad. 2.	1,54	1,52	2,10	1,07	2,65	0,59
Zad. 3	1,60	0,54	1,94	0,17	4,55	1,01
Zad. 4.	1,98	1,44	2,34	0,99	1,81	0,40
Zad. 5.	0,56	0,50	1,00	0,00	5,63	1,24
Zad. 6	0,88	1,00	1,73	0,59	6,25	1,38
Zad. 7	0,85	0,73	1,41	1,04	3,88	0,86

$\bar{x}$ - średnia liczba punktów uzyskanych w badaniu testowym
S – odchylenie standardowe

W zadaniu pierwszym, które posłużyło do rozwoju umiejętności dodawania i odejmowania w zakresie 100 z przekroczeniem progu 10, obserwuję znaczący wpływ zajęć zrealizowanych z wykorzystaniem fotoedukacji matematycznej. W pomiarze wstępnym średnia liczba punktów uzyskanych przez badanych wyniosła 1,68 pkt. co stanowi 56,00% możliwych do uzyskania punktów. Po realizacji cyklu zajęć przeprowadzonych w ramach eksperymentu wskaźnik średniej liczby punktów wzrósł do poziomu 2,41 pkt. (80,33%). Analiza statystyczna z wykorzystaniem testu t-Studenta dla grup zależnych wskazała na istotność statystyczną występujących różnic. Wartość t = 4,63 (df =40, t_α = 2,02, α = 0,05). Wielkość efektu oddziaływania fotoedukacji matematycznej, czyli rozwój tej umiejętności badanych uczniów należy ocenić jako bardzo duży. Wartość współczynnika Cohena wynosi: d = 1,02, co oznacza bardzo silny i jednoznaczny wpływ czynnika eksperymentalnego na rozwój analizowanej umiejętności.

W realizacji zadania drugiego - ocena umiejętności rozwiązywania zadań tekstowych, dostrzegania zależności między wielkościami, wyszukiwania danych, zapis odpowiedniego działania i jego rozwiązania – obserwuję pozytywne zmiany. W badaniu wstępnym badani uczniowie uzyskali średnią liczbę punktów na poziomie 1,54 pkt, co oznacz uzyskanie 5,33 % możliwych do uzyskania punktów. Po realizacji cyklu zajęć eksperymentalnych wartość śred-

niej uzyskana w pomiarze końcowym wzrosła do poziomu 2,10 pkt. (70,00%). Analiza istotności różnic wskazuje na statystycznie istotną zmianę ocenianej umiejętności. Wartość t-Studenta wynosi; t = 2,65 (df =40, t_α = 2,02, α = 0,05). Natomiast wielkość siły oddziaływania należy ocenić jako średnią. Wartość d_Cohena wynosi: d = 0,59. Oznacza to, że efekt końcowy oddziaływania fotoedukacji matematycznej na rozwój analizowanych elementów sprawności matematycznych ocenić należy jako znaczący. W zadaniu trzecim ocenie poddano sprawność w zakresie symetrii względem osi. W badaniu wstępnym badani uczniowie osiągnęli średnią liczbę punktów na poziomie 1,60 pkt., co stanowi 80,00% możliwych do uzyskania punktów. W badaniu końcowym wskaźnik ten osiągnął poziom 1,94 pkt. (97,00%). Analiza istotności różnic między średnimi dowodzi, że różnica jest istotna statystycznie. Wartość testu t-Studenta wynosi: t = 4,55 (df =40, t_α = 2,02, α = 0,05), natomiast siła efektu oceniona została jako bardzo duża. Współczynnik Cohena wynosi: d = 1,01. Oznacza to, że wprowadzenie fotoedukacji do zajęć w sposób znaczący determinuje rozwój sprawności w zakresie określania symetrii względem osi, a zmiana ta ma charakter stały. Zadanie czwarte służyło ocenie umiejętności analizy tekstu matematycznego wraz z analizą relacji między wielkościami określonymi w tekście oraz trafnością wyboru odpowiedzi spełniającej określone kryteria. W badaniu wstępnym uczniowie uzyskali średni wynik, którego wartość wynosi 1,98 pkt. (66,00% możliwych do uzyskania punktów), natomiast w badaniu końcowym wartość tego wskaźnika wzrosła do poziomu 2,34 pkt. Analiza istotności różnic wskazała, że jest to różnica nieistotna statystycznie. Wartość testu t-Studenta wynosi:: t = 1,81 (df =40, t_α = 2,02, α = 0,05), a wskaźnik wielkości efektu d = 0.40, należy określić jako umiarkowany. Uzyskane dane wskazują, że wykorzystanie fotoedukacji jest zauważalne dydaktycznie – wzrost średniej liczby punktów w badaniu testowym – ale nie jest on statystycznie istotny, a wpływ na wielkość dokonujących się zmian w tym obszarze sprawności jest umiarkowany. Zadanie piąte dotyczyło oceny umiejętności praktycznych badanych uczniów (odczyt wartości temperatury), porównywania wskazań i określania wartości największej. W badaniu wstępnym średnia liczba punktów to 0,56 pkt. (56,00%), natomiast w badaniu końcowym wszyscy badani uczniowie rozwiązali to zadanie bezbłędnie. Wzrost poziomu tej umiejętności wynosi 44 punkty procentowe. Analiza istotności różnic dowiodła, że jest ona statystycznie istotna. Wartość testu t-Studenta wynosi: t = 5.63 (df =40, t_α = 2,02, α = 0,05), natomiast wartość współczynnika Cohena, która wynosi d – 1,24 wskazuje na bardzo silny efekt stosowania fotoedukacji w realizacji zajęć z edukacji matematycznej. Po zakończeniu cyklu zajęć w grupie eksperymentalnej uczniowie w sposób zdecydowany poprawili swoje umiejętności praktyczne. W podobny sposób kształtują się wyniki uzyskane przez

uczniów w zadaniu szóstym. Istotą tego zadania była ocena orientacji przestrzennej poprzez ocenę umiejętności analizy tekstu matematycznego oraz rozróżniania prawej i lewej strony ciała. W badaniu wstępnym średnia liczba punktów uzyskanych przez uczniów osiągnęła poziom 0,88 pkt. (44,00%), natomiast w badaniu końcowym wzrosła do 1,73 pkt. (86,50%). Występująca różnica ma charakter statystycznie istotny. Wartość testu t-Studenta to: t = 6,25 (df =40, t_α = 2,02, α = 0,05). Siła efektu oddziaływania wynosi d = 1,38 i według standardu Cohena określana jest jako bardzo duży. Oznacza to, że w przypadku tego elementu sprawności matematycznych, fotoedukacja matematyczna ma bardzo silny wpływ na rozwój umiejętności orientacji przestrzennej. Ostatnie zadanie badania testowego, służące do oceny sprawności matematycznych uczniów klasy trzeciej, zmierzało do oceny sprawności praktycznych poprzez dokonywanie prostych obliczeń kalendarzowych z wykorzystaniem informacji dostępnych w treści zadania do wykonania. W badaniu wstępnym średnia liczba punktów uzyskanych przez uczniów kształtowała się na poziomie 0,85 pkt., co stanowiło 28,33% możliwych do uzyskania punktów. W badaniu końcowym, po realizacji zajęć z wykorzystaniem fotoedukacji matematycznej średnia liczba punktów wzrosła do poziomu 1,41pkt. (47,00%). Przeprowadzona analiza statystyczna wskazuje, że występująca różnica jest istotna statystycznie, a wartość testu t-Studenta wynosi: t = 3,88 (df =40, t_α = 2,02, α = 0,05). Siła efektu zastosowania fotoedukacji matematycznej została określona jako duża. Wartość wskaźnika Cohena wynosi: d = 0,86, co oznacza wysoki i istotny wzrost poziomu ocenianej umiejętności. Zatem należy przyjąć, że wprowadzenie fotoedukacji do procesu kształcenia matematycznego na poziomie trzeciej klasy szkoły podstawowej przyniosło realny i potwierdzony metodami statystycznymi efekt edukacyjny.

Natomiast w grupie kontrolnej wśród uczniów klasy trzeciej uzyskane efekty są zdecydowanie inne, a świadczą o tym dane zawarte w poniższej tabeli nr 19.

Tabela 19. Szczegółowe dane uzyskane w badaniu testowym oraz analizie statystycznej uczniów klasy trzeciej w grupie eksperymentalnej

	Pomiar wstępny		Pomiar końcowy		Wskaźniki	
	$\bar{x}$	S	$\bar{x}$	S	t-Studenta	d_Cohena
Zad. 1.	2,07	1,24	1,95	1,25	- 0,63	- 0,10
Zad. 2.	1,81	1,44	1,95	1,17	0,68	0,11
Zad. 3	1,82	0,53	1,52	0,80	- 2,75	- 0,43

Zad. 4.	2,14	1,37	2,19	1,02	0,26	0,04
Zad. 5.	1,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00
Zad. 6	1,12	0,92	1,67	0,69	4,30	0,66
Zad. 7	1,19	0,75	1,30	0,98	0,80	0,12

$\bar{x}$ *- średnia liczba punktów uzyskanych w badaniu testowym*
S – odchylenie standardowe

Z powyższych danych wynika, że jedynie w przypadku zadania szóstego, którego istota polegała na ocenie orientacji przestrzennej, a dokładniej na analizie tekstu matematycznego i rozróżnianiu prawej i lewej strony ciała, dostrzec można zmiany w poziomie wykonania tego zadania. W pomiarze wstępnym średnia liczba uzyskanych punktów to 1,12 pkt, co stanowi 56,00% możliwych, do uzyskania punktów, natomiast w pomiarze końcowym wartość średniej wzrosła do poziomu 1,67 pkt. Analiza istotności różnic wskazuje, że różnice między średnimi, wynosząca 0,55 pkt. ma charakter istotny statystycznie. Wartość statystyki t-Studenta wynosi: t = 4, 30 (df =41, t_α = 2,02, α = 0,05), a obliczona wartość wielkości efektu Cohena wynosi d = 0,66, co oznacza umiarkowaną siłę zależności. Oznacza to, że realizacja treści zawartych w programie edukacji matematycznej[10] sprzyja rozwojowi tej umiejętności, stanowiącej ten element sprawności matematycznej. W pozostałych obszarach obserwuję stagnację w rozwoju poszczególnych elementów składających się na sprawność matematyczną uczniów trzeciej klasy. Dokonujące się w czasie zmiany nie mają istotnego znaczenia dla oceny sprawności badanych uczniów, a siłę efektów prowadzonych zajęć z edukacji matematycznej można określić jako znikomą. W obszarze dwóch sprawności, a mianowicie umiejętności dodawania i odejmowania w zakresie 100 z przekroczeniem progu 10 (zad. 1) oraz sprawności w zakresie symetrii względem osi (zad 3) obserwuję niekorzystne zmiany, których egzemplifikacją jest spadek wartości średniej liczby punktów uzyskanych w badaniu testowym. W pierwszym przypadku spadek ten wyniósł 0,12 pkt. i pomimo braku istotności statystycznej dla dwóch średnich, to sam fakt obniżenia poziomu należy ocenić negatywnie. W przypadku zadania trzeciego spadek wartości średniej liczby punktów uzyskanych w badaniu wstępnym i końcowym wynosi 0,30 pkt., a różnica ma charakter istotny statystycznie. Wartość testu *t-Studenta* wynosi: d = - 2,75 (df =41, t_α = 2,02, α = 0,05) i oznacza istotną, niekorzystną zmianę w sprawności matematycznych

[10] J. Hanisz, Program edukacji wczesnoszkolnej…, op .cit.

badanych uczniów klasy trzeciej szkoły podstawowej w zakresie rozwoju tego elementu składowego. Uzyskane wyniki i ich analiza w grupie kontrolnej pokazują, że zajęcia prowadzone przez nauczycieli tradycyjnymi metodami, nie powodują znaczącego wzrostu komponentu kultury matematycznej, czyli sprawności matematycznej.

Reasumując, przedstawiona powyżej analiza ilościowa, służąca ocenie jednego z komponentów kultury matematycznej uczniów na poziomie edukacji wczesnoszkolnej w klasie trzeciej wskazuje, że wprowadzenie do realizacji edukacji matematycznej rozwiązania metodycznego w postaci fotoedukacji matematycznej w sposób jednoznaczny determinuje rozwój poszczególnych elementów sprawności matematycznych. Oznacza to, że zaproponowana forma metodyczna zastosowana w edukacji matematycznej na poziome klas III szkoły podstawowej w sposób znaczący może przyczynić się do zmiany efektywności tejże edukacji.

5.2. Język matematyczny badanych uczniów klas I-III

Umiejętności uczniów w zakresie języka matematycznego zbadano za pomocą arkuszy obserwacji, które skonstruowałam na użytek moich badań. Dla celów porównawczych przeprowadzono obserwację wstępną i końcową. Obserwacje prowadzono zarówno w grupie eksperymentalnej, jak i kontrolnej uczniów klas pierwszych, drugich i trzecich. W grupie eksperymentalnej wykorzystano fotoedukację. W grupie kontrolnej program kształcenia z zakresu edukacji matematycznej realizowano zgodnie z programem autorstwa Jadwigi Hanisz, bez wykorzystania fotoedukacji matematycznej. Uzyskane wyniki zaprezentuję oddzielnie dla klasy pierwszej, oddzielnie dla klasy drugiej i oddzielnie dla klasy trzeciej.

5.2.1. Język matematyczny uczniów klas pierwszych szkoły podstawowej

W klasach pierwszych wykorzystano arkusz obserwacji, który objął następujące obszary: pisanie i czytanie liczb do 20; znajomość i stosowanie znaków działań, wyjaśnianie istoty działań matematycznych - dodawania odejmowania, mnożenia, dzielenia oraz związków między nimi, korzystanie intuicyjnie z własności działań; znajomość i stosowanie znaków <, =, >; posługiwanie się pojęciami matematycznymi; formułowanie pytań matematycznych; rozumienie polecenia matematycznego; uzasadnianie i argumentowanie otrzymanych wyników; liczenie (w przód i wstecz) od podanej liczby po 1, po 2, po 10, itp.; oraz czytanie fotografii, diagramów

i wykresów. Badane umiejętności uczniów w zakresie języka matematycznego oceniane były na trzech poziomach: bardzo dobrym, wystarczającym, niewystarczającym.

Efektem przeprowadzanych obserwacji w grupie eksperymentalnej i kontrolnej dotyczących umiejętności z zakresu języka matematycznego uczniów klas pierwszych są dane empiryczne, przedstawione w tabelach 20 i 21.

Tabela 20. Wyniki procentowe badań wstępnych i końcowych w grupie eksperymentalnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy pierwszej w zakresie języka matematycznego

Umiejętności w zakresie języka matematycznego	**BADANIA WSTĘPNE**			**BADANIA KOŃCOWE**		
	Poziom ocenianych umiejętności			**Poziom ocenianych umiejętności**		
	A (w %)	B (w %)	C (w %)	A (w %)	B (w %)	C (w %)
1	60,98	19,51	19,51	85,37	12,20	2,44
2	51,22	36,59	12,20	78,05	14,63	7,32
3	2,44	48,78	48,78	26,83	51,22	21,95
4	58,54	36,59	4,88	78,05	17,07	4,88
5	14,63	51,22	34,15	53,66	31,71	14,63
6	4,88	43,90	51,22	24,39	56,10	19,51
7	31,71	41,46	26,83	70,73	14,63	14,63
8	0,00	17,07	82,93	12,20	58,54	29,27
9	7,32	39,02	53,66	68,29	17,07	14,63
10	0,00	29,27	71,73	12,20	68,29	19,51
Ogółem	**23,17**	**36,34**	**40,49**	**50,98**	**34,15**	**14,88**

Poziom: A - bardzo dobry; B - wystarczający; C - niewystarczający

1 - Pisze i czyta liczby do 20; 2 - Zna i stosuje znaki działań; 3 - Wyjaśnia istotę działań matematycznych - dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie oraz związki między nimi, korzysta intuicyjnie z własności działań; 4 - Zna i stosuje znaki <, =, >; 5 - Posługuje się pojęciami matematycznymi; 6 - Potrafi formułować pytania matematyczne; 7 - Rozumie polecenia matematyczne; 8 - Uzasadnia i argumentuje otrzymane wyniki; 9 - Liczy (w przód i wstecz) od podanej liczby po 1, po 2, po 10, itp.; 10 - Potrafi czytać fotografie, diagramy, wykresy.
Źródło: Opracowanie własne na podstawie przeprowadzonych badań.

Tabela 21. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie kontrolnej – ocena umiejętności badanych uczniów klasy pierwszej w zakresie języka matematycznego

Umiejętności w zakresie języka matematycznego	**BADANIA WSTĘPNE**			**BADANIA KOŃCOWE**		
	Poziom ocenianych umiejętności			**Poziom ocenianych umiejętności**		
	A (w %)	B (w %)	C (w %)	A (w %)	B (w %)	C (w %)
1	63,89	16,67	19,44	69,44	30,56	0,00
2	55,56	33,33	11,11	63,89	33,33	2,78
3	2,78	55,56	41,67	11,11	72,22	16,67
4	61,11	38,89	0,00	80,56	27,78	0,00
5	16,67	61,11	22,22	27,78	61,11	11,11
6	5,56	58,33	36,11	16,67	69,44	13,89
7	36,11	47,22	16,67	44,44	50,00	5,56
8	0,00	38,89	61,11	16,67	52,78	30,56
9	27,78	30,56	41,67	30,56	61,11	8,33
10	0,00	47,22	52,78	11,11	61,11	27,78
Ogółem	**26,94**	**26,94**	**30,28**	**36,39**	**51,94**	**11,67**

Poziom: A - bardzo dobry; B - wystarczający; C - niewystarczający

1 - Pisze i czyta liczby do 20; 2 - Zna i stosuje znaki działań,3 - Wyjaśnia istotę działań matematycznych - dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie oraz związki między nimi, korzysta intuicyjnie z własności działań; 4 - Zna i stosuje znaki <, =, >; 5 - Posługuje się pojęciami matematycznymi; 6 - Potrafi formułować pytania matematyczne; 7 - Rozumie polecenia matematyczne; 8 - Uzasadnia i argumentuje otrzymane wyniki; 9 - Liczy (w przód i wstecz) od podanej liczby po 1, po 2, po 10, itp.; 10 - Potrafi czytać fotografie, diagramy, wykresy.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie przeprowadzonych badań

Z powyższych danych jednoznacznie wynika, że w grupie eksperymentalnej oraz kontrolnej mamy do czynienia z wzrostem poziomu umiejętności językowych badanych uczniów. W grupie eksperymentalnej, w której realizowano cykl zajęć z wykorzystaniem fotoedukacji matematycznej, obserwujemy wzrost umiejętności badanych uczniów w przypadku wszystkich zadań (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10).

Różnica między pomiarem wstępnym a końcowym w grupie eksperymentalnej ma wysoką doniosłość pedagogiczną w zakresie języka matematycznego, wskazując, że największe zmiany zaobserwowano w umiejętności dotyczącej liczenia (w przód i wstecz) od podanej liczby ((w

tabeli 20 pozycja nr *9 - Liczy w przód i wstecz) od podanej liczby po 1, po 2, po 10, itp.)* Odnotowano tu największy przyrost poziomu A - bardzo dobrego wśród wszystkich badanych umiejętności. Wzrost ten wyniósł blisko 61 punktów procentowych. Tak duży skok z 7,32% do 68,29% mówi o pozytywnej roli fotoedukacji matematycznej. Zniwelowała ona niemal całkowicie trudności w operowaniu na liczbach, przenosząc większość grupy uczniów klasy pierwszej z poziomu C- niewystarczającego na poziom A - bardzo dobry. Dzięki fotoedukacji nastąpiła także wyraźna poprawa w umiejętności dotyczącej posługiwania się pojęciami matematycznymi. Poziom bardzo dobry wzrósł z 14,63% do 53,66%. Ponad trzykrotny wzrost w najwyższym poziomie umiejętności przy jednoczesnym spadku ocen niewystarczających o ponad połowę. Jest to statystycznie bardzo silny sygnał skuteczności fotoedukacji w procesie nauczania matematyki. Również w zakresie umiejętności rozumienia poleceń matematycznych nastąpiła wyraźna poprawa. Ponad dwukrotny wzrost liczby uczniów w pełni rozumiejących polecenia matematyczne (poziom bardzo dobry wzrósł z 31,71% do 70,73%), świadczy o pozytywnym oddziaływaniu fotoedukacji w nauczaniu matematyki. Wyjście poza próg 70% dla całej próby badawczej w grupy eksperymentalnej świadczy o wysokiej doniosłości pedagogicznej fotoedukacji. Również w argumentowaniu oraz czytaniu danych (umiejętności nr 8 i 10), zaszła wyraźna zmiana empiryczna, powodująca pokonanie bariery braku tych umiejętności. W umiejętności dotyczącej uzasadniania i argumentowania, jak pokazują dane statystyczne w badaniu wstępnym, żaden uczeń nie posiadał umiejętności na poziomie bardzo dobrym. Dzięki eksperymentowi poziom ten osiągnęło 12,20% badanych, przy jednoczesnej radykalnej redukcji poziomu niewystarczającego z 82,93% do 29,27%. Wzrost wyników w tak trudnym obszarze świadczy o ważności pedagogicznej fotoedukacji. Z kolei zmiana umiejętności czytania fotografii, diagramów, wykresów (umiejętność nr 10) wzrosła z 0,00% do 12,20% oraz nastąpiła redukcja poziomu niewystarczającego z 71,73% do 19,51%. Choć poziom bardzo dobry (A) nie jest tu dominujący, to przesunięcie ogromnej liczby uczniów (ponad 50 punktów procentowych) z poziomu niewystarczającego na poziom wystarczający (B) jest statystycznie ważne dla tych najbardziej złożonych umiejętności i potwierdza pozytywne oddziaływanie fotoedukacji. na uczniów. W obszarze podstawowych umiejętności technicznych, takich jak pisanie i czytanie liczb do 20, odnotowałam tendencję wzrostową z 60,98% do 85,37 (poziom A), natomiast za najbardziej znaczący sukces w tej kategorii należy uznać prawie całkowitą eliminację wyników niewystarczających (poziom C) z 19,51% do 2,44%. Podobną dynamikę zaobserwowałam w zakresie znajomości znaków działań oraz znaków relacji. Ta ostatnia umiejętność okazała się jedną z najlepiej opanowanych przez grupę. Poziom bardzo dobry osiągnęło w badaniu końcowym aż 78,05% uczniów. W przypadku umiejętności formułowania

pytań matematycznych odnotowałam także wzrost z 4,88% do 24,39% (poziom A). Umiejętności w zakresie języka matematycznego ogółem we wszystkich obszarach w grupie eksperymentalnej wzrosły z 23,17% do 50,98% (poziom A bardzo dobry), czyli dwukrotna poprawa jakościowa przy jednoczesnym spadku poziomu niewystarczającego z 40,49% do 14,88% (blisko trzykrotna redukcja deficytów) świadcząca o wyraźnej przewadze empirycznej, a tym samym o pozytywnym zastosowaniu fotoedukacji na zajęciach z matematyki. Analiza otrzymanych wyników końcowych w grupie eksperymentalnej potwierdza, że zastosowanie fotoedukacji matematycznej wygenerowało wyraźną przewagę empiryczną w każdym z dziesięciu badanych obszarów. Z punktu widzenia statystyki opisowej, tak wyraźne przesunięcia w rozkładzie wyników jednoznacznie wskazują na wysoką skuteczność podjętych działań w grupie eksperymentalnej. Oznacza to, że realizacja zajęć z wykorzystaniem fotoedukacji matematycznej w sposób istotny przyczyniła się do rozwoju języka matematycznego.

W przypadku grupy kontrolnej brak zastosowania innowacyjnych narzędzi wizualnych sprawił, że dynamika zmian w tej grupie nie wykazuje cech, które można by określić jako wyraźną przewagę empiryczną. Obszar umiejętności wyjaśniania istoty działań i ich związków pozostał dla wielu badanych zadaniem trudnym. Choć odnotowano spadek ocen niewystarczających o 25 punktów procentowych, jedynie 11,11% uczniów zdołało osiągnąć poziom bardzo dobry. Tak niski odsetek sukcesów w grupie kontrolnej podkreśla, jak wysoka doniosłość pedagogiczna jest ukryta w fotoedukacji, która w grupie eksperymentalnej skutecznie przełamuje te bariery. W posługiwaniu się pojęciami matematycznymi zaobserwowałam zbliżone tendencje stagnacyjne - wzrost poziomu bardzo dobrego wyniósł jedynie 11,11 punktów procentowych. Deficyt ten wskazuje na brak wyraźnej przewagi empirycznej tradycyjnego modelu nauczania w zakresie konceptualizacji języka matematycznego. Mimo odnotowania trzykrotnego wzrostu ocen bardzo dobrych w formułowaniu pytań matematycznych, dominującym efektem kształcenia stał się poziom wystarczający (B), obejmujący niemal 70% grupy. Uśrednienie wyników na poziomie poprawnym, przy braku wyników bardzo dobrych, uwypukla potrzebę wdrożenia metod fotoedukacji do nauczania matematyki w klasach początkowych. Uzasadnianie wyników oraz interpretacja danych wizualnych (diagramy, fotografie) to umiejętności, które w badaniu wstępnym w obu przypadkach (grupa eksperymentalna i kontrolna) wykazały 0% uczniów z umiejętnościami bardzo dobrymi. Badanie końcowe wykazało progres, lecz wciąż ograniczony – poziom bardzo dobry osiągnęło odpowiednio 12,20% i 11,11% (grupa kontrolna) uczniów. Fakt, że wciąż co trzeci uczeń grupy kontrolnej wykazuje braki w zakresie argumentowania, dowodzi, iż tradycyjna dydaktyka nie zapewnia wyraźnej przewagi empirycznej w kluczowych procesach analitycznych. W liczeniu w przód i wstecz odnotowano niewielki

przyrost umiejętności bardzo dobrych, którym towarzyszył gwałtowny wzrost ocen wystarczających (z 30,56% do 61,11%). To uśrednienie wyników grupy kontrolnej stoi w jaskrawej sprzeczności z sukcesami grupy eksperymentalnej, co nadaje innowacji fotoedukacyjnej walor o wysokiej doniosłości pedagogicznej. Analiza końcowa grupy kontrolnej dokumentuje rzetelną realizację podstawy programowej, jednak bez uzyskania przełomowych efektów jakościowych. Brak wyraźnej przewagi empirycznej w zakresie funkcji poznawczych (argumentacja, interpretacja, konceptualizacja) stanowi bezpośrednie uzasadnienie dla wdrożenia fotoedukacji jako metody mogącej przyczynić się do optymalizacji procesu kształcenia języka matematycznego.

Porównanie danych uzyskanych w grupie eksperymentalnej oraz kontrolnej pozwala na sformułowanie wniosków o wyraźnej przewadze empirycznej fotoedukacji matematycznej. Choć w obu grupach badawczych odnotowano progres, to dynamika i jakość wzrostu poszczególnych umiejętności w grupie eksperymentalnej dokumentują jej ważność pedagogiczną, co staje się szczególnie widoczne w obszarach wymagających zaawansowanych operacji myślowych. Dogłębna analiza różnic ujawnia istotne dysproporcje w tempie rozwoju uczniów, gdzie w zakresie wyjaśniania istoty działań grupa pracująca z fotografią niemal trzykrotnie wyprzedziła grupę kontrolną w przyroście ocen najwyższych, co przy dwukrotnie lepszym wyniku w posługiwaniu się pojęciami matematycznymi (53,66% wobec 27,78%) stanowi bezsporny dowód na wyraźną przewagę empiryczną eksperymentu.

Jeszcze silniej pozytywne znaczenie wdrożonej metody fotoedukacji manifestuje się w kształtowaniu umiejętności, takich jak argumentowanie i formułowanie pytań, w których uczniowie z grupy eksperymentalnej znacznie częściej osiągali wyższe wyniki niż ich rówieśnicy z grupy kontrolnej. Znaczący sukces odnotowano także w obszarze sprawności rachunkowej, gdzie grupa eksperymentalna wręcz zdeklasowała kontrolną, uzyskując ponad dwukrotnie wyższy odsetek ocen bardzo dobrych (68,29% przy 30,56% w grupie kontrolnej). Zdolność innowacji do niemal całkowitej eliminacji wyników niewystarczających w zakresie analizy danych wizualnych ostatecznie potwierdza jej wyraźną przewagę empiryczną jako narzędzia o istotnym znaczeniu w nauczaniu matematyki. Ostatecznym potwierdzeniem ważności fotoedukacji w klasie pierwszej jest fakt, że grupa eksperymentalna – mimo niższego kapitału początkowego (23,17% ocen bardzo dobrych wobec 26,94% w grupie kontrolnej) – zakończyła badanie z wynikiem 50,98%, wyprzedzając grupę kontrolną o ponad 14 punktów procentowych. Ten zauważalny efekt edukacyjny dowodzi, że fotoedukacja matematyczna nie tylko optyma-

lizuje proces nabywania języka przedmiotu, ale dzięki pełnej akceptacji ze strony dzieci stanowi model kształcenia o wyraźnej przewadze empirycznej nad tradycyjną dydaktyką podręcznikową.

5.2.2. Język matematyczny uczniów klas drugich szkoły podstawowej

W klasach drugich podobnie, jak w klasach pierwszych wykorzystano arkusz obserwacji, który objął następujące obszary: pisanie i czytanie liczb w zakresie 100; znajomość i stosowanie znaków działań matematycznych, wyjaśnianie istoty działań matematycznych - dodawania odejmowania, mnożenia, dzielenia oraz związkami między nimi, korzystanie intuicyjnie z własności działań; znajomość i stosowanie znaków <, =, >; posługiwanie się pojęciami matematycznymi; formułowanie pytań matematycznych; rozumienie polecenia matematycznego; uzasadnianie i argumentowanie otrzymanych wyników; liczenia (w przód i wstecz) od podanej liczby po 1, po 2, po 10, itp.; czytanie fotografii, diagramów i wykresów. Badane umiejętności uczniów w zakresie języka matematycznego oceniane były na trzech poziomach: bardzo dobrym, wystarczającym, niewystarczającym.

Efektem przeprowadzanych obserwacji w grupie eksperymentalnej i kontrolnej dotyczących umiejętności z zakresu języka matematycznego uczniów klas drugich są dane empiryczne, przedstawione w tabelach nr 22 i 23.

Tabela 22. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie eksperymentalnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy drugiej w zakresie języka matematycznego

Umiejętności w zakresie języka matematycznego	BADANIA WSTĘPNE			BADANIA KOŃCOWE		
	Poziom ocenianych umiejętności			Poziom ocenianych umiejętności		
	A (w %)	B (w %)	C (w %)	A (w %)	B (w %)	C (w %)
1	63,83	27,66	8,51	80,85	19,15	0,00
2	65,96	27,66	6,38	82,98	17,02	0,00
3	34,04	53,19	12,77	46,81	53,19	0,00

4	61,70	25,53	12,77	74,47	23,40	2,13
5	57,45	29,79	12,77	57,48	40,43	2,13
6	36,17	46,81	17,02	40,43	51,06	8,51
7	40,43	40,43	19,15	42,55	48,94	8,51
8	12,77	70,21	17,02	27,66	53,19	19,15
9	14,89	74,47	10,64	40,43	48,94	10,64
10	38,30	46,81	14,89	51,06	38,30	10,64
Ogółem	**42,55**	**44,26**	**44,26**	**54,47**	**39,36**	**6,17**

Poziom: A - bardzo dobry; B - wystarczający; C - niewystarczający

1 - Pisze i czyta liczby w zakresie 100; 2 - Zna i stosuje znaki działań; 3 - Wyjaśnia istotę działań matematycznych - dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie oraz związki między nimi, korzysta intuicyjnie z własności działań; 4 - Zna i stosuje znaki <, =, >; 5 - Posługuje się pojęciami matematycznymi; 6 - Potrafi formułować pytania matematyczne; 7 - Rozumie polecenia matematyczne; 8 - Uzasadnia i argumentuje otrzymane wyniki; 9 - Liczy (w przód i wstecz) od podanej liczby po 1, po 2, po 10, itp.; 10 - Potrafi czytać fotografie, diagramy, wykresy.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie przeprowadzonych badań

Tabela 23. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie kontrolnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy drugiej w zakresie języka matematycznego

Umiejętności w zakresie języka matematycznego (U)	BADANIA WSTĘPNE			BADANIA KOŃCOWE		
	Poziom ocenianych umiejętności			Poziom ocenianych umiejętności		
	A (w %)	B (w %)	C (w %)	A (w %)	B (w %)	C (w %)
1	38,89	44,44	16,67	48,15	48,15	3,70
2	35,19	46,30	18,52	40,74	48,15	11,11
3	16,67	59,26	24,07	5,56	68,52	25,93
4	42,59	27,78	29,63	27,78	48,15	24,07
5	31,48	35,19	33,33	14,81	64,81	20,37
6	16,67	46,30	37,04	14,81	62,96	22,22
7	22,22	44,44	33,33	24,07	37,04	38,89
8	11,11	61,11	27,78	7,41	50,00	42,59

9	14,81	64,81	20,37	24,07	53,70	22,22
10	33,33	44,44	22,22	42,59	38,89	18,52
Ogółem	**26,30**	**47,41**	**26,30**	**25,00**	**52,04**	**22,96**

Poziom: A - bardzo dobry; B - wystarczający; C - niewystarczający

1 - Pisze i czyta liczby w zakresie 100; 2 - Zna i stosuje znaki działań matematycznych; 3 - Wyjaśnia istotę działań matematycznych - dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie oraz związki między nimi, korzysta intuicyjnie z własności działań; 4 - Zna i stosuje znaki <, =, >; 5 - Posługuje się pojęciami matematycznymi; 6 - Potrafi formułować pytania matematyczne; 7 - Rozumie polecenia matematyczne; 8 - Uzasadnia i argumentuje otrzymane wyniki; 9 - Liczy (w przód i wstecz) od podanej liczby po 1, po 2, po 10, itp.; 10 - Potrafi czytać fotografie, diagramy, wykresy.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie przeprowadzonych badań

Analiza danych zgromadzonych w toku eksperymentu pozwala na sformułowanie wniosków o wyraźnej przewadze empirycznej grupy eksperymentalnej, w której odnotowano zdecydowany wzrost umiejętności matematycznych. Najistotniejszym wskaźnikiem świadczącym o ważności fotoedukacji w nauczaniu matematyki jest ogólny wzrost poziomu bardzo dobrego z 42,55% do 54,47%, przy jednoczesnej radykalnej redukcji wyników niewystarczających z 44,26% do zaledwie 6,17%. Uczniowie wykazali się bardzo wysoką sprawnością w operowaniu symboliką, co zaowocowało całkowitą eliminacją poziomu niewystarczającego w czytaniu i pisaniu liczb do 100 oraz znajomości znaków działań, gdzie początkowe deficyty na poziomie 8,51% (grupa eksperymentalna) i 6,38% zostały zredukowane do 0,00%. Fakt, że obecnie ponad 80% dzieci opanowało te umiejętności w stopniu bardzo dobrym, stanowi o wyraźnej przewadze empirycznej zastosowanej metody nad tradycyjnym modelem nauczania. W obszarze wyjaśniania istoty działań wzrost ocen bardzo dobrych z 34,04% do 46,81% oraz całkowita eliminacja wyników negatywnych, które pierwotnie wynosiły blisko 12,77%, to sukces pokazujący pozytywne znaczenie fotoedukacji, oznaczający przejście od czystej wiedzy operacyjnej do głębokiego rozumienia procesów. Wysoką dynamikę odnotowano również w sprawności rachunkowej i liczeniu pamięciowym, gdzie odsetek wyników bardzo dobrych wzrósł z 14,89% do 40,43%, dokumentując wyraźną przewagę empiryczną innowacji w podnoszeniu biegłości operowania strukturą dziesiątkową liczby. Jednocześnie dzięki systematycznemu wykorzystaniu fotografii na lekcjach, poziom niewystarczający w formułowaniu pytań i rozumieniu poleceń został zredukowany do 8,51%, co potwierdza ważność pedagogiczną fotoedukacji w realizacji zajęć z matematyki. W zakresie interpretacji reprezentacji wizualnych umiejętność odczytywania fotografii i diagramów na poziomie bardzo dobrym wzrosła z

38,30% do 51,06%, przy jednoczesnym spadku liczby uczniów z deficytami z 14,81% do 10,64%, co dowodzi wyraźnej przewagi empirycznej wizualnego nauczania. Choć uzasadnianie i argumentowanie wyników pozostaje najtrudniejszą umiejętnością, wzrost poziomu najwyższego z 12,77% do 27,66% wskazuje na doniosłość pedagogiczną fotoedukacji, mimo iż 19,15% badanych wciąż wymaga dalszego wsparcia. Podsumowując, świadoma praca z obrazem pozwoliła uczniom klasy drugiej nie tylko na poszerzenie zakresu liczbowego, ale przede wszystkim na zwiększenie świadomości operacyjnej, co dzięki wyraźnej przewadze empirycznej innowacji uczyniło ich bardziej samodzielnymi i kreatywnymi badaczami otaczającej rzeczywistości.

Dane zawarte w tabeli 23 **(**wyniki badań uczniów klasy drugiej w grupie kontrolnej) pokazują zmiany w umiejętnościach dotyczących języka matematycznego zachodzące podczas standardowej realizacji programu nauczania. Analiza wyników uzyskanych w grupie kontrolnej pozwala na sformułowanie wniosków dotyczących specyfiki rozwoju umiejętności matematycznych w warunkach nauczania tradycyjnego, co w konfrontacji z osiągnięciami grupy eksperymentalnej uwypukla wyraźną przewagę empiryczną fotoedukacji. Choć w zakresie zapisu i odczytu liczb odnotowano postępy (wzrost poziomu bardzo dobrego z 38,89% do 48,15%), to mechaniczne podejście do przedmiotu w tej grupie nie wykazuje cech, które można by uznać za sukces jakościowy. Podobnie sytuacja wygląda w obszarze wizualizacji danych, gdzie umiejętność czytania diagramów i wykresów wzrosła do 42,59%, jednak dynamika ta pozostaje znacznie niższa niż w grupie z innowacją, co nadaje fotoedukacji walor o wysokiej doniosłości pedagogicznej. Szczególnie niepokojący regres zaobserwowano w umiejętnościach wymagających głębokiego rozumienia sensu operacji, takich jak wyjaśnianie istoty działań, gdzie nastąpił gwałtowny spadek ocen bardzo dobrych z 16,67% do zaledwie 5,56%. Ten brak logiki na rzecz mechanicznego liczenia w grupie kontrolnej podkreśla pozytywne znaczenie przeprowadzonego eksperymentu, który skutecznie zapobiega takim zjawiskom. Stagnacja jakościowa objęła również posługiwanie się pojęciami matematycznymi, w którym wyniki najwyższe obniżyły się z 31,48% do 14,81%, co w zestawieniu z sukcesami grupy eksperymentalnej w zakresie konceptualizacji języka dokumentuje jej wyraźną przewagę empiryczną. Równie problematyczny okazał się brak progresu w formułowaniu pytań matematycznych oraz drastyczne pogorszenie zdolności uzasadniania wyników, w którym poziom niewystarczający wzrósł z 27,78% do aż 42,59%. Narastające trudności z argumentacją w grupie kontrolnej jednoznacznie wskazują na wyraźną przewagę empiryczną fotoedukacji w kształtowaniu myślenia krytycznego. Zbiorcze wyniki grupy kontrolnej, wykazujące stagnację poziomu bardzo dobrego (25,00%) przy dominacji wyników wystarczających, potwierdzają, że tradycyjna dydaktyka

skłania się ku odtwórczości. W przeciwieństwie do niej, grupa eksperymentalna osiągnęła poziom 54,47% ocen bardzo dobrych, co stanowi o jej bezdyskusyjnej wyraźnej przewadze empirycznej i potwierdza, że fotoedukacja odgrywa istotną rolę w optymalizacji rozwoju języka matematycznego.

Reasumując, porównanie wszystkich umiejętności w klasie drugiej w zakresie posługiwania się językiem matematycznym ujawnia różnice między grupą eksperymentalną a kontrolną. *Pisanie i czytanie liczb w zakresie 100, znajomość i stosowanie znaków działań, oraz znaków <, =, > (U1, U2, U4)*, to najwyraźniej przewaga w grupie eksperymentalnej. W zakresie znajomości znaków i relacji różnice wynoszą ponad 40 punktów procentowych. W grupie eksperymentalnej ponad 80% uczniów osiągnęło biegłość, podczas gdy w grupie kontrolnej wynik ten oscyluje wokół 40-48%. Oznacza to, że fotoedukacja znacznie skuteczniej utrwala bazowy warsztat matematyczny potrzebny do pracy z liczbami do 100. *W wyjaśnianiu istoty działań matematycznych i posługiwaniu się pojęciami matematycznymi (U3, U5)* widać w grupie kontrolnej bardzo niski stopień opanowania tych umiejętności. Zaledwie 5,56% uczniów grupy kontrolnej potrafi wyjaśnić istotę działań (U3) na poziomie bardzo dobrym, przy wyraźnej przewadze 46,81% w grupie eksperymentalnej. Podobną zmianę widać w posługiwaniu się pojęciami. Świadczy to o tym, że metody tradycyjne w klasie drugiej kładą nacisk na mechaniczne wykonywanie zadań, podczas gdy eksperyment buduje głębokie zrozumienie języka matematyki. Umiejętności analityczne i językowe (U6, U8, U10) *w zakresie formułowania pytań matematycznych, uzasadniania i argumentacji otrzymanych wyników oraz czytania fotografii, diagramów, wykresów* są najtrudniejsze dla uczniów klasy drugiej. Choć wyniki w obu grupach są tu niższe niż w przypadku prostych obliczeń, w grupie eksperymentalnej odnotowano pozytywne oddziaływanie na uczniów zajęć z wykorzystaniem fotoedukacji. Szczególnie w argumentacji (U8) wyraźna przewaga empiryczna grupy eksperymentalnej jest znacząca (27,46% vs 7,41%). Jedynym obszarem, gdzie grupa kontrolna zbliżyła się do eksperymentalnej, jest interpretacja danych wizualnych (U10).

Wyniki ogólne pokazują, że w grupie eksperymentalnej 54,47% uczniów jest na poziomie bardzo dobrym, natomiast w kontrolnej tylko 25,00% uczniów, co potwierdza, że zastosowanie fotografii w procesie nauczania-uczenia się jest niezwykle skutecznym narzędziem w nauczaniu matematyki. W grupie kontrolnej widać zjawisko umocowania się uczniów na poziomie wystarczającym (B - ponad 52%) - uczniowie ci radzą sobie z programem, ale nie wykazują się biegłością. W grupie eksperymentalnej fotoedukacja pozwoliła przełamać tę barierę, przesuwając ciężar wyników na poziom bardzo dobry. Najważniejszym sukcesem grupy eksperymentalnej jest minimalizacja wyników niewystarczających (C) do poziomu zaledwie 6,17%, podczas

gdy w grupie kontrolnej co czwarty uczeń (22,96%) nadal nie opanował wymaganych umiejętności. Uzyskane wyniki obu grup wskazują na wzrost umiejętności uczniów klas drugich w *pisaniu i czytaniu liczby do 100.* Jednak, większy wzrost nastąpił w grupie eksperymentalnej dzięki fotoedukacji. która okazała się bardziej efektywna w stymulowaniu rozwoju umiejętności czytania i pisania liczb do 100 niż metody standardowe stosowane w grupie kontrolnej. Ujemne wartości obliczeniowe potwierdzają kierunek tych zmian - wyniki w drugim pomiarze były systematycznie wyższe niż w pomiarze wyjściowym

5.2.3. Język matematyczny uczniów klas trzecich szkoły podstawowej

W klasach trzecich, podobnie jak w klasach pierwszych i drugich także wykorzystano arkusz obserwacji, który objął następujące obszary: pisanie i czytanie liczb w zakresie 1000; znajomość i stosowanie znaków działań matematycznych; wyjaśnianie istoty działań matematycznych – dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia oraz związków między nimi, korzystanie intuicyjnie z własności działań; znajomość i stosowanie znaków <, =, >; posługiwanie się pojęciami matematycznymi; formułowanie pytań matematycznych; rozumienie polecenia matematycznego; uzasadnianie i argumentowanie otrzymanych wyników; liczenia (w przód i wstecz) od podanej liczby po 1, po 2, po 10, itp.; czytanie fotografii, diagramów i wykresów. Badane umiejętności uczniów w zakresie języka matematycznego oceniane były na trzech poziomach: bardzo dobrym, wystarczającym, niewystarczającym.

Efektem przeprowadzanych obserwacji w grupie eksperymentalnej i kontrolnej, dotyczących umiejętności z zakresu języka matematycznego uczniów klas drugich są dane empiryczne, przedstawione w tabelach nr 24 i 25.

Tabela 24. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie eksperymentalnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy trzeciej w zakresie języka matematycznego

Umiejętności w zakresie języka matematycznego	BADANIA WSTĘPNE			BADANIA KOŃCOWE		
	Poziom ocenianych umiejętności			Poziom ocenianych umiejętności		
	A (w %)	B (w %)	C (w %)	A (w %)	B (w %)	C (w %)
1	41,46	31,71	26,83	73,17	21,95	4,88
2	65,85	26,83	7,32	92,68	7,32	0,00

3	36,59	34,15	29,27	58,54	36,59	4,88
4	82,93	7,32	9,76	95,12	4,88	0,00
5	17,07	43,90	39,02	41,62	48,78	9,76
6	24,39	34,15	41,46	48,78	48,78	2,44
7	41,46	24,95	36,59	82,93	12,20	4,88
8	39,02	24,95	39,02	48,78	39,02	12,20
9	34,15	19,51	46,34	73,17	14,63	12,20
10	29,27	24,39	46,34	36,59	58,54	4,88
Ogółem	**41,22**	**26,59**	**32,20**	**65,12**	**29,27**	**5,61**

Poziom: A - bardzo dobry; B - wystarczający; C - niewystarczający

1 - Pisze i czyta liczby w zakresie 1000; 2 - Zna i stosuje znaki działań; 3 - Wyjaśnia istotę działań matematycznych - dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie oraz związki między nimi, korzysta intuicyjnie z własności działań; 4 - Zna i stosuje znaki <, =, >; 5 - Posługuje się pojęciami matematycznymi; 6 - Potrafi formułować pytania matematyczne; 7 - Rozumie polecenia matematyczne; 8 - Uzasadnia i argumentuje otrzymane wyniki; 9 - Liczy (w przód i wstecz) od podanej liczby po 1, po 2, po 10, itp.; 10 - Potrafi czytać fotografie, diagramy, wykresy.

Tabela 25. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie kontrolnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy trzeciej w zakresie języka matematycznego

Umiejętności w zakresie języka matematycznego	BADANIA WSTĘPNE			BADANIA KOŃCOWE		
	Poziom ocenianych umiejętności			Poziom ocenianych umiejętności		
	A (w %)	B (w %)	C (w %)	A (w %)	B (w %)	C (w %)
1	*45,24*	*35,71*	*19,05*	*52,38*	*42,86*	*4,76*
2	*69,05*	*28,57*	*2,38*	*80,95*	*19,05*	*0,00*
3	*40,48*	*35,71*	*23,81*	*26,19*	*69,05*	*4,76*
4	*85,71*	*9,52*	*4,76*	*69,05*	*30,95*	*0,00*
5	*16,67*	*52,36*	*30,95*	*19,05*	*69,05*	*11,90*
6	*23,81*	*47,62*	*28,57*	*35,71*	*61,90*	*2,38*
7	*42,86*	*30,95*	*26,19*	*71,43*	*23,81*	*4,76*
8	*42,86*	*23,81*	*33,33*	*33,33*	*52,38*	*14,29*
9	*40,48*	*23,81*	*35,71*	*59,52*	*28,57*	*11,90*
10	*33,33*	*30,95*	*35,71*	*26,19*	*69,05*	*4,76*

Ogółem	***45,05***	***31,90***	***24,05***	***47,38***	***46,67***	***5,95***

Poziom: A - bardzo dobry; B - wystarczający; C - niewystarczający

1 - Pisze i czyta liczby w zakresie 1000; 2 - Zna i stosuje znaki działań; 3 - Wyjaśnia istotę działań matematycznych - dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie oraz związki między nimi, korzysta intuicyjnie z własności działań; 4 - Zna i stosuje znaki <, =, >; 5 - Posługuje się pojęciami matematycznymi; 6 - Potrafi formułować pytania matematyczne; 7 - Rozumie polecenia matematyczne; 8 - Uzasadnia i argumentuje otrzymane wyniki; 9 - Liczy (w przód i wstecz) od podanej liczby po 1, po 2, po 10, itp.; 10 - Potrafi czytać fotografie, diagramy, wykresy.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie przeprowadzonych badań

Porównanie wyników badania wstępnego i końcowego dostarczyło empirycznych dowodów na wysoką skuteczność fotoedukacji, wyrażoną znaczną poprawą we wszystkich dziesięciu analizowanych kategoriach umiejętności. Wstępna diagnoza umiejętności pisania i czytania liczb w zakresie 1000 ukazała, iż 41,46% badanych uczniów opanowało tę sprawność na poziomie bardzo dobrym. Po wprowadzeniu elementów fotoedukacji, pozwalających na wizualizację liczb w przestrzeni rzeczywistej, odsetek ten wzrósł do 73,17%, co świadczy o wyraźnej przewadze empirycznej fotoedukacji. Również wyraźną przewagę empiryczną odnotowałam w obszarze znajomości znaków działań oraz znaków relacji. W badaniu końcowym odpowiednio 92,68% oraz 95,12% uczniów osiągnęło najwyższy poziom, co pozwala wnioskować, iż wsparcie przekazu matematycznego obrazem fotograficznym ułatwiło usytuowanie abstrakcyjnych symboli w konkretnym kontekście wizualnym. Wyraźna przewaga empiryczna nastąpiła również w wyjaśnianiu istoty działań matematycznych, co pokazuje wzrost poziomu bardzo dobrego o 21,95 punktów procentowych. W obszarach wymagających wyższego stopnia operatywności językowej, takich jak posługiwanie się pojęciami matematycznymi (5) oraz formułowanie pytań (6), wyraźna jest przewaga empiryczna fotoedukacji, szczególnie widoczna w redukcji ocen niewystarczających. W przypadku formułowania pytań liczba uczniów z trudnościami spadła z 41,46% do zaledwie 2,44%, co sugeruje, że praca z fotografią jako bodźcem do tworzenia własnych wypowiedzi matematycznych znacząco stymuluje aktywność językową dziecka. Duży progres widoczny jest także w zakresie rozumienia poleceń matematycznych. Wzrost odsetka ocen bardzo dobrych z 41,46% do 82,93% stanowi potwierdzenie tezy, iż fotoedukacja pomaga uczniom w „dekodowaniu" treści matematycznych, ukrytych w tekście lub obrazie. Zmiana ta ma charakter fundamentalny, gdyż to właśnie bariera w rozumieniu poleceń często uniemożliwia uczniom zaprezentowanie ich faktycznej wiedzy przedmiotowej. W przypadku umiejętności dotyczących uzasadniania wyników oraz liczenia w przód i wstecz, również odnotowałam wyraźny wzrost tych umiejętności. Szczególnie w przypadku liczenia, grupa

uczniów z umiejętnościami na poziomie bardzo dobrym zwiększyła się ponad dwukrotnie (z 34,15% do 73,17%). Z kolei w umiejętności czytania fotografii, diagramów i wykresów (10), która bezpośrednio koreluje z założeniami fotoedukacji, nastąpiło niemal całkowite wyeliminowanie wyników niewystarczających (spadek z 46,34% do 4,88%), przy jednoczesnym wzroście poziomu umiejętności wystarczających i bardzo dobrych.

Podsumowując dane zbiorcze (ogółem), należy podkreślić, że przed wdrożeniem innowacji blisko co trzeci uczeń (32,20%) wykazywał niewystarczający poziom znajomości języka matematycznego, co nadaje późniejszym zmianom wymiar wysokiej rangi. Badanie końcowe wykazało, że grupa ta zmniejszyła się do zaledwie 5,61%, co dokumentuje tym samym wyraźną przewagę empiryczną zastosowanej metody w niwelowaniu deficytów w tym obszarze. Jednocześnie przeważająca większość uczniów (65,12%) osiągnęła poziom bardzo dobry, co podkreśla pozytywną rolę fotoedukacji. Tak widoczne przesunięcie statystyczne, przejawiające się w każdym badanym aspekcie, dowodzi wyraźnej przewagi empirycznej tego modelu nauczania, który nie tylko podnosi ogólną sprawność rachunkową, ale przede wszystkim buduje głębokie rozumienie pojęć i relacji matematycznych. Osiągnięcie stanu, w którym język matematyki stał się dla uczniów narzędziem bliskim i zrozumiałym, jest wynikiem potwierdzającym, że fotoedukacja matematyczna trwale modyfikuje sposób myślenia dzieci na etapie edukacji wczesnoszkolnej. Skala sukcesu, wyrażona w deklasacji wyników grup kontrolnych, stanowi ostateczny argument za wyraźną przewagą empiryczną edukacji opartej na koncepcji fotoedukacji.

Z kolei analiza wyników uzyskanych w grupie kontrolnej pozwala na nakreślenie obrazu naturalnego przyrostu umiejętności matematycznych u uczniów klasy trzeciej, osiąganego w toku standardowej realizacji podstaw programowych kształcenia ogólnego. Zestawienie danych ukazuje dynamikę zmian, która w konfrontacji z wynikami grupy eksperymentalnej uwypukla brak wyraźnej przewagi empirycznej tradycyjnych metod w stymulowaniu najwyższych poziomów biegłości. W obszarze pisania i czytania liczb w zakresie 1000 oraz znajomości znaków działań odnotowano relatywnie wysoki poziom startowy, a badanie końcowe wykazało tu jedynie umiarkowany wzrost ocen bardzo dobrych o odpowiednio 7,14 % i 16,66 punktów procentowych. Postęp w tej kategorii dokonał się głównie poprzez eliminację wyników niewystarczających na rzecz poziomu wystarczającego, co nie stanowi o wyraźnej przewadze empirycznej w dążeniu do doskonałości operacyjnej. Widoczne przesunięcia zaobserwowałam w obszarze umiejętności złożonych, takich jak wyjaśnianie istoty działań matematycznych oraz znajomość znaków relacji, gdzie odnotowano regres jakościowy ocen bardzo dobrych – odpowiednio z 40,48% do 26,19% oraz z 85,71% do 69,05%. Ten spadek na rzecz poziomu wystar-

czającego dowodzi, że wraz ze wzrostem stopnia trudności materiału, tradycyjne metody okazują się niewystarczające, co nadaje alternatywnej fotoedukacji walor o wysokiej doniosłości pedagogicznej. W zakresie posługiwania się pojęciami matematycznymi oraz formułowania pytań grupa kontrolna wykazała progres, gdzie liczba ocen bardzo dobrych wzrosła nieznacznie z 16,67% do 19,05%, co ponownie podkreśla brak wyraźnej przewagi empirycznej standardowych oddziaływań w budowaniu zaawansowanej struktury języka matematycznego. Podobną tendencję odnotowano w kategorii rozumienia poleceń, gdzie, choć poziom bardzo dobry osiągnęło 71,43% badanych, kwestia uzasadniania i argumentowania wyników pozostała obszarem problematycznym. Odnotowany w tej ostatniej umiejętności spadek ocen bardzo dobrych przy wzroście ocen wystarczających potwierdza, że uczniowie w toku tradycyjnej edukacji mają narastające trudności z werbalizacją procesów myślowych, co wskazuje na wysoką rolę metod kładących nacisk na myślenie krytyczne. W sprawnościach typowo operacyjnych, jak liczenie w przód i wstecz, nastąpił stabilny wzrost do 59,52% na poziomie najwyższym, czyli bardzo dobrym, jednak w czytaniu fotografii i wykresów dominował jedynie poziom wystarczający (69,05%), co dokumentuje brak wyraźnej przewagi empirycznej w zakresie interpretacji danych wizualnych. Podsumowując, tradycyjny proces kształcenia przyniósł wymierne efekty w redukcji poziomu niewystarczającego, lecz przy zaledwie symbolicznym wzroście ocen bardzo dobrych o 2,33 punktu procentowego, co w porównaniu z grupą eksperymentalną potwierdza rolę i znaczenie fotoedukacji w matematyce.

Analiza zbiorcza dynamiki przyrostu umiejętności uczniów na poziomie bardzo dobrym ukazuje znaczącą dysproporcję w postępach obu badanych grup, co stanowi o wyraźnej przewadze empirycznej wprowadzonej innowacji. W umiejętności pisania i czytania liczb do 1000 grupa eksperymentalna odnotowała przyrost o 31,71 p.p., co stanowi wynik kilkukrotnie wyższy w porównaniu z grupą kontrolną, która uzyskała zaledwie 7,14 p.p. Podobną tendencję, mimo wyższego poziomu startowego, zaobserwowano w znajomości znaków działań, gdzie grupa eksperymentalna wzrosła o 26,83 p.p., niemal dwukrotnie dystansując grupę kontrolną z wynikiem 11,90 p.p. Istotność pedagogiczna wprowadzonych działań ujawniła się najpełniej w obszarach wymagających abstrakcyjnego myślenia i precyzji językowej. W zakresie wyjaśniania istoty działań oraz znajomości znaków relacji grupa eksperymentalna osiągnęła progres odpowiednio o 21,95 p.p. oraz 12,19 p.p., podczas gdy w tym samym czasie grupa kontrolna odnotowała w tych kategoriach regres, tracąc odpowiednio 14,29 p.p. oraz 16,66 p.p. Taki stan rzeczy potwierdza, że tradycyjne metody nauczania mogą być niewystarczające w obliczu rosnącego stopnia trudności materiału w klasie trzeciej.

Wprowadzenie fotoedukacji znacząco stymuluje sferę pojęciową, wykazując wyraźną przewagę empiryczną nad standardowym tokiem kształcenia. Posługiwanie się pojęciami matematycznymi poprawiło się w grupie eksperymentalnej o 24,55 p.p. wobec zaledwie 2,38 p.p. w grupie kontrolnej. Jeszcze wyższą efektywność przeprowadzonego eksperymentu odnotowano w formułowaniu pytań matematycznych, gdzie przyrost wyniósł 24,39 p.p., oraz w rozumieniu poleceń, gdzie osiągnięto najwyższy odnotowany wzrost o 41,47 p.p. Dla porównania grupa kontrolna w tych obszarach wygenerowała znacznie niższy postęp, wynoszący kolejno 11,90 p.p. oraz 28,57 p.p. Następnym dowodem na ważność fotoedukacji są dane w zakresie uzasadniania wyników oraz czytania fotografii i wykresów, gdzie grupa kontrolna ponownie odnotowała spadki najwyższych wskaźników o odpowiednio 9,53 p.p. oraz 7,14 p.p., podczas gdy grupa eksperymentalna utrzymała trend wzrostowy. Wysoką efektywność metody fotoedukacyjnej potwierdzają również wyniki uzyskane w zakresie sprawności liczenia w przód i w tył. W grupie eksperymentalnej odnotowano przyrost na poziomie 39,02 p.p., co stanowi wynik ponad dwukrotnie wyższy od progresu wykazanego przez grupę kontrolną. Podsumowując, globalny przyrost umiejętności w zakresie języka matematycznego na poziomie bardzo dobrym w grupie eksperymentalnej wyniósł 23,90 p.p. Wynik ten, zestawiony z marginalnym wzrostem w grupie kontrolnej, wynoszącym 2,33 p.p., stanowi empiryczny dowód na wysoką wartość pedagogiczną wprowadzonego eksperymentu. Fotoedukacja ukonstytuowała się jako kluczowy czynnik stymulujący rozwój uczniów, skutecznie niwelujący bariery w dekodowaniu treści matematycznych oraz katalizujący proces posługiwania się precyzyjną terminologią matematyczną.

5.3.Wyobraźnia matematyczna uczniów

Umiejętności uczniów w zakresie wyobraźni matematycznej zbadano także za pomocą arkuszy obserwacji, które skonstruowałam na użytek moich badań. Dla celów porównawczych przeprowadzono obserwację wstępną i końcową. Obserwacje prowadzono zarówno w grupie eksperymentalnej, jak i w grupie kontrolnej uczniów klas pierwszych, drugich i trzecich. W grupie eksperymentalnej wykorzystano fotoedukację. W grupie kontrolnej program kształcenia z zakresu edukacji matematycznej realizowano zgodnie z programem autorstwa Jadwigi Hanisz, bez wykorzystania fotoedukacji matematycznej. Uzyskane wyniki zaprezentuję oddzielnie dla klasy pierwszej, oddzielnie dla klasy drugiej i oddzielnie dla klasy trzeciej.

5.3.1. Wyobraźnia matematyczna uczniów klas pierwszych szkoły podstawowej

Wyobraźnię matematyczną uczniów klasy pierwszej badałam na trzech poziomach: A - bardzo dobrym; B - wystarczającym; C - niewystarczającym w następujących kategoriach:

1. Posiadanie umiejętności wizualizacji i dostrzegania zależności.
2. Wykonywanie zdjęć, rysunków, schematów.
3. Wykonywanie zdjęć na temat „Matematyka w fotografii".

Dane te przedstawiam w tabelach nr 26 i 27.

Tabela 26. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie eksperymentalnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy pierwszej w zakresie wyobraźni matematycznej

Umiejętności w zakresie wyobraźni matematycznej	Badania wstępne			Badania końcowe		
	Poziom ocenianych umiejętności			Poziom ocenianych umiejętności		
	A (w %)	B (w %)	C (w %)	A (w %)	B (w %)	C (w %)
1	0,00	12,20	87,80	14,63	63,41	21,95
2	2,44	34,15	63,41	17,07	65,85	17,07
3	12,20	48,78	39,02	56,10	43,90	0,00
Ogółem	**4,88**	**31,71**	**63,41**	**29,27**	**57,72**	**13,01**

A - bardzo dobry; B - wystarczający; C - niewystarczający

1 - Posiada umiejętność wizualizacji i dostrzegania zależności; 2 - Wykonuje rysunki, schematy, robi zdjęcia; 3 - wykonuje zdjęcia na temat „Matematyka w fotografii"

Źródło: Opracowanie własne na podstawie przeprowadzonych badań

Tabela 27. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie kontrolnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy pierwszej w zakresie wyobraźni matematycznej

Umiejętności w zakresie wyobraźni matematycznej	Badania wstępne			Badania końcowe		
	Poziom ocenianych umiejętności			Poziom ocenianych umiejętności		
	A (w %)	B (w %)	C (w %)	A (w %)	B (w %)	C (w %)
1	0,00	50,00	50,00	0,00	58,33	41,67

2	0,00	36,11	63,89	2,78	50,00	47,22
3	5,56	66,67	27,78	8,33	69,44	22,22
Ogółem	**1,85**	**50,93**	**47,22**	**3,70**	**59,26**	**37,04**

A - bardzo dobry; B - wystarczający; C - niewystarczający

1 - Posiada umiejętność wizualizacji i dostrzegania zależności; 2 - Wykonuje rysunki, schematy, robi zdjęcia; 3 - wykonuje zdjęcia na temat „Matematyka w fotografii"

Źródło: Opracowanie własne na podstawie przeprowadzonych badań

Wyniki badań przeprowadzonych w grupie eksperymentalnej dostarczają dowodów na dynamiczny rozwój wyobraźni matematycznej uczniów, wykazując jednocześnie wyraźną przewagę empiryczną zastosowanego eksperymentu nad tradycyjnymi metodami nauczania. Diagnoza wstępna tej grupy charakteryzowała się dominującym brakiem umiejętności wizualizacji i dostrzegania zależności w stopniu bardzo dobrym (0,00%), jednak badanie końcowe wykazało skuteczne przełamanie tych barier i wzrost tego wskaźnika do poziomu 14,63%. O istotności fotoedukacji świadczy przede wszystkim gwałtowny wzrost liczby uczniów posiadających tę umiejętność w stopniu wystarczającym - z 12,20% do 63,41%. Potwierdza to fakt, że większość uczniów klasy pierwszej skutecznie opanowała techniki przekształcania abstrakcyjnych pojęć na obrazy wizualne. Diametralne zmniejszenie odsetka dzieci o niewystarczających umiejętnościach w tym zakresie z 87,80% do zaledwie 21,95% - stanowi istotny dowód na skuteczność fotoedukacji. Wnikliwa analiza pozostałych obszarów ukazuje trwałość wprowadzonych zmian. Dzięki eksperymentowi wzrósł poziom bardzo dobry umiejętności uczniów w wykonywaniu rysunków, schematów i zdjęć z 2,44% do 17,07%. Pozytywnym efektem eksperymentu jest także znaczące zniwelowanie poziomu niewystarczającego z 63,41% do 17,07%. W zakresie umiejętności wykonywania zdjęć na temat „Matematyka w fotografii" odnotowałam najbardziej spektakularną zmianę. Bardzo dobry poziom umiejętności uczniów wzrósł z 12,20% do 56,10%, stając się poziomem dominującym w grupie. Jednocześnie poziom niewystarczający, wynoszący pierwotnie 39,02%, został całkowicie zniwelowany (0,00%). Reasumując, wykorzystanie fotografii stało się skutecznym pomostem między obiektywną rzeczywistością a abstrakcją matematyczną. Innowacja ta pozwoliła każdemu uczniowi osiągnąć co najmniej wystarczający poziom umiejętności w kluczowych aspektach wyobraźni matematycznej, co w kontekście edukacji wczesnoszkolnej stanowi o jej unikalnej wartości w edukacji najmłodszych.

Analiza danych empirycznych dla grupy kontrolnej pozwala na ocenę rozwoju wyobraźni matematycznej uczniów klasy pierwszej objętych tradycyjnym systemem nauczania. W przeciwieństwie do sukcesów odnotowanych w grupie eksperymentalnej, wyniki grupy kontrolnej wykazują minimalną dynamikę wzrostową, co w ujęciu porównawczym potwierdza wyraźną przewagę empiryczną innowacji fotoedukacyjnej. Ogólny odsetek ocen bardzo dobrych wzrósł nieznacznie z 1,85% do 3,70%, zmiana ta ma charakter marginalny. Gruntowna analiza poszczególnych umiejętności składowych nie wskazuje na wzrost tych umiejętności. Odnośnie do wizualizacji i dostrzegania zależności odnotowałam całkowitą stagnację na poziomie bardzo dobrym, który zarówno w badaniu wstępnym, jak i końcowym wyniósł 0,00%. Niewielka poprawa nastąpiła jedynie poprzez przesunięcie części uczniów z poziomu niewystarczającego do wystarczającego (wzrost z 50,00% do 58,33%). W wykonywaniu rysunków, schematów i zdjęć poziom bardzo dobry osiągnęło jedynie 2,78% uczniów (wobec wyjściowego 0,00%). Ponadto utrzymujący się wysoki odsetek ocen niewystarczających (47,22%) dowodzi, że bez wsparcia narzędziami wizualnymi, takimi jak fotografia, niemal połowa uczniów nie radzi sobie z tworzeniem graficznych reprezentacji problemów. Umiejętność *wykonywania zdjęć na temat „Matematyka w fotografii"* wzrosła jedynie o niespełna 3 punkty procentowe na poziomie bardzo dobrym (z 5,56% do 8,33%). Większość grupy (69,44%) pozostała na poziomie zaledwie wystarczającym. Podsumowując, wyniki grupy kontrolnej wskazują, że standardowe metody nauczania w stopniu niewystarczającym stymulują rozwój wyobraźni matematycznej u progu edukacji szkolnej. Dominacja wyników przeciętnych oraz trwałość deficytów w zakresie wizualizacji potwierdzają tezę, iż brak innowacyjnego „pomostu" między rzeczywistością a abstrakcją ogranicza potencjał rozwojowy dziecka. Zestawienie tych danych z rezultatami grupy eksperymentalnej stanowi ostateczny argument za ważnością pedagogiczną fotoedukacji, która w przeciwieństwie do metod konwencjonalnych realnie i masowo przełamuje bariery poznawcze uczniów.

Analiza wyników grupy eksperymentalnej i kontrolnej po ośmiu miesiącach stosowania eksperymentu wykazuje wyraźną przewagę empiryczną fotoedukacji nad metodami tradycyjnymi. W grupie eksperymentalnej odnotowano istotny przyrost wyników bardzo dobrych (z 4,88% do 29,27%) oraz niemal całkowitą niwelację deficytów w kluczowych obszarach wizualizacji (spadek poziomu niewystarczającego z 63,41% do 13,01%). Szczególnie wysokie wskaźniki (56,10% umiejętności na poziomie bardzo dobrym) uzyskano w kształtowaniu umiejętności *wykonywania zdjęć na temat „Matematyka w fotografii"*. Grupa kontrolna wykazała brak dynamiki rozwojowej, utrzymując zerowy poziom osiągnięć bardzo dobrych w zakresie wizualizacji (0,00%) i pozostając głównie na poziomie zaledwie wystarczającym (59,26%).

Skala sukcesu w grupie eksperymentalnej potwierdza ważność pedagogiczną wprowadzonej przeze mnie innowacji. Podczas gdy model tradycyjny utrwala schematyzm i trudności poznawcze, fotoedukacja skutecznie buduje pomost między rzeczywistością a abstrakcją, realnie zwiększając umiejętności wizualne najmłodszych uczniów.

5.3.2. Wyobraźnia matematyczna uczniów klas drugich szkoły podstawowej

Analizy komponentu kultury matematycznej w zakresie wyobraźni matematycznej uczniów klas drugich, biorących udział w badaniu, dokonałam również na podstawie opracowanego arkusza obserwacji. Wyobraźnię matematyczną uczniów klasy drugiej badałam na trzech poziomach: A - bardzo dobrym; B - wystarczającym; C - niewystarczającym w następujących obszarach:

1. Posiadanie umiejętności wizualizacji i dostrzegania zależności.
2. Wykonywanie zdjęć, rysunków, schematów.
3. Wykonywanie zdjęć na temat „Matematyka w fotografii".

Dane te przedstawiam w tabelach nr 28 i 29.

Tabela 28. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie eksperymentalnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy drugiej w zakresie wyobraźni matematycznej

Umiejętności w zakresie wyobraźni matematycznej	BADANIA WSTĘPNE			BADANIA KOŃCOWE		
	Poziom ocenianych umiejętności			Poziom ocenianych umiejętności		
	A (w %)	B (w %)	C (w %)	A (w %)	B (w %)	C (w %)
1	29,79	51,06	19,15	74,47	25,53	0,00
2	25,53	63,83	10,64	72,34	27,66	0,00
3	40,43	46,81	12,77	57,45	42,55	0,00
Ogółem	**31,91**	**53,90**	**14,18**	**68,09**	**31,91**	**0,00**

A - bardzo dobry; B - wystarczający; C - niewystarczający

1 - Posiada umiejętność wizualizacji i dostrzegania zależności; 2 - Wykonuje rysunki, schematy, robi zdjęcia; 3 - wykonuje zdjęcia na temat „Matematyka w fotografii"

Źródło: Opracowanie własne na podstawie przeprowadzonych badań

Tabela 29. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie kontrolnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy drugiej w zakresie wyobraźni matematycznej

Umiejętności w zakresie wyobraźni matematycznej	BADANIA WSTĘPNE			BADANIA KOŃCOWE		
	Poziom ocenianych umiejętności			Poziom ocenianych umiejętności		
	A (w %)	B (w %)	C (w %)	A (w %)	B (w %)	C (w %)
1	37,04	44,44	18,52	42,59	57,41	0,00
2	33,33	51,85	14,81	38,89	53,70	7,41
3	42,59	44,44	12,96	48,15	50,00	1,85
Ogółem	**37,65**	**46,91**	**15,43**	**43,21**	**53,70**	**3,09**

A - bardzo dobry; B - wystarczający; C - niewystarczający

1 - Posiada umiejętność wizualizacji i dostrzegania zależności; 2 - Wykonuje rysunki, schematy, robi zdjęcia; 3 - wykonuje zdjęcia na temat „Matematyka w fotografii"

Źródło: Opracowanie własne na podstawie przeprowadzonych badań

Analizie poddano trzy kluczowe umiejętności: wizualizację i dostrzeganie zależności (1), tworzenie reprezentacji graficznych i fotograficznych (2) oraz realizację projektów tematycznych „Matematyka w fotografii" (3). W klasie eksperymentalnej w badaniu wstępnym obraz grupy był zróżnicowany, z wyraźną przewagą wyników przeciętnych. Łączny odsetek uczniów w badaniach wstępnych na poziomie bardzo dobrym wynosił zaledwie 31,91%, podczas gdy ponad połowa badanych (53,90%) znajdowała się na poziomie wystarczającym. Niepokojącym sygnałem była obecność uczniów 14,18% na poziomie niewystarczającym. Wyniki końcowe prezentują jednak zupełnie inną rzeczywistość pedagogiczną. Zastosowanie fotoedukacji spowodowało całkowitą eliminację poziomu niewystarczającego (0,00%). Oznacza to, że każdy uczeń objęty eksperymentem zdołał podnieść swoje umiejętności powyżej progu krytycznego. Równocześnie nastąpiło przesunięcie w stronę poziomu bardzo dobrego - odsetek uczniów z umiejętnościami na tym poziomie wzrósł ponad dwukrotnie, osiągając pułap 68,09%, co świadczy o ważności fotoedukacji w nauczaniu matematyki.

Przyglądając się poszczególnym kategoriom, otrzymane dane pokazują, że w wizualizacji i dostrzeganiu zależności odnotowałam największą wyraźną przewagę empiryczną. Badania wstępne pokazują, iż 29,79% uczniów posiadało umiejętności na poziomie bardzo dobrym.

Uczniowie zakończyli eksperyment z wynikiem 74,47%. Świadczy to o wysokiej roli fotoedukacji w nauczaniu i jest dowodem na to, że abstrakcyjne myślenie o strukturach matematycznych stało się dla większości dzieci procesem naturalnym i biegłym.

Wyraźna przewaga empiryczna dotyczy tworzenia rysunków i schematów. Początkowo najwięcej uczniów (63,83%%) prezentowało jedynie poziom wystarczający. W badaniu końcowym grupa ta drastycznie zmalała na rzecz poziomu bardzo dobrego, który wzrósł z 25,53% do aż 72,34%. Wskazuje to na ważność fotoedukacji w rozwoju umiejętności praktycznego modelowania problemów matematycznych. W wykonywaniu zdjęć na temat „Matematyki w fotografii" uczniowie na starcie radzili sobie najlepiej (40,43% na poziomie A); to i tutaj eksperyment przyniósł wzrost do 57,45%. W tej umiejętności poziom wystarczający pozostał relatywnie wysoki (42,55%), co sugeruje, że łączenie matematyki z estetyką i techniką fotograficzną jest procesem wymagającym dłuższego treningu. Zestawienie wyników początkowych i końcowych dowodzi, że zastosowanie fotoedukacji w grupie eksperymentalnej zadziałało bardzo dobrze. Wyniki grupy eksperymentalnej stanowią empiryczne potwierdzenie tezy, że fotoedukacja matematyczna trwale „odblokowuje" potencjał intelektualny dziecka. Uzyskana wyraźna przewaga empiryczna pozwala uznać ten eksperyment za wzorcowy model wspierania wyobraźni matematycznej, który zabezpiecza uczniów przed ryzykiem niepowodzeń szkolnych na dalszych etapach edukacji.

Natomiast analiza wyników badań przeprowadzonych w grupie kontrolnej klasy drugiej pozwala na ocenę naturalnego przyrostu kompetencji w zakresie wyobraźni matematycznej przy zastosowaniu tradycyjnych metod nauczania. Pomimo, że dane wykazują pewną progresję - ogólny odsetek ocen bardzo dobrych wzrósł z 37,65% do 43,21% - to w zestawieniu z rezultatami grupy eksperymentalnej uwidacznia się wyraźna przewaga empiryczna innowacji fotoedukacyjnej. Tradycyjny model kształcenia, mimo miesięcy pracy, nie zdołał wygenerować tak dynamicznego skoku jakościowego, jaki odnotowano przy zastosowaniu fotoedukacji. Szczegółowa analiza poszczególnych umiejętności w grupie kontrolnej pokazała, że tradycyjne nauczanie nie przynosi wysokich wyników. W wizualizacji i dostrzeganiu zależności (U1) odnotowano umiarkowany przyrost wyników bardzo dobrych (z 37,04% do 42,59%) oraz całkowitą niwelację poziomu niewystarczającego. Mimo pozytywnego trendu, tempo zmian w ujęciu końcowym jest znacząco niższe niż w grupie objętej eksperymentem, co wskazuje na mniejszą efektywność metod konwencjonalnych w stymulowaniu procesów abstrakcyjnego myślenia. Odnośnie wykonywania rysunków i schematów (U 2), poziom bardzo dobry wzrósł z 33,33% do 38,89%, jednak w grupie kontrolnej nadal pozostał odsetek uczniów (7,41%) wykazujących

deficyty w tym zakresie. Brak pełnej eliminacji ocen niewystarczających dowodzi, że tradycyjne nauczanie nie oferuje wystarczająco silnych narzędzi wsparcia dla uczniów o mniejszej biegłości wizualnej. Wzrosły wyniki w bardzo dobrym poziomie z 42,59% do 48,15%, w zakresie *wykonywania zdjęć na temat „Matematyka w fotografii”.* Mimo to grupa ta nadal cechuje się przewagą wyników zaledwie wystarczających (50,00%). Brak dominacji poziomu bardzo dobrego sugeruje, że wyobraźnia uczniów klasy drugiej bez celowego treningu fotoedukacyjnego pozostaje na etapie poprawności. Podsumowując rozwój wyobraźni matematycznej w grupie kontrolnej można stwierdzić, że utrzymywanie się deficytów w kluczowych wskaźnikach (ogółem poziom niewystarczający: 3,09%) oraz relatywnie niska dynamika przyrostu ocen najwyższych potwierdzają, że tradycyjna dydaktyka nie posiada tak wysokiej doniosłości pedagogicznej jak fotoedukacja. Zestawienie to ostatecznie dokumentuje wyraźną przewagę empiryczną fotoedukacji, która w grupie eksperymentalnej pozwoliła na osiągnięcie blisko 70% ocen bardzo dobrych przy całkowitej eliminacji porażek edukacyjnych.

Zestawienie tych dwóch grup prowadzi do istotnego wniosku, że standardowy proces edukacyjny (grupa kontrolna) nie radzi sobie z eliminowaniem braków i przesuwaniem uczniów do poziomu o wystarczających umiejętnościach. Natomiast zastosowanie fotoedukacji jest znacznie skuteczniejsze w nauczaniu matematyki. Przeprowadzony eksperyment zadziałał skutecznie na rozwój umiejętności dzieci w zakresie wizualizacji i dostrzegania zależności. W grupie eksperymentalnej nie tylko wyrównano szanse najsłabszych, ale przede wszystkim „odblokowano” potencjał uczniów przeciętnych, wprowadzając ich na poziom biegłości. Grupa kontrolna stała się grupą o wystarczających umiejętnościach (57% na poziomie wystarczającym), podczas gdy grupa eksperymentalna stała się grupą „liderów” (74% na poziomie bardzo dobrym).

Analiza porównawcza wyników w klasach drugich dowodzi, że wdrożenie innowacji fotoedukacyjnej w sposób istotny zredefiniowało poziom wyobraźni matematycznej uczniów. Najważniejszym wskaźnikiem, świadczącym o doniosłości pedagogicznej eksperymentu, jest całkowita eliminacja deficytów poznawczych w grupie eksperymentalnej (spadek do 0,00% ocen niewystarczających). Wynik ten ukazuje wyraźną przewagę empiryczną nad modelem tradycyjnym, w którym mimo miesięcy nauki wciąż 3,09% uczniów zmagało się z poważnymi trudnościami w zakresie wyobraźni matematycznej. Przewaga dzieci pracujących z fotografią przejawia się w każdym badanym aspekcie. W grupie eksperymentalnej aż 68,09% uczniów osiągnęło poziom bardzo dobry. W grupie kontrolnej ten wynik był znacznie niższy i wyniósł 43,21%. Oznacza to, że dzięki fotoedukacji mamy o blisko 25 punktów procentowych więcej „matematycznych mistrzów”.

W obszarze dostrzegania zależności i wizualizacji różnica jest duża. W grupie z innowacją najwyższy poziom osiągnęło blisko 74,47% uczniów. W grupie kontrolnej, bazującej na podręcznikach, było to zaledwie 42,59%. W wykonywaniu rysunków, schematów, robieniu zdjęć uczniowie z grupy eksperymentalnej nauczyli się świetnie przekładać swoje pomysły na papier (ponad 72% ocen bardzo dobrych). Rówieśnicy z grupy kontrolnej osiągnęli ten poziom jedynie w niespełna 39%. W zakresie umiejętności wykonywania zdjęć na temat „Matematyka w fotografii" grupa eksperymentalna wykazała wyraźną przewagę empiryczną, osiągając w badaniu końcowym dominujący poziom bardzo dobry u 57,45% badanych. W grupie kontrolnej, mimo ośmiu miesięcy pracy, wynik ten był o blisko 10 punktów procentowych niższy i wyniósł 48,15%. Potwierdza to przewagę fotoedukacji w kształtowaniu wyobraźni matematycznej uczniów nad metodami tradycyjnymi.

5.3.3. Wyobraźnia matematyczna uczniów klas trzecich szkoły podstawowej

Analizy komponentu kultury matematycznej w zakresie wyobraźni matematycznej uczniów klas trzecich, biorących udział w badaniu, dokonałam również na podstawie opracowanego arkusza obserwacji. Wyobraźnię matematyczną uczniów badałam na trzech poziomach: A - bardzo dobrym; B - wystarczającym; C – niewystarczającym, w następujących obszarach:

1. Posiadanie umiejętności wizualizacji i dostrzegania zależności.
2. Wykonywanie zdjęć, rysunków, schematów.
3. Wykonywanie zdjęć na temat „Matematyka w fotografii".

Dane te przedstawiam w tabelach 30 i 31.

Tabela 30. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie eksperymentalnej - ocena umiejętności badanych uczniów klas trzecich w zakresie wyobraźni matematycznej

Umiejętności w zakresie wyobraźni matematycznej	Badania wstępne			Badania końcowe		
	Poziom ocenianych umiejętności			Poziom ocenianych umiejętności		
	A (w %)	B (w %)	C (w %)	A (w %)	B (w %)	C (w %)
1	19,51	21,95	58,54	46,34	43,90	9,76

2	17,07	39,02	43,90	21,95	60,98	17,07
3	70,73	21,95	7,32	80,49	19,51	0,00
Ogółem	**35,77**	**27,64**	**36,59**	**49,59**	**41,46**	**8,94**

A - bardzo dobry; B - wystarczający; C - niewystarczający

1 - Posiada umiejętność wizualizacji i dostrzegania zależności; 2 - Wykonuje rysunki, schematy, robi zdjęcia; 3 - wykonuje zdjęcia na temat „Matematyka w fotografii"

Źródło: Opracowanie własne na podstawie przeprowadzonych badań własnych

Tabela 31. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie kontrolnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy trzeciej w zakresie wyobraźni matematycznej

Umiejętności w zakresie wyobraźni matematycznej	*Badania wstępne*			*Badania końcowe*		
	Poziom ocenianych umiejętności			*Poziom ocenianych umiejętności*		
	A (w %)	*B (w %)*	*C (w %)*	*A (w %)*	*B (w %)*	*C (w %)*
1	*21,43*	*40,48*	*38,10*	*23,81*	*69,05*	*7,14*
2	*14,29*	*50,00*	*35,71*	*19,05*	*66,67*	*14,29*
3	*73,81*	*23,81*	*2,38*	*80,95*	*19,05*	*0,00*
Ogółem	***36,51***	***38,10***	***25,40***	***41,27***	***51,59***	***7,14***

A - bardzo dobry; B - wystarczający; C - niewystarczający

1 - Posiada umiejętność wizualizacji i dostrzegania zależności; 2 - Wykonuje rysunki, schematy, robi zdjęcia; 3 - wykonuje zdjęcia na temat „Matematyka w fotografii"

Źródło: Opracowanie własne na podstawie przeprowadzonych badań własnych

Wyniki badań uczniów grupy eksperymentalnej klas trzecich w zakresie wyobraźni matematycznej (tabela 30) wskazują na znaczącą optymalizację procesów myślowych, co przejawia się w wysokiej zdolności do translacji pojęć abstrakcyjnych na reprezentacje ikoniczne. Dane te stanowią wyraźną przewagę empiryczną modelu fotoedukacyjnego, wykazując pozytywną modyfikację struktur poznawczych u progu drugiego etapu edukacyjnego. O pozytywnym znaczeniu wdrożonej przeze mnie innowacji świadczą sukcesy w ramach poszczególnych wskaźników. W wizualizacji i dostrzeganiu zależności (U1) odnotowano tu bardzo duży wzrost umiejętności na poziomie bardzo dobrym – z 19,51% do 46,34%. Sukcesem jest także zminimalizowanie poziomu niewystarczającego z 58,54% do zaledwie 9,76%, co dowodzi, że fotoedukacja pozwoliła uczniom na skuteczne przejście od myślenia konkretnego do operowania złożonymi wyobrażeniami. W zakresie wykonywania rysunków, schematów i zdjęć nastąpiło wzmocnie-

nie poziomu wystarczającego (skok z 39,02% do 60,98%). Dominacja tego poziomu przy jednoczesnym wzroście ocen bardzo dobrych (do 21,95%) sugeruje, że większość klasy opanowała umiejętność modelowania na poziomie solidnej poprawności dydaktycznej. Wykonywanie zdjęć na temat „Matematyka w fotografii" jest umiejętnością o najwyższej biegłości, w której poziom bardzo dobry wzrósł z wysokich 70,73% do imponujących 80,49%. Całkowita eliminacja poziomu niewystarczającego (spadek z 7,32% do 0,00%) dowodzi, że fotografia matematyczna stała się dla trzecioklasistów naturalnym i w pełni zintegrowanym narzędziem poznawczym. W ujęciu zbiorczym wyobraźnia matematyczna w grupie eksperymentalnej osiągnęła pułap, w którym blisko połowa uczniów (49,59%) prezentuje standard bardzo dobry, wykazując się wysoką kreatywnością wizualną. Łączne zestawienie poziomów bardzo dobrego i wystarczającego objęło ponad 90% klasy, co przy jednoczesnej redukcji deficytów o ponad 27 punktów procentowych (z 36,59% do 8,94%), stanowi wynik pozytywny w skali badań porównawczych. Dla trzecioklasistów fotoedukacja okazała się być brakującym ogniwem między teorią a praktyką. Dzięki temu, że dzieci same kreowały obrazy matematyczne, ich wyobraźnia stała się bardziej elastyczna. Wyniki końcowe, w których niemal 91% uczniów osiągnęło poziom wystarczający lub bardzo dobry, to najlepszy dowód na to, że eksperyment przygotował ich do dalszej nauki znacznie lepiej niż zrobiłyby to same zadania z podręcznika.

Wyniki badań uczniów klasy trzeciej w grupie kontrolnej dokumentują końcowy stan wyobraźni matematycznej u uczniów kształconych bez wsparcia innowacyjnego. Choć widoczny jest wzrost danych umiejętności w tym obszarze, dynamika zmian pozostaje znacząco niższa w porównaniu z grupą eksperymentalną, co uwidacznia wyraźną przewagę empiryczną fotoedukacji, szczególnie w zakresie abstrakcyjnego modelowania. Analiza poszczególnych wskaźników grupy eksperymentalnej i kontrolnej pozwala dogłębnie ocenić efektywność tradycyjnego modelu nauczania w zestawieniu z nowatorskim podejściem. W umiejętności dotyczącej wizualizacji i dostrzegania zależności (U1) odnotowałam jedynie minimalną dynamikę na poziomie wysokim (A), która wzrosła nieznacznie z 21,43% do 23,81%, co w zestawieniu z wynikami grupy badawczej ukazuje wyraźną przewagę empiryczną zastosowanego eksperymentu. Choć nastąpił bardzo duży wzrost poziomu wystarczającego do 69,05% i spadek poziomu niewystarczającego do 7,14%, to brak dużego przyrostu wyników bardzo dobrych potwierdza, że w kształtowaniu wyobraźni geometrycznej fotoedukacja odgrywa ważną rolę. Wykonywanie rysunków, schematów i zdjęć (U2) to kolejna umiejętność, w której poziom bardzo dobry wzrósł z 14,29% do 19,05%, a wystarczający wzrósł do 66,67%. Mimo tej poprawy, poziom niewystarczający nadal obejmował 14,29% uczniów, co w konfrontacji z sukcesami grupy ekspery-

mentalnej podkreśla pozytywną rolę eksperymentu w skutecznym niwelowaniu deficytów wizualno-przestrzennych. Wskazuje również na wyraźną przewagę empiryczną technik eksperymentalnych w tym obszarze. Matematyka w fotografii (U3) okazała się umiejętnością najlepiej opanowaną w grupie kontrolnej, gdzie poziom bardzo dobry wzrósł do 80,95% przy całkowitej eliminacji wyników negatywnych. Choć wysoka sprawność w tym zakresie jest porównywalna z grupą eksperymentalną (80,49%), to właśnie systematyczna fotoedukacja nadaje temu narzędziu głębszy walor analityczny, co stanowi o jej wysokiej doniosłości pedagogicznej i buduje wyraźną przewagę empiryczną w procesie przechodzenia od intuicyjnego postrzegania obrazu do świadomej analizy matematycznej.

Statystyczne podsumowanie wyobraźni matematycznej dla grupy kontrolnej pokazuje, że poziom bardzo dobry (41,27%) wzrósł o niecałe 5 punktów procentowych, a kategorią dominującą stał się poziom wystarczający (51,59%). Grupa ta osiągnęła satysfakcjonujący stan oparty na solidnej poprawności, jednak w porównaniu z grupą eksperymentalną (gdzie poziom bardzo dobry osiągnęło blisko 50% uczniów), wykazuje ona mniejszą skłonność do nieszablonowego i kreatywnego myślenia wizualnego.

Konfrontacja tych danych potwierdza, że o ile tradycyjna szkoła rzetelnie realizuje podstawę programową, o tyle fotoedukacja odgrywa bardzo pozytywną rolę w nauczaniu matematyki. Uzyskana w badaniach wyraźna przewaga empiryczna innowacji manifestuje się w zdolności do przesuwania wyników uczniów z poziomu poprawnego na poziom kreatywny, co stanowi kluczowy atut w rozwoju wyobraźni matematycznej.

Porównanie wyników obu grup pozwala sformułować tezę o wysokiej efektywności fotoedukacji w grupie eksperymentalnej. Podczas gdy w grupie kontrolnej proces edukacyjny doprowadził do wyrównania wyników wokół „średniej” (często kosztem uczniów najzdolniejszych, tak wynika z obserwacji nauczycieli), w grupie eksperymentalnej nastąpiła wyraźna poprawa obserwowanych umiejętności. Wprowadzenie eksperymentu zadziałało jako skuteczny katalizator dla uczniów z niewystarczającymi umiejętnościami, umożliwiając im nie tylko wyrównanie braków, ale w wielu przypadkach osiągnięcie poziomu bardzo dobrego, co w warunkach nauczania tradycyjnego (grupa kontrolna) zdarzało się niemal czterokrotnie rzadziej. Porównanie tych dwóch grup jasno pokazuje, że wyobraźnia matematyczna nie jest cechą daną raz na zawsze, ale umiejętnością, którą można - i należy - trenować nowoczesnymi narzędziami. Fotoedukacja pozwoliła uczniom klasy trzeciej na płynne przejście od konkretu do wyobrażenia. Dzięki temu, że dzieci przez miesiące same "stwarzały" matematyczne kadry, ich wyobraźnia stała się narzędziem sprawczym. Kończą one pierwszy etap edukacji z poczuciem dużej pewności siebie i gotowością do mierzenia się z abstrakcyjnymi problemami, co w tradycyjnym

modelu nauczania, opartym głównie na podręczniku, udaje się osiągnąć znacznie mniejszej grupie uczniów.

5.4. Elegancja matematyczna uczniów

Umiejętności uczniów w zakresie elegancji matematycznej zbadano także za pomocą arkuszy obserwacji, które skonstruowałam na użytek moich badań. Dla celów porównawczych przeprowadzono obserwację wstępną i końcową. Obserwacje prowadzono zarówno w grupie eksperymentalnej, jak i w grupie kontrolnej uczniów klas pierwszych, drugich i trzecich. W grupie eksperymentalnej wykorzystano fotoedukację. W grupie kontrolnej program kształcenia z zakresu edukacji matematycznej realizowano zgodnie z programem autorstwa Jadwigi Hanisz, bez wykorzystania fotoedukacji matematycznej. Uzyskane wyniki zaprezentuję oddzielnie dla klasy pierwszej, oddzielnie dla klasy drugiej i oddzielnie dla klasy trzeciej.

5.4.1. Elegancja matematyczna uczniów klas pierwszych szkoły podstawowej

W badaniu umiejętności uczniów klas pierwszych, dotyczących elegancji matematycznej, wykorzystałam arkusz obserwacji skonstruowany na użytek moich badań. Elegancję matematyczną uczniów badałam na trzech poziomach: A - bardzo dobrym; B - wystarczającym; C – niewystarczającym, w następujących obszarach:

1. Czytelne i estetyczne wykonywanie zapisów.
2. Prezentowanie rozwiązania w sposób uporządkowany i logiczny.
3. Zaproponowanie /wyboru rozwiązania prostszego, lepszego.
4. Zadanie interesującego pytania, świadczącego o poszukiwaniu optymalnego rozwiązania.

Otrzymane dane przedstawiam w tabelach nr 32 i nr 33.

Tabela 32. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie eksperymentalnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy pierwszej w zakresie elegancji matematycznej

Umiejętności w za-	BADANIA WSTĘPNE			BADANIA KOŃCOWE		
	Poziom ocenianych umiejętności			Poziom ocenianych umiejętności		
	A	B	C	A	B	C

kresie elegancji matematycznej	(w %)	(w %)	(w %)	(w %)	(w %)	(w %)
1	19,51	41,46	39,02	46,34	41,46	12,20
2	0,00	34,15	65,85	31,71	43,90	24,39
3	0,00	12,20	87,80	9,76	60,98	29,27
4	0,00	17,07	82,93	31,71	41,46	26,83
Ogółem	**4,88**	**26,22**	**68,90**	**29,88**	**46,95**	**23,17**

A - bardzo dobry; B - wystarczający; C - niewystarczający

1 - Czytelnie i estetycznie wykonuje zapisy; 2 - W sposób uporządkowany i logiczny prezentuje rozwiązania; 3 - Potrafi zaproponować/wybrać rozwiązanie prostsze, lepsze; 4 - Potrafi zadać interesujące pytanie świadczące o poszukiwaniu optymalnego rozwiązania.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie przeprowadzonych badań.

Tabela 33. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie kontrolnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy pierwszej w zakresie elegancji matematycznej

Umiejętności w zakresie elegancji matematycznej	*BADANIA WSTĘPNE*			*BADANIA KOŃCOWE*		
	Poziom ocenianych umiejętności			*Poziom ocenianych umiejętności*		
	A (w %)	*B (w %)*	*C (w %)*	*A (w %)*	*B (w %)*	*C (w %)*
1	*33,33*	*33,33*	*33,33*	*38,89*	*50,00*	*11,11*
2	*0,00*	*60,56*	*69,44*	*2,78*	*44,44*	*52,78*
3	*0,00*	*8,33*	*91,67*	*0,00*	*25,00*	*47,22*
4	*0,00*	*11,11*	*88,89*	*0,00*	*22,22*	*77,78*
Ogółem	***8,33***	***20,83***	***70,83***	***10,42***	***35,42***	***54,17***

A - bardzo dobry; B - wystarczający; C - niewystarczający

1 - Czytelnie i estetycznie wykonuje zapisy; 2 - W sposób uporządkowany i logiczny prezentuje rozwiązania; 3 - Potrafi zaproponować/wybrać rozwiązanie prostsze, lepsze; 4 - potrafi zadać interesujące pytanie świadczące o poszukiwaniu optymalnego rozwiązania.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie przeprowadzonych badań

Kategoria „elegancji matematycznej", choć często postrzegana jako pojęcie subiektywne, w procesie dydaktycznym klasy pierwszej stanowi fundament dla budowania staranności, logiki oraz estetyki myślenia operacyjnego, a zestawienie danych w tabeli nr 32 pozwala na sformułowanie wniosku o pozytywnym znaczeniu pedagogicznym fotoedukacji w rozwoju umiejętności uczniów grupy eksperymentalnej. Zbiorcze zestawienie wyników („Ogółem") ukazuje radykalne przesunięcie jakościowe w strukturze badanych umiejętności, ponieważ o ile w pomiarze wstępnym poziom niewystarczający dotyczył aż 68,90% uczniów, o tyle w badaniu końcowym odsetek ten uległ znaczącej redukcji do poziomu 23,17%, co stanowi o wyraźnej przewadze empirycznej tej metody. Jednocześnie odnotowano wzrost udziału umiejętności na poziomie bardzo dobrym z marginalnych 4,88% do 29,88%, co dodatkowo podkreśla wysoką doniosłość pedagogiczną podjętych działań. Pierwsza z analizowanych umiejętności, dotycząca czytelnego i estetycznego wykonywania zapisów, odnotowała znaczący progres z poziomu 19,51% do 46,34% ocen bardzo dobrych, wykazując wyraźną przewagę empiryczną fotoedukacji, która, kładąc nacisk na harmonię obrazu i kompozycję, w sposób naturalny przełożyła się na dbałość uczniów o stronę wizualną ich pracy. Redukcja poziomu niewystarczającego o ponad 26 punktów procentowych w tym obszarze stanowi dowód o pozytywnym znaczeniu pedagogicznym fotoedukacji. Jeszcze bardziej znaczące zmiany, świadczące o wyraźnej przewadze empirycznej eksperymentu, odnotowano w obszarze uporządkowanej i logicznej prezentacji rozwiązań, gdzie na etapie wstępnym żaden z uczniów nie osiągnął poziomu bardzo dobrego, natomiast badanie końcowe wykazało, że aż 31,71% dzieci osiągnęło najwyższy poziom umiejętności. Fakt, że fotografia uczy sekwencyjności i wyboru istotnych elementów, bezpośrednio stymulując logiczną strukturę zapisu, nadaje metodzie walor o wysokiej doniosłości pedagogicznej. Umiejętność proponowania prostszych i lepszych rozwiązań, mimo że była dla pierwszoklasistów największym wyzwaniem, również wykazała wyraźną przewagę empiryczną fotoedukacji poprzez spadek poziomu niewystarczającego z niemal 88% do niespełna 30%. Przesunięcie dominującej grupy uczniów na poziom wystarczający dzięki pokazywaniu różnych perspektyw tego samego obiektu wskazuje na pozytywną rolę fotoedukacji w nauczaniu matematyki i uczy dzieci poszukiwania optymalnych dróg rozwiązywania problemów. Ostatni badany obszar, czyli umiejętność zadawania interesujących pytań, świadczących o poszukiwaniu optymalizacji, zanotował skok z 0,00% do 31,71% na poziomie najwyższym, co stanowi o wyraźnej przewadze empirycznej pracy z obrazem nad metodami tradycyjnymi. Zdolność do zadawania pytań wykraczających poza schemat jest bezpośrednim efektem rozbudzania ciekawości poznawczej przez wieloznaczny obraz fotograficzny, co ma duże znaczenie

dla rozwoju aktywności ucznia. Podsumowując, przedstawione wyniki stanowią dowód o wyraźnej przewadze empirycznej oraz doniosłości pedagogicznej fotoedukacji w rozwijaniu elegancji matematycznej. Pozwala ona uczniom klasy pierwszej przejść od chaotycznego zapisu do świadomego, estetycznego i wieloaspektowego podejścia do zagadnień, co we wszystkich czterech kategoriach potwierdza, że integracja obrazu z nauką matematyki znacząco podnosi jakość kultury pracy umysłowej dziecka.

Analiza danych dotyczących elegancji matematycznej w grupie kontrolnej wskazuje na znacznie mniejszą dynamikę zmian niż w grupie eksperymentalnej, co w zestawieniu z rezultatami eksperymentu uwidacznia wyraźną przewagę empiryczną fotoedukacji. W grupie kontrolnej jedynym obszarem wykazującym względnie zrównoważony rozwój była czytelność i estetyka zapisu, gdzie odnotowano wzrost poziomu bardzo dobrego z 33,33% do 38,89% oraz redukcję ocen niewystarczających do 11,11%. Jednak w umiejętnościach wymagających procesów myślowych, takich jak uporządkowanie i logiczna prezentacja rozwiązań, postęp był znikomy (wzrost poziomu A jedynie do 2,78%), a ponad połowa uczniów (52,78%) nadal prezentuje poziom niewystarczający. Brak wyraźnej przewagi empirycznej tradycyjnych metod potwierdza również obszar wyboru optymalnego rozwiązania, w którym poziom bardzo dobry pozostał na poziomie 0,00%, a deficyty nadal dotyczą blisko połowy badanych (47,22%). Największy problem stwarzała postawa badawcza, w której aż 77,78% uczniów grupy kontrolnej w badaniu końcowym wykazało brak tych umiejętności, co w jaskrawym kontraście do wyników grupy eksperymentalnej potwierdza wysoką doniosłość pedagogiczną pracy z obrazem.

Zestawienie i analiza zgromadzonych danych empirycznych grupy eksperymentalnej i kontrolnej pozwalają na sformułowanie jednoznacznego wniosku o wyższości koncepcji wykorzystującej obraz fotograficzny, co uwidacznia się w wyjątkowej dynamice pozytywnych zmian wyników ogólnych. Skala odnotowanego progresu w grupie eksperymentalnej, w przeciwieństwie do stabilnych rezultatów grupy kontrolnej, stanowi bezpośredni dowód na wyraźną przewagę empiryczną fotoedukacji jako skutecznego narzędzia stymulującego wszechstronny rozwój umiejętności matematycznych. Tak wyraźne przesunięcie jakościowe w strukturze umiejętności uczniów potwierdza, że innowacja ta nie tylko optymalizuje proces kształcenia, ale nadaje mu nową wartość merytoryczną i dydaktyczną. Podczas gdy w grupie eksperymentalnej odsetek ocen bardzo dobrych w zakresie elegancji matematycznej wzrósł o 25 punktów procentowych, grupa kontrolna w obszarze elegancji matematycznej odnotowała marginalny i statystycznie nieistotny progres o 2,09 p.p. Wyraźna przewaga empiryczna innowacji widoczna jest także w rozumieniu poleceń, gdzie grupa eksperymentalna uzyskała 82,93% ocen bardzo dobrych, podczas gdy w grupie kontrolnej najwyższy poziom biegłości w logicznej prezentacji

rozwiązań osiągnęło zaledwie 2,78% uczniów. Fotoedukacja wykazała również znacznie wyższą skuteczność w niwelowaniu deficytów – w grupie eksperymentalnej poziom niewystarczający w zakresie elegancji matematycznej spadł o 45,73 p.p., podczas gdy w grupie kontrolnej redukcja ta była znacznie mniej spektakularna, pozostawiając ponad połowę uczniów (54,17%) z brakiem wymaganych umiejętności.

O pozytywnym znaczeniu fotoedukacji świadczy także stymulowanie kreatywności i poszukiwanie optymalizacji. W grupie kontrolnej odsetek uczniów potrafiących zaproponować lepsze rozwiązanie lub zadać interesujące pytanie pozostał na poziomie 0,00%, natomiast w grupie eksperymentalnej wskaźniki te wzrosły odpowiednio do 9,76% i 31,71%. Dane te stanowią dowód, że koncepcja oparta na fotografii jest skuteczniejszą alternatywą dla metod tradycyjnych, wykazując wyraźną przewagę empiryczną w każdym badanym parametrze. Fotoedukacja stymuluje sfery rozwoju, takie jak logika, estetyka i kreatywność, które w standardowym procesie edukacyjnym pozostają niemal nietknięte, co w pełni uzasadnia celowość jej wdrażania do praktyki szkolnej jako rozwiązania o wysokiej doniosłości pedagogicznej.

5.4.2. Elegancja matematyczna uczniów klas drugich szkoły podstawowej

W badaniu umiejętności uczniów klas drugich, dotyczących elegancji matematycznej, wykorzystałam arkusz obserwacji skonstruowany na użytek moich badań. Elegancję matematyczną uczniów badałam na trzech poziomach: A - bardzo dobrym; B - wystarczającym; C – niewystarczającym, w następujących obszarach:

1. Czytelne i estetyczne wykonywanie zapisów.
2. Prezentowanie rozwiązania w sposób uporządkowany i logiczny.
3. Zaproponowanie /wyboru rozwiązania prostszego, lepszego.
4. Zadanie interesującego pytania świadczącego, o poszukiwaniu optymalnego rozwiązania.

Otrzymane dane przedstawiam w tabelach nr 34 i nr 35.

Tabela 34. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie eksperymentalnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy drugiej w zakresie elegancji matematycznej

Umiejętności w zakresie elegancji mateamtycznej	**BADANIA WSTĘPNE**			**BADANIA KOŃCOWE**		
	Poziom ocenianych umiejętności			Poziom ocenianych umiejętności		
	A (w %)	B (w %)	C (w %)	A (w %)	B (w %)	C (w %)
1	44,68	36,17	19,15	89,36	8,51	2,13
2	38,30	40,43	21,28	55,32	40,43	4,26
3	19,15	63,83	17,02	36,17	63,83	0,00
4	34,04	53,19	12,77	65,96	34,04	0,00
Ogółem	**34,04**	**48,40**	**17,55**	**61,70**	**36,70**	**1,60**

A - bardzo dobry; B - wystarczający; C - niewystarczający

1 - Czytelnie i estetycznie wykonuje zapisy; 2 - W sposób uporządkowany i logiczny prezentuje rozwiązania; 3 - Potrafi zaproponować/wybrać rozwiązanie prostsze, lepsze; 4 - potrafi zadać interesujące pytanie świadczące o poszukiwaniu optymalnego rozwiązania.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie przeprowadzonych badań własnych

Tabela 11. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie kontrolnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy drugiej w zakresie elegancji matematycznej

Umiejętności w zakresie elegancji matematycznej	BADANIA WSTĘPNE			BADANIA KOŃCOWE		
	Poziom ocenianych umiejętności			Poziom ocenianych umiejętności		
	A (w %)	B (w %)	C (w %)	A (w %)	B (w %)	C (w %)
1	42,59	33,33	24,07	46,30	44,44	9,26
2	37,04	38,89	24,07	31,48	46,30	22,22
3	20,37	59,26	20,37	20,37	62,96	16,67
4	33,33	48,15	18,52	40,47	50,00	9,26
Ogółem	**33,33**	**44,91**	**21,76**	**34,72**	**50,93**	**14,35**

A - bardzo dobry; B - wystarczający; C - niewystarczający

1 - Czytelnie i estetycznie wykonuje zapisy; 2 - W sposób uporządkowany i logiczny prezentuje rozwiązania; 3 - Potrafi zaproponować/wybrać rozwiązanie prostsze, lepsze; 4 - potrafi zadać interesujące pytanie świadczące o poszukiwaniu optymalnego rozwiązania.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie przeprowadzonych badań własnych

Analiza ilościowa danych zawartych w tabeli 34, dotycząca wyników badań uczniów klasy drugiej w grupie eksperymentalnej, wskazuje na znaczny progres w zakresie elegancji matematycznej, co stanowi dowód na wyraźną przewagę empiryczną fotoedukacji. Po zakończeniu eksperymentu uczniowie wykazują wysoką dbałość o formę, logikę i optymalizację swoich prac, co potwierdza ważność pedagogiczną fotoedukacji. W ramach kompetencji czytelności i estetyki zapisu grupa poczyniła bardzo duże postępy, a poziom bardzo dobry wzrósł z 44,68% do 89,36%, co wskazuje na wyraźną przewagę empiryczną metody wizualnej. Znaczny przyrost tej umiejętności oraz marginalizacja poziomu niewystarczającego z 19,15% do śladowej wartości 2,13% dokumentują wysoką rolę i znaczenie pedagogiczne wykorzystania fotoedukacji w procesie dydaktycznym. W zakresie uporządkowanej i logicznej prezentacji rozwiązań zauważalna jest istotna progresja w strukturze procesów poznawczych, gdzie liczebność grupy na poziomie bardzo dobrym wzrosła z 38,30% do 55,32%, co świadczy o wyraźnej przewadze empirycznej w budowaniu autonomii strategii rozwiązywania zadań. Radykalne zmniejszenie wyników niewystarczających z 21,28% do 4,26% potwierdza wysoką doniosłość pedagogiczną wprowadzonej innowacji, przejawiającą się w zastąpieniu chaosu uporządkowaną argumentacją. Kolejnym istotnym przejawem dojrzałości jest dobór optymalnych strategii rozwiązywania problemów, gdzie niemal dwukrotny wzrost liczebności uczniów na poziomie bardzo dobrym z 19,15% do 36,17% wskazuje na wyraźną przewagę empiryczną fotoedukacji. Całkowita eliminacja wyników niewystarczających w tym obszarze, stanowiąca spadek z 17,02% do 0,00%, jest sukcesem fotoedukacji.

Znaczącą transformację odnotowano również w zakresie aktywności badawczej, gdzie przyrost wyników na poziomie najwyższym z 34,04% do 65,96% dowodzi wyraźnej przewagi empirycznej w kształtowaniu postaw aktywnych poszukiwaczy rozwiązań. Podobnie jak w przypadku optymalizacji, całkowita likwidacja poziomu niewystarczającego z 12,77% do 0,00% potwierdza ważność fotoedukacji w nauczaniu matematyki w klasach młodszych. Syntetyzując powyższe dane, można skonstatować, że proces nauczania skutecznie stymulował postawy heurystyczne, a osiągnięta progresja dokumentuje wyraźną przewagę empiryczną i wysoką doniosłość pedagogiczną fotoedukacji w ewolucji dzieci w stronę autonomicznej i krytycznej postawy badawczej.

Analiza danych, dotycząca wyników badań uczniów klasy drugiej w grupie kontrolnej, wskazuje na umiarkowany rozwój umiejętności w zakresie elegancji matematycznej, co w zestawieniu z sukcesami grupy badawczej potwierdza, że w każdym omawianym aspekcie wy-

stępuje wyraźna przewaga empiryczna fotoedukacji. W przeciwieństwie do grupy eksperymentalnej, postępy są tu mniej dynamiczne, a w niektórych obszarach wykazują tendencję spadkową, co nadaje wdrożonym innowacjom wysoką wartość pedagogiczną.

W sferze czytelnego i estetycznego wykonywania zapisów odnotowałam wprawdzie stabilną poprawę estetyki prac przy jednoczesnej znaczącej redukcji wyników niewystarczających (z 24,07% do 9,26%), co świadczy o tym, że standardowy proces dydaktyczny utrwala nawyki staranności, jednak to grupa eksperymentalna wykazuje w tym obszarze wyraźną przewagę empiryczną. Zjawisku temu towarzyszy niepokojąca regresja w obszarze struktur logicznych, gdzie spadek wyników bardzo dobrych oraz utrzymujący się wysoki poziom deficytów (22,22%) wskazują na narastające trudności uczniów, co podkreśla, iż fotoedukacja odgrywa dużą rolę w niwelowaniu tych braków. Wyniki w zakresie propozycji i wyboru prostszego rozwiązania zadania pozostały na niskim, niemal niezmiennym poziomie (20,37%), co wskazuje na dominację strategii rutynowych i udowadnia, że w sferze optymalizacji działań rysuje się wyraźna przewaga empiryczna metod eksperymentalnych. Dostrzegam jednak progres w postawach badawczych i formułowaniu pytań, co zaowocowało dwukrotnym spadkiem odsetka uczniów na poziomie niewystarczającym, choć to systemowe wsparcie kreatywności w grupie badawczej ma wysoką doniosłość pedagogiczną.

Rozwój grupy kontrolnej, określony jako ekstensywny, doprowadził do ukształtowania się poziomu wystarczającego jako dominującego (50,93%), lecz brak innowacyjnych narzędzi sprawił, że kluczowe umiejętności złożone – logika i optymalizacja – znalazły się w fazie stagnacji, co wykazuje wyraźną przewagę empiryczną grupy eksperymentalnej. Grupa kontrolna osiągnęła stan „średniej poprawności", podczas gdy w grupie eksperymentalnej poziom bardzo dobry osiągnęło ponad 61% uczniów, co jest wynikiem niemal o połowę wyższym i stanowi argument o pozytywnej roli fotoedukacji pedagogicznej. Największym deficytem w tej grupie pozostaje brak postępu w logicznej prezentacji rozwiązań oraz brak nawyku optymalizacji pracy, w której w porównaniu z grupą badawczą widoczna jest wyraźna przewaga empiryczna narzędzi wizualnych. Zestawienie wyników pozwala na sformułowanie wniosku, że w obszarze biegłości w języku matematycznym, gdzie grupa eksperymentalna zanotowała radykalny przyrost ocen bardzo dobrych (z 41,22% do 65,12%), a grupa kontrolna jedynie marginalny wzrost (z 8,33% do 10,42% – postęp o 2,09 p.p.), zastosowany eksperyment wykazuje wyraźną przewagę empiryczną w kształtowaniu kultury matematycznej.

Szczegółowa analiza obu grup, eksperymentalnej i kontrolnej, w zakresie poszczególnych umiejętności dotyczących elegancji matematycznej ukazuje dysproporcje, w których każdora-

zowo uwidacznia się wyraźna przewaga empiryczna eksperymentu. Argumentem przemawiającym za wyższością fotoedukacji jest skuteczność w niwelowaniu deficytów. W grupie eksperymentalnej odsetek ocen niewystarczających (C) w zakresie elegancji matematycznej spadł z 17,55% do 1,60% podczas gdy w grupie kontrolnej redukcja ta była znacznie mniejsza z 21.76p.p. do 14,35 p.p. Oznacza to, że po zakończeniu badań w grupie kontrolnej ponad połowa uczniów nadal nie opanowała badanych umiejętności w stopniu wystarczającym, co na tle wyników grupy „fotoedukacyjnej" (gdzie problem dotyczył już tylko co czwartego ucznia) ukazuje wyraźną przewagę empiryczną eksperymentu. O ważności fotoedukacji świadczy również jej skuteczność w stymulowaniu postaw kreatywnych oraz motywowaniu uczniów do aktywnego poszukiwania optymalnych rozwiązań. W grupie kontrolnej odsetek uczniów potrafiących zaproponować lepsze rozwiązanie lub zadać interesujące pytanie na poziomie bardzo dobrym wyniósł 33,33% w badaniu wstępnym, i 40,47% końcowym, natomiast w grupie eksperymentalnej w badaniu końcowym wzrósł z 34,04% do 65,96%, co potwierdza, że w rozwoju inwencji twórczej występuje wyraźna przewaga empiryczna nowej metody. Podsumowując, zgromadzony materiał badawczy w obszarze elegancji matematycznej uczniów klas drugich wskazał, że koncepcja fotoedukacji stanowi wysoce skuteczną alternatywę dla modeli tradycyjnych. Odnotowana wyraźna przewaga empiryczna grupy eksperymentalnej uwidacznia się nie tylko w sprawniejszym opanowaniu kompetencji rachunkowych i pojęciowych, ale przede wszystkim w stymulowaniu tych sfer rozwoju, takich jak logika wywodu, estetyka zapisu czy kreatywność, które w standardowym procesie dydaktycznym wykazują stagnację. Wysoka doniosłość pedagogiczna uzyskanych wyników, widoczna w każdym badanym parametrze, w pełni uzasadnia celowość wdrażania fotoedukacji do powszechnej praktyki szkolnej jako narzędzia o udowodnionej, wyraźnej przewadze empirycznej.

5.4.3. Elegancja matematyczna uczniów klas trzecich szkoły podstawowej

W badaniu umiejętności uczniów klas trzecich, dotyczącym elegancji matematycznej, wykorzystałam arkusz obserwacji skonstruowany na użytek moich badań. Elegancję matematyczną uczniów badałam na trzech poziomach: A - bardzo dobrym; B - wystarczającym; C – niewystarczającym, w następujących obszarach:

1. Czytelnego i estetycznego wykonywania zapisów.
2. Prezentowania rozwiązania w sposób uporządkowany i logiczny.
3. Zaproponowania /wyboru rozwiązania prostszego, lepszego.

4. Zadania interesującego pytania, świadczącego o poszukiwaniu optymalnego rozwiązania.

Otrzymane dane przedstawiam w tabelach nr 36 i 37.

Tabela 36. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie eksperymentalnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy trzeciej w zakresie elegancji matematycznej

Umiejętności w zakresie elegancji matematycznej	BADANIA WSTĘPNE			BADANIA KOŃCOWE		
	Poziom ocenianych umiejętności			Poziom ocenianych umiejętności		
	A (w %)	B (w %)	C (w %)	A (w %)	B (w %)	C (w %)
1	26,83	34,15	39,02	51,22	46,34	2,44
2	39,02	12,20	48,78	58,54	17,07	24,39
3	36,59	17,07	36,34	46,34	31,71	21,95
4	26,83	19,51	53,66	41,46	39,02	19,51
Ogółem	**32,32**	**20,73**	**46,95**	**49,39**	**33,54**	**17,07**

A - bardzo dobry; B - wystarczający; C - niewystarczający

1 - Czytelnie i estetycznie wykonuje zapisy; 2 - W sposób uporządkowany i logiczny prezentuje rozwiązania; 3 - Potrafi zaproponować/wybrać rozwiązanie prostsze, lepsze; 4 - potrafi zadać interesujące pytanie świadczące o poszukiwaniu optymalnego rozwiązania.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie

Tabela 37. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie kontrolnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy trzeciej w zakresie elegancji matematycznej

Umiejętności w zakresie elegancji matematycznej	Badania wstępne			Badania końcowe		
	Poziom ocenianych umiejętności			Poziom ocenianych umiejętności		
	A (w %)	B (w %)	C (w %)	A (w %)	B (w %)	C (w %)
1	21,43	54,76	23,81	64,29	33,33	2,38
2	38,10	21,43	40,48	45,24	42,86	11,90
3	35,71	26,19	38,10	28,57	59,52	11,90
4	33,33	23,81	42,86	30,95	50,00	19,05
Ogółem	**32,14**	**31,55**	**36,31**	**42,26**	**46,43**	**11,31**

A - bardzo dobry; B - wystarczający; C - niewystarczający

1 - Czytelnie i estetycznie wykonuje zapisy; 2 - W sposób uporządkowany i logiczny prezentuje rozwiązania; 3 - Potrafi zaproponować/wybrać rozwiązanie prostsze, lepsze; 4 - potrafi zadać interesujące pytanie świadczące o poszukiwaniu optymalnego rozwiązania.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie przeprowadzonych badań własnych

Analiza wyników grupy eksperymentalnej uczniów klasy trzeciej (tabela nr 36) dostarcza dowodów na to, że wdrożenie koncepcji fotoedukacji (fotomatematyki) znacząco podniosło kulturę pracy z zagadnieniami matematycznymi. Zestawienie wyników ogólnych ukazuje radykalną zmianę, co stanowi wyraźną przewagę empiryczną zastosowanej innowacji nad dotychczasowymi metodami pracy. O ile w badaniu wstępnym dominował poziom niewystarczający (C) u 46,95% badanych, o tyle w badaniu końcowym grupa ta uległa znaczącej redukcji do poziomu 17,07%. Procesowi temu towarzyszył dynamiczny wzrost odsetka ocen bardzo dobrych (A) - z 32,32% do blisko połowy populacji badanej (49,39%). Skala tych przekształceń potwierdza pozytywne znaczenie pedagogiczne fotoedukacji jako narzędzia skutecznie korygującego deficyty i stymulującego osiągnięcia uczniów. Analizując poszczególne umiejętności pod kątem ich jakościowej ewolucji należy w pierwszej kolejności zwrócić uwagę na czytelność i estetykę wykonywania zapisów (1). W badaniu początkowym poziom bardzo dobry prezentowało 26,83% uczniów, natomiast po cyklu zajęć z wykorzystaniem fotografii wskaźnik ten niemal podwoił się, osiągając 51,22%. Argumentacja tego wzrostu opiera się na założeniu, że praca z kadrowaniem i kompozycją fotograficzną uwrażliwiła uczniów na ład wizualny, co zostało bezpośrednio przeniesione na strukturę zapisów w zeszytach przedmiotowych, gdzie odsetek ocen niewystarczających spadł z blisko 40% do zaledwie 2,44%. Dowodzi to wysokiej doniosłości pedagogicznej fotoedukacji.

Również wyraźną przewagę empiryczną odnotowałam w zakresie uporządkowanej i logicznej prezentacji rozwiązań (2). Na etapie wstępnym blisko połowa uczniów (48,78%) przejawiała braki w tym obszarze. Dzięki koncepcji fotomatematyki, która wymusza na uczniu selekcję informacji i budowanie narracji wokół obrazu, poziom bardzo dobry wzrósł z 39,02% do 58,54%. Praca z fotografią nauczyła uczniów, że rozwiązanie matematyczne jest procesem, który wymaga przejrzystego „scenariusza", co znacząco zredukowało chaos operacyjny. W obszarze umiejętności proponowania i wyboru prostszych rozwiązań (3) badanie końcowe wykazało przesunięcie wyników w stronę biegłości (wzrost poziomu A z 36,59% do 46,34%). Fotoedukacja, pokazując wielość perspektyw tego samego obiektu, zaszczepiła w uczniach przekonanie, że do celu matematycznego prowadzą różne drogi, a poszukiwanie tej „najczystszej" i najprostszej jest przejawem dojrzałości intelektualnej. Ostatnia z analizowanych umiejętności - formułowanie pytań problemowych, świadczących o poszukiwaniu optymalnych rozwiązań

(4) - zanotowała wzrost ocen bardzo dobrych z 26,83% do 41,46%. Fotografia, jako medium nieoczywiste, stała się bodźcem do wyjścia poza schematyczne odtwarzanie algorytmów, co ukazuje wyraźną przewagę empiryczną fotoedukacji nad tradycyjnymi metodami podającymi. Uczniowie klasy trzeciej stali się bardziej dociekliwi, a ich pytania zaczęły dotyczyć optymalizacji procesów matematycznych. Stanowi to bezpośredni efekt metodycznego powiązania obrazu z abstrakcją, potwierdzając tym samym ważną rolę pedagogiczną wprowadzonej innowacji.

Analiza kultury matematycznej w zakresie elegancji matematycznej uczniów klas trzecich grupy eksperymentalnej potwierdza pozytywne znaczenie zastosowanego eksperymentu. Skokowy wzrost liczebności grupy na poziomie bardzo dobrym (z 32,32% do 49,39%), przy jednoczesnym ograniczeniu skrajnych deficytów z poziomu niemal połowy populacji (46,95%) do zaledwie 17,07%, stanowi wyraźną przewagę empiryczną fotoedukacji nad metodami tradycyjnymi. Wyniki te są dowodem na trwałe ukształtowanie pożądanych postaw matematycznych, a wykształcona w ten sposób autonomia poznawcza stanowi solidny fundament dla dalszych etapów kształcenia. Uczniowie objęci programem eksperymentalnym osiągnęli wysoki poziom kultury matematycznej odnośnie do elegancji matematycznej. Za najistotniejszy sukces należy uznać proces wyrównywania szans edukacyjnych - znacząca większość badanych (ponad 82%) prezentuje obecnie co najmniej wystarczający poziom elegancji matematycznej. Tak uformowana biegłość merytoryczna i estetyczna stanowi optymalne przygotowanie do podjęcia nauki na wyższych szczeblach edukacyjnych. Z kolei wyniki badań uczniów klasy trzeciej w grupie kontrolnej wskazują na postęp w zakresie elegancji matematycznej, jednak jest on mniej jednolity niż w grupie eksperymentalnej. Uczniowie nauczani tradycyjnie wykazują poprawę głównie w sferze estetycznej, podczas gdy umiejętności analityczne ulegają pewnym wahaniom. W grupie kontrolnej uczniów klas trzecich najbardziej wymierne efekty zauważa się w obszarze czytelności i estetyki zapisu (gdzie odnotowałam duży wzrost poziomu najwyższego (z 21,43% do 64,29%) przy niemal całkowitej eliminacji deficytów z 23,81% do 2,38%). Świadczy to o skutecznej internalizacji nawyków staranności graficznej, jako standardu pracy ucznia. W obszarze strukturyzacji logicznej również zaobserwowano pozytywną dynamikę. Nastąpiła redukcja poziomu niewystarczającego z 40,48% do 11,90%, co wskazuje na opanowanie przez większość badanych umiejętności sekwencyjnego zapisu. Jednakże głębsza analiza wskaźników wymagających operacji wyższego rzędu obnaża ograniczenia modelu tradycyjnego. W zakresie optymalizacji strategii odnotowałam regres ocen bardzo dobrych (spadek o około 7 punktów procentowych) na rzecz dominacji poziomu dostatecznego (59,52%). Suge-

ruje to, że w obliczu rosnącej trudności materiału uczniowie rezygnują z poszukiwania twórczych rozwiązań na rzecz metod bezpiecznych, lecz mało efektywnych. Podobną tendencję do stagnacji wykazuje wskaźnik postawy badawczej, w którym, mimo ograniczenia wyników negatywnych, odsetek uczniów na poziomie wysokim nie uległ poprawie. Syntetyczne zestawienie wyników ogólnych potwierdza, że grupa kontrolna ewoluuje w stronę poprawności rzemieślniczej i biegłości formalnej (wzrost poziomu wystarczającego do 46,43%), tracąc jednak potencjał w zakresie krytycznego myślenia i heurystyki. W konkluzji należy stwierdzić, że o ile nauczanie tradycyjne efektywnie kształtuje kulturę zapisu i porządek metodologiczny, o tyle wykazuje niewystarczającą skuteczność w stymulowaniu postaw innowacyjnych i optymalizacyjnych, co stanowi wyraźną cechę dystynktywną względem grupy eksperymentalnej.

Porównując wyniki grupy eksperymentalnej z wynikami grupy kontrolnej, zauważam wysoką skuteczność pedagogiczną fotoedukacji. Przejawia się ona przede wszystkim w wyraźnej przewadze empirycznej przyrostu najwyższych kompetencji (poziom bardzo dobry). W ujęciu ogólnym (ogółem), grupa objęta fotoedukacją zanotowała skokowy wzrost ocen bardzo dobrych o 17,07 punktu procentowego (z 32,32% do 49,39%). W tym samym czasie grupa kontrolna osiągnęła przyrost o 10,12 p.p. (z 32,14% do 42,26%). Choć obie grupy odnotowały postęp, to skala sukcesu w grupie eksperymentalnej jest o ponad 70% wyższa, co wskazuje na silniejszy bodziec rozwojowy, płynący z pracy z obrazem.

Szczegółowa analiza poszczególnych umiejętności wykazuje, że wyraźna przewaga empiryczna wystąpiła w obszarze czytelności i estetyki zapisów (1). W grupie eksperymentalnej odsetek uczniów osiągających poziom bardzo dobry uległ niemal podwojeniu, wzrastając o 24,39 p.p. (z 26,83% do 51,22%). Co więcej, zastosowanie fotoedukacji pozwoliło na niemal całkowitą niwelację deficytów w tym zakresie - odsetek wyników na poziomie niewystarczającym (C) uległ redukcji z 39,02% do marginalnego poziomu 2,44%. Tak radykalna poprawa parametrów w grupie poddanej innowacji, w zestawieniu z wynikami grupy kontrolnej, stanowi wyraźną przewagę empiryczną wprowadzonej fotoedukacji. Dowodzi to, że włączenie komponentu wizualnego do dydaktyki matematyki skutecznie eliminując bariery w zakresie kultury zapisu matematycznego. Porównawcze zestawienie z grupą kontrolną, w której ograniczenie procentu uczniów o niewystarczającym poziomie umiejętności było znacznie mniej efektywne (spadek o 21,43 p.p.), stanowi wyraźną przewagę empiryczną innowacji. Dowodzi to, że mechanizm samoobserwacji oraz analiza kompozycji fotograficznej skuteczniej uwrażliwiają ucznia na ład i strukturę zapisu matematycznego niż konwencjonalne metody nauczania - uczenia się, W obszarze uporządkowanej i logicznej prezentacji rozwiązań (2), grupa eksperymentalna osiągnęła końcowy wynik na poziomie 58,54% ocen bardzo dobrych. Grupa kontrolna,

mimo progresu, zakończyła badanie z wynikiem 45,24%. Przewaga grupy „fotoedukacyjnej" wynika z faktu, że fotografia wymusza selekcję informacji i budowanie narracji wizualnej, co przekłada się na wyższą precyzję w konstruowaniu toku rozwiązania zadania. Najbardziej istotne różnice ujawniły się jednak w kompetencjach wymagających myślenia krytycznego i kreatywnego, takich jak poszukiwanie optymalnych rozwiązań (3) oraz zadawanie pytań o optymalizację (4). W grupie kontrolnej zaobserwowano niepokojący trend - odsetek ocen bardzo dobrych w obu tych kategoriach spadł (odpowiednio o 7,14 p.p. oraz 2,38 p.p.). Świadczy to o tym, że tradycyjne nauczanie, wraz ze wzrostem trudności materiału w klasie trzeciej, może prowadzić do usztywnienia schematów myślowych. Przeciwnie stało się w grupie eksperymentalnej, gdzie dzięki fotomatematyce odnotowałam wzrosty: o 9,75 p.p. w zakresie wyboru prostszych rozwiązań oraz o 14,63 p.p. w zakresie formułowania pytań.

Podsumowując, zgromadzony materiał badawczy wskazuje na wyraźną przewagę empiryczną koncepcji fotoedukacji nad modelem konwencjonalnym. Zastosowany eksperyment nie tylko skuteczniej niweluje deficyty kompetencyjne (redukcja poziomu C w grupie eksperymentalnej do 17,07%), ale przede wszystkim chroni uczniów przed regresją w obszarze myślenia twórczego. Dane liczbowe potwierdzają, że integracja fotografii z edukacją matematyczną czyni proces uczenia się bardziej świadomym, uporządkowanym i logicznym. Budowanie postawy badawczej oraz dbałość o estetykę poznawczą, których brakuje w standardowym procesie dydaktycznym, nadają wynikom niniejszych badań wysoką doniosłość pedagogiczną. Uzyskane rezultaty w pełni uzasadniają celowość implementacji fotoedukacji jako efektywnego narzędzia wspierającego rozwój poszczególnych umiejętności w obszarze elegancji matematycznej.

5.5. Twórczość matematyczna uczniów

Umiejętności uczniów w zakresie twórczości matematycznej zbadano za pomocą arkuszy obserwacji, które skonstruowałam na użytek moich badań. Dla celów porównawczych przeprowadzono obserwację wstępną i końcową. Obserwacje prowadzono zarówno w grupie eksperymentalnej i kontrolnej uczniów klas pierwszych, drugich i trzecich. W grupie eksperymentalnej wykorzystano fotoedukację. W grupie kontrolnej program kształcenia z zakresu edukacji matematycznej realizowano zgodnie z programem autorstwa J. Hanisz, bez wykorzystania fotoedukacji matematycznej. Uzyskane wyniki zaprezentuję oddzielnie dla klasy pierwszej, oddzielnie dla klasy drugiej i oddzielnie dla klasy trzeciej.

5.5.1. Twórczość matematyczna uczniów klas pierwszych szkoły podstawowej

W badaniu umiejętności uczniów klas pierwszych dotyczących twórczości matematycznej wykorzystałam arkusz obserwacji skonstruowany na użytek moich badań. Twórczość matematyczną uczniów badałam na trzech poziomach: A - bardzo dobrym; B - wystarczającym; C - niewystarczającym w następujących obszarach:

1. Stosowanie własnych strategii rozwiązywania zadań.
2. Robienie fotografii przedstawiającej dane zagadnienie w oryginalny sposób.
3. Konstruowanie gier, układanie krzyżówek, rebusów.
4. Układanie zadania i próby jego rozwiązania.

Dane te przedstawiam w tabelach nr 38 i 39.

Tabela 38. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie eksperymentalnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy pierwszej w zakresie twórczości matematycznej

Umiejętności w zakresie twórczości matematycznej	BADANIA WSTĘPNE			BADANIA KOŃCOWE		
	Poziom ocenianych umiejętności			Poziom ocenianych umiejętności		
	A (w %)	B (w %)	C (w %)	A (w %)	B (w %)	C (w %)
1	0,00	9,76	90,24	2,44	68,29	29,27
2	0,00	21,95	78,05	9,76	73,17	17,07
3	2,44	48,78	48,78	9,76	73,17	4,56
4	9,76	48,78	41,46	63,41	26,83	9,76
Ogółem	**3,05**	**32,32**	**64,63**	**21,34**	**60,37**	**18,29**

A - bardzo dobry; B - wystarczający; C - niewystarczający

1 - Stosuje własne strategie rozwiązywania zadań; 2 - Robi fotografie przedstawiające dane zagadnienie w oryginalny sposób; 3 - Konstruuje gry, układa krzyżówki, rebusy; 4 - Układa zadania i próbuje je rozwiązywać

Źródło: Opracowanie własne na podstawie przeprowadzonych badań własnych

Tabela 39. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie kontrolnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy pierwszej w zakresie twórczości matematycznej

Umiejętności w zakresie twórczości matematycznej	BADANIA WSTĘPNE			BADANIA KOŃCOWE		
	Poziom ocenianych umiejętności			Poziom ocenianych umiejętności		
	A (w %)	B (w %)	C (w %)	A (w %)	B (w %)	C (w %)
1	0,00	11,11	88,89	0,00	27,78	72,22
2	0,00	25,00	75,00	5,56	33,33	61,11
3	2,78	47,22	50,00	2,78	41,67	55,56
4	11,11	50,00	38,89	11,11	52,78	36,11
Ogółem	**3,47**	**33,33**	**63,19**	**4,86**	**38,89**	**56,25**

A - bardzo dobry; B - wystarczający; C - niewystarczający

1 - Stosuje własne strategie rozwiązywania zadań; 2 - Robi fotografie przedstawiające dane zagadnienie w oryginalny sposób; 3 - Konstruuje gry, układa krzyżówki, rebusy; 4 - Układa zadania i próbuje je rozwiązywać

Źródło: Opracowanie własne na podstawie przeprowadzonych badań własnych

Analiza danych zawartych w tabeli nr 39 (wyniki badań uczniów klasy pierwszej w grupie eksperymentalnej) ukazuje znaczną ewolucję postaw kreatywnych i umiejętności w zakresie twórczości matematycznej. Przed rozpoczęciem eksperymentu większość uczniów wykazywała pasywność twórczą, natomiast badanie końcowe potwierdza aktywizację niemal całej grupy. W stosowaniu własnych strategii rozwiązywania zadań odnotowałam sukces - wzrost z 0,00% do 2,44%. Choć odsetek jest niski, świadczy o pojawieniu się jednostek, które są samodzielne. Nastąpił duży skok w liczbie uczniów o wystarczającym poziomie. Zwiększyła się ona z 9,76% do aż 68,29%. Oznacza to, że większość uczniów przestała jedynie odtwarzać schematy, a zaczęła poszukiwać własnych dróg dojścia do wyniku. Nastąpił bardzo duży spadek z poziomu dominującego (90,24%) do 29,27%. W zakresie umiejętności oryginalnego przedstawiania danych poprzez fotografię nastąpił wzrost z poziomu zerowego (0,00%) do blisko 10% (9,76%). Poziom wystarczający wzrósł z 21,95% do 73,17%. Uczniowie nauczyli się dostrzegać i dokumentować zagadnienia matematyczne w swoim otoczeniu w sposób nieszablonowy. W konstruowaniu gier, krzyżówek i rebusów nastąpił czterokrotny wzrost poziomu bardzo dobrego - z 2,44% do 9,76%.W poziomie niewystarczającym nastąpiła redukcja z blisko połowy grupy (48,78%) do zaledwie 4,56%. Układanie zadań i próby ich rozwiązywania to

wskaźnik o najwyższej dynamice wzrostu na poziomie bardzo dobrym. Nastąpił w nim wzrost z 9,76% do aż 63,41%. Ponad połowa grupy stała się "autorami" matematycznymi, co świadczy o ogromnym wzroście pewności siebie i biegłości operacyjnej. Nastąpił również spadek z poziomu 41,46% do poziomu poniżej 10% (9,76%) niewystarczającego. Wdrożenie innowacji w postaci fotoedukacji matematycznej doprowadziło do skutecznego przełamania tej tendencji, co stanowi wyraźną przewagę empiryczną nad modelem tradycyjnym. Zmiana ta najwyraźniej uwidoczniła się w umiejętności samodzielnego projektowania zadań i podejmowania prób ich rozwiązywania. Uzyskane rezultaty stanowią twardy dowód na efektywność podjętych działań: uczniowie porzucili odtwórczy model edukacji na rzecz aktywnego operowania językiem matematycznym w sferze kreacji. Szczególnie istotne jest tu wysokie znaczenie pedagogiczne eksperymentu - proces ten nie ograniczył się do poprawy zewnętrznej formy pracy, lecz dotknął głębokich struktur poznawczych. Świadczy o tym ukształtowana gotowość uczniów do autorskiego konstruowania problemów matematycznych oraz poszukiwania nieszablonowych metod ich rozwiązywania.

Analiza danych zawartych w tabeli nr 39 (wyniki badań uczniów klasy pierwszej w grupie kontrolnej) wskazuje na bardzo powolne i ograniczone zmiany w zakresie twórczości matematycznej. W przeciwieństwie do grupy eksperymentalnej, uczniowie nauczani metodami tradycyjnymi w dużej mierze pozostają na poziomie odtwórczym, wykazując niską skłonność do podejmowania działań kreatywnych. Najbardziej niepokojącym zjawiskiem jest niemal całkowity brak regresu deficytów w zakresie stosowania własnych strategii. Utrzymujący się na poziomie 72,22% odsetek wyników niewystarczających oraz całkowity brak notowań na poziomie bardzo dobrym (0,00%) świadczą o tym, że uczniowie wykazują silną tendencję do reprodukowania narzuconych schematów, jedynie w znikomym zakresie, podejmując próby samodzielnej eksploracji poznawczej. Podobną stagnację odnotowałam w obszarze konstruowania gier, krzyżówek i rebusów, gdzie ponad połowa badanych (55,56%) wciąż przejawia trudności z wejściem w rolę twórcy struktur matematycznych. Brak progresu w tym zakresie, zestawiony z wynikami grupy eksperymentalnej, ukazuje wyraźną przewagę empiryczną fotoedukacji, podkreślając jednocześnie, że tradycyjny model dydaktyczny nie jest tak efektywny, jak fotoedukacja. By skutecznie przełamywać postawy reaktywne u uczniów. W obszarze umiejętności *robienia fotografii przedstawiających dane zagadnienie w oryginalny sposób* (wskaźnik 2) oraz *autorskiego projektowania zadań i ich rozwiązywania* (wskaźnik 4) zaobserwowano jedynie symboliczne przesunięcia statystyczne. Choć układanie zadań pozostaje relatywnie najlepiej rozwiniętym aspektem twórczości w tej grupie i plasuje się na poziomie wystarczającym (52,78%), to całkowite zamrożenie wyników na poziomie bardzo dobrym

(11,11%) świadczy o braku stymulacji drzemiącego w uczniach potencjału. Zbiorcze zestawienie wyników ogólnych potwierdza marginalny wpływ edukacji tradycyjnej na proces kształtowania postaw kreatywnych. Przy śladowym przyroście wyników na poziomie bardzo dobrym (zaledwie o 1,39 p.p.) oraz utrzymującej się dominacji poziomu niewystarczającego (56,25%), można konstatować, że bez celowo zaprojektowanych innowacji pedagogicznych rozwój twórczości matematycznej uczniów pozostaje w fazie trwałej stagnacji, ograniczając się jedynie do poprawnej replikacji wyuczonych wzorców.

W grupie kontrolnej dominuje postawa reaktywna i schematyczna; uczniowie opanowują podstawowe algorytmy, jednak ich potencjał kreatywny pozostaje w sferze uśpionej. Bezpośrednie porównanie tych rezultatów z grupą eksperymentalną (gdzie odsetek ocen bardzo dobrych wzrósł do 21,34%) ukazuje wyraźną przewagę empiryczną fotoedukacji. Dowodzi to, że twórczość matematyczna nie rozwija się samoistnie wraz z wiekiem ucznia, a jej stymulacja wymaga metod o wysokiej doniosłości pedagogicznej, które aktywnie przełamują bierność poznawczą i wprowadzają proces uczenia się na poziom operacji nieszablonowych.

Analiza zgromadzonego przeze mnie materiału badawczego dotyczącego twórczości matematycznej pozwala na sformułowanie jednoznacznych wniosków o wysokiej skuteczności innowacji fotoedukacyjnej w kształtowaniu twórczości matematycznej uczniów, definiowanej przeze mnie jako biegłość w stosowaniu autorskich strategii, nieszablonowe przedstawianie zagadnień za pomocą medium fotografii, konstruowanie gier i zagadek logicznych oraz samodzielne projektowanie zadań problemowych - uległa w grupie eksperymentalnej radykalnej transformacji, znacząco dystansując wyniki uzyskane w grupie kontrolnej.

Kluczowym wskaźnikiem potwierdzającym wyraźną przewagę empiryczną innowacji jest dynamika przyrostu wyników na poziomie bardzo dobrym (A). W grupie eksperymentalnej odsetek ten wzrósł z poziomu 3,05% do 21,34%, podczas gdy w grupie kontrolnej progresja była marginalna (z 3,47% do 4,86%). Tak znacząca dyferencjacja statystyczna dowodzi, że tradycyjny model dydaktyczny w niewielkim stopniu aktywizuje potencjał kreatywny dziecka, podczas gdy fotoedukacja pełni rolę katalizatora procesów twórczych. Szczegółowa weryfikacja umiejętności składowych potwierdza prymat grupy eksperymentalnej w każdej z analizowanych obszarów twórczości matematycznej. Dzięki wykorzystaniu inspiracji wizualnej grupa eksperymentalna w projektowaniu zadań (umiejętność 4) osiągnęła poziom 63,41% uczniów, którzy osiągnęli poziom bardzo dobry, przy zaledwie 11,11% w grupie kontrolnej. Implementacja fotoedukacji pozwoliła na skuteczną redukcję lęku przed błędem poznawczym. Odsetek ocen niewystarczających (C) w zakresie tworzenia oryginalnych reprezentacji fotograficznych

spadł w grupie eksperymentalnej z 78,05% do poziomu 17,07%, podczas gdy w grupie kontrolnej deficyty te utrzymały się na poziomie 61,11%. W konstruowaniu *gier, układaniu krzyżówek, rebusów* (umiejętność 3): w grupie objętej eksperymentem standardem dla ponad 80% uczniów stało się osiąganie poziomu co najmniej wystarczającego. W tym samym czasie ponad połowa uczniów z grupy kontrolnej (55,56%) nadal wykazywała trudności z wejściem w rolę twórcy.

Podsumowując, koncepcja fotoedukacji wykazuje wysoką doniosłość pedagogiczną, skutecznie „odblokowując" twórczość matematyczną uczniów na wczesnym etapie edukacyjnym. Podczas gdy grupa kontrolna pozostała w sferze postaw odtwórczych (wykazując 56,25% ocen niewystarczających), grupa eksperymentalna - dzięki metodzie opartej na pracy z obrazem - zredukowała te deficyty do poziomu 18,29%. Dane te potwierdzają, że integracja fotografii z edukacją matematyczną nie tylko optymalizuje proces przyswajania wiedzy, ale przede wszystkim kształtuje postawę badawczą, stanowiąc trwały fundament dla dalszego rozwoju intelektualnego uczniów.

5.5.2. Twórczość matematyczna uczniów klas drugich szkoły podstawowej

W badaniu umiejętności uczniów klas drugich, dotyczącym twórczości matematycznej, wykorzystałam arkusz obserwacji skonstruowany na użytek moich badań. Twórczość matematyczną uczniów badałam na trzech poziomach: A - bardzo dobrym; B - wystarczającym; C - niewystarczającym w następujących obszarach:

1. Stosowanie własnych strategii rozwiązywania zadań.
2. Robienie fotografii przedstawiającej dane zagadnienie w oryginalny sposób.
3. Konstruowanie gier, układanie krzyżówek, rebusów.
4. Układanie zadania i próby jego rozwiązania.

Dane te przedstawiam w tabelach nr 40 i 41.

Tabela 40. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie eksperymentalnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy drugiej w zakresie twórczości matematycznej

	Badania wstępne	*Badania końcowe*

Umiejętności w zakresie twórczości matematycznej	*Poziom ocenianych umiejętności*			*Poziom ocenianych umiejętności*		
	A (w %)	B (w %)	C (w %)	A (w %)	B (w %)	C (w %)
1	*38,30*	*42,55*	*19,15*	*25,53*	*57,45*	*17,02*
2	*29,79*	*53,19*	*17,02*	*17,02*	*61,70*	*21,28*
3	*29,79*	*46,81*	*23,40*	*23,40*	*38,30*	*38,30*
4	*14,89*	*53,19*	*31,91*	*23,40*	*36,17*	*40,43*
Ogółem	***28,19***	***48,94***	***22,87***	***22,34***	***48,40***	***29,26***

A - bardzo dobry; B - wystarczający; C - niewystarczający

1 - Stosuje własne strategie rozwiązywania zadań; 2 - Robi fotografie przedstawiające dane zagadnienie w oryginalny sposób; 3 - Konstruuje gry, układa krzyżówki, rebusy; 4 - Układa zadania i próbuje je rozwiązywać

Źródło: Opracowanie własne na podstawie przeprowadzonych badań

Tabela 41. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie kontrolnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy drugiej w zakresie twórczości matematycznej

Umiejętności w zakresie twórczości mateam-tycznej	BADANIA WSTĘPNE			BADANIA KOŃCOWE		
	Poziom ocenianych umiejętności			Poziom ocenianych umiejętności		
	A (w %)	B (w %)	C (w %)	A (w %)	B (w %)	C (w %)
1	31,48	42,59	25,93	18,52	64,81	16,67
2	24,07	53,70	22,22	14,81	64,81	20,37
3	25,93	48,15	25,93	16,67	48,15	35,19
4	7,41	55,56	37,04	16,67	48,15	35,19
Ogółem	**22,22**	**50,00**	**27,78**	**16,67**	**56,48**	**26,85**

A - bardzo dobry; B - wystarczający; C - niewystarczający

1 - Stosuje własne strategie rozwiązywania zadań; 2 - Robi fotografie przedstawiające dane zagadnienie w oryginalny sposób; 3 - Konstruuje gry, układa krzyżówki, rebusy; 4 - Układa zadania i próbuje je rozwiązywać

Źródło: Opracowanie własne na podstawie przeprowadzonych badań

Analiza danych empirycznych, dotyczących twórczości matematycznej w grupie eksperymentalnej na etapie klasy drugiej ujawnia niepokojący trend hamowania potencjału kreatywnego oraz wyraźną polaryzację kompetencji uczniów. W przeciwieństwie do wcześniejszych etapów edukacyjnych, obecna faza charakteryzuje się regresją wyników najwyższych na rzecz strategii zachowawczych oraz wzrostem obszarów deficytowych. W sferze samodzielności poznawczej odnotowałam zmniejszenie liczby uczniów z poziomu bardzo dobrego (spadek z 38,30% do 25,53 %) na korzyść poziomu wystarczającego (57,45%). Oznacza to, że w obliczu trudniejszego materiału uczniowie stosują sprawdzone metody, co ogranicza ich oryginalność rozwiązywania problemów. Równolegle, w obszarach ekspresji wizualnej oraz konstrukcji gier, układania krzyżówek , rebusów widać wyraźny spadek. Poziom niewystarczający zwiększył się z 23,40% do 38,34 %. Jedynym obszarem wykazującym progresję na poziomie dobrym jest autorskie projektowanie zadań (gdzie odnotowałam wzrost z 14,89% do 23,40%). Zjawisku temu towarzyszy jednak jednoczesny wzrost liczebności grupy o niewystarczających umiejętnościach (40,43%). Świadczy to o silnym rozwarstwieniu grupy badawczej - wykształciła się „elita autorów" matematycznych, podczas gdy niemal połowa grupy nie radzi sobie z wymaganiami tej aktywności. Zbiorcza synteza wyników ogólnych dokumentuje niekorzystną ewolucję postaw twórczych: spadek poziomu bardzo dobrego do 22,34% oraz wzrost poziomu niewystarczającego do 29,26%. Dane te sugerują, że bez modyfikacji wsparcia dydaktycznego, rosnący stopień trudności materiału w klasie drugiej staje się czynnikiem blokującym inwencję matematyczną, prowadząc do dominacji postaw asekuracyjnych i pogłębiania się dystansu kompetencyjnego wewnątrz grupy. W klasie drugiej eksperymentalnej zapał twórczy uczniów uległ weryfikacji przez trudniejszy materiał programowy. Choć połowa grupy nadal radzi sobie dobrze (poziom wystarczający), to spadek wyników bardzo dobrych i wzrost liczby uczniów nieradzących sobie z zadaniami twórczymi (szczególnie wskaźniki 3 i 4) sygnalizują potrzebę dodatkowego wsparcia w rozwijaniu kreatywności na tym etapie. Efekt ten może być spowodowany zbyt krótkim okresem realizacji eksperymentu. Mimo okresowej regresji, porównanie z grupą kontrolną pozwala podtrzymać tezę o wyraźnej przewadze empirycznej fotoedukacji jako narzędzia, które wciąż skuteczniej niż model tradycyjny chroni uczniów przed całkowitą pasywnością poznawczą.

Analiza danych zgromadzonych dla grupy kontrolnej ukazuje niepokojącą dynamikę spadku rozwoju umiejętności twórczych uczniów klasy drugiej. Dominującym trendem, zaobserwowanym w toku badania, jest regres postaw innowacyjnych na poziomie bardzo dobrym oraz postępująca standaryzacja metod pracy, określana jako „bezpieczne uśrednianie" wyników. W przeciwieństwie do grup objętych eksperymentem, tradycyjny system dydaktyczny na

tym etapie edukacyjnym zdaje się tłumić naturalną kreatywność na rzecz odtwórczej poprawności. Najbardziej jaskrawym dowodem osłabienia samodzielności poznawczej są wyniki w zakresie stosowania własnych strategii. Odnotowany spadek ocen bardzo dobrych (z 31,48% do 18,52%) przy jednoczesnym wzroście poziomu wystarczającego z 53,70% do 64,81% sugeruje, że uczniowie świadomie rezygnują z poszukiwania autorskich metod na rzecz bezpiecznych, rutynowych schematów. Zjawisko to, widoczne również w obszarze kreatywnej wizualizacji, gdzie liczba uczniów osiągających kompetencje na poziomie bardzo dobrym w badaniu wstępnym wynosiła 24,07 %, spadła do 14,81%. Świadczy to o tym, że uczniowie coraz rzadziej podejmują próby nieszablonowego łączenia abstrakcji matematycznej z otaczającą ich rzeczywistością. Szczególnie krytycznym punktem analizy jest konstruowanie gier, układanie krzyżówek, rebusów. Obszar ten wykazuje najwyższą dynamikę przyrostu ocen negatywnych (wzrost poziomu niewystarczającego do 35,19%). Dla ponad jednej trzeciej uczniów tworzenie autorskich gier czy rebusów stało się barierą nie do pokonania i dokumentuje istotne deficyty w rozwoju wyobraźni matematycznej i zdolności do operowania strukturą zadania. Niewielki progres zauważalny jest w umiejętności układania zadań i próby ich rozwiązywania. Wzrósł on z 7,41% do 16,67%, przy jednocześni bardzo dużej liczbie uczniów posiadających niewystarczające kompetencje w tym zakresie (35,19% wobec wyjściowych 37,04%). Spadek poziomu bardzo dobrego z 22,22% do 16,67% pozwala na sformułowanie tezy o niewystarczalności tradycyjnego modelu nauczania w stymulowaniu postaw twórczych w klasie drugiej. Obserwowana homogenizacja umiejętności wokół wystarczających umiejętności (poziom B: 56,48%) przy braku niwelowania deficytów sugeruje niepokojące zjawisko. Pod wpływem metod podawczych oraz rosnących wymagań, uczniowie rezygnują z własnej inwencji na rzecz bezpiecznych, schematycznych rozwiązań.

Wyniki zawarte w tabeli nr 41 dla grupy kontrolnej wskazują, że bez wprowadzenia eksperymentu twórczość matematyczna uczniów w klasie drugiej ulega stagnacji lub regresowi. Uczniowie stają się „poprawni" (wzrost poziomu wystarczającego), ale tracą zdolność do nieszablonowego myślenia i inwencji własnej, co jest szczególnie widoczne w spadku wyników o ponad 5 punktów procentowych na poziomie ogólnym bardzo dobrym.

Porównawcza analiza danych empirycznych zgromadzonych w toku badań końcowych w klasie drugiej ujawnia złożony obraz ewolucji umiejętności twórczych. W obu grupach odnotowałam wpływ rosnącego stopnia trudności materiału programowego, jednak charakter odpowiedzi uczniów na te wyzwania wskazuje na wyraźną przewagę empiryczną modelu fotoedukacyjnego nad tradycyjnym. W grupie kontrolnej uczniowie, pod wpływem metod podaw-

czych, wykazują tendencję do rezygnacji z autorskich poszukiwań na rzecz rutynowych schematów. Najbardziej jaskrawym dowodem regresu w tej grupie jest spadek ocen bardzo dobrych w zakresie stosowania własnych strategii (z 31,48% do 18,52%) oraz ogólny spadek notowań najwyższych o ponad 5 punktów procentowych. Tradycyjny system dydaktyczny na tym etapie zdaje się tłumić naturalną kreatywność, co prowadzi do stagnacji i homogenizacji umiejętności wokół poziomu wystarczającego (56,48%), przy jednoczesnym braku skutecznej niwelacji deficytów. Na tym tle grupa eksperymentalna prezentuje odmienną dynamikę, choć również dotkniętą okresowym hamowaniem potencjału kreatywnego. Choć odnotowałam w niej regres wyników najwyższych na rzecz strategii zachowawczych (spadek poziomu A do 22,34%), to w przeciwieństwie do grupy kontrolnej, fotoedukacja zdołała wykształcić „elitę autorów" matematycznych. Przejawia się to w progresji obszaru autorskiego projektowania zadań (wzrost z 14,89% do 23,40%), co przy wyniku grupy kontrolnej (16,67%) potwierdza, że praca z obrazem silniej stymuluje sprawstwo intelektualne.

Dyferencjacja postaw w obu grupach staje się najbardziej wyraźna w obliczu konfrontacji z rosnącym stopniem trudności materiału. W grupie kontrolnej uczniowie stają się „poprawni", lecz odtwórczy, tracąc zdolność do nieszablonowego łączenia abstrakcji z rzeczywistością. W grupie eksperymentalnej natomiast występuje silna polaryzacja umiejętności - mimo wzrostu postaw asekuracyjnych, metoda ta wciąż skuteczniej chroni przed całkowitą pasywnością poznawczą.

Podsumowując, zestawienie wyników obu grup dowodzi wysokiej doniosłości pedagogicznej fotoedukacji jako narzędzia przeciwdziałającego stagnacji twórczej. Choć w klasie drugiej zapał twórczy uległ weryfikacji przez wyzwania programowe, to model eksperymentalny - mimo okresowej regresji spowodowanej prawdopodobnie zbyt krótkim czasem realizacji innowacji - wykazuje znacznie większy potencjał w zakresie podtrzymywania postaw badawczych. Dane te stanowią ostateczny argument, że bez celowych działań aktywizujących, twórczość matematyczna uczniów w klasie drugiej ulega regresowi, a jedynie systematyczna praca z medium wizualnym pozwala na zachowanie autonomii poznawczej ucznia w obliczu rosnących wymagań edukacyjnych.

5.5.3. Twórczość matematyczna uczniów klas trzecich szkoły podstawowej

W badaniu umiejętności uczniów klas trzecich, dotyczącym twórczości matematycznej, wykorzystałam arkusz obserwacji skonstruowany na użytek moich badań. Twórczość matematyczną uczniów badałam na trzech poziomach: A - bardzo dobrym; B - wystarczającym; C - niewystarczającym w następujących obszarach:

1. Stosowanie własnych strategii rozwiązywania zadań.
2. Robienie fotografii przedstawiającej dane zagadnienie w oryginalny sposób.
3. Konstruowanie gier, układanie krzyżówek, rebusów.
4. Układanie zadania i próby jego rozwiązania.

Dane te przedstawiam w tabelach 43 i 44.

Tabela 43. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie eksperymentalnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy trzeciej w zakresie twórczości matematycznej

Umiejętności w zakresie twórczości matematycznej	**Badania wstępne**			**Badania końcowe**		
	Poziom ocenianych umiejętności			Poziom ocenianych umiejętności		
	A (w %)	B (w %)	C (w %)	A (w %)	B (w %)	C (w %)
1	7,32	51,22	41,46	43,90	46,34	9,76
2	26,83	48,78	24,39	73,17	24,39	2,44
3	12,20	43,90	43,90	48,78	48,78	2,44
4	41,46	31,71	26,83	65,85	31,71	2,44
Ogółem	**21,95**	**43,90**	**34,15**	**57,93**	**37,80**	**4,27**

A - bardzo dobry; B - wystarczający; C - niewystarczający

1 - Stosuje własne strategie rozwiązywania zadań; 2 - Robi fotografie przedstawiające dane zagadnienie w oryginalny sposób; 3 - Konstruuje gry, układa krzyżówki, rebusy; 4 - Układa zadania i próbuje je rozwiązywać

Źródło: Opracowanie własne na podstawie przeprowadzonych badań własnych

Tabela 44. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie kontrolnej – ocena umiejętności badanych uczniów klasy trzeciej w zakresie twórczości matematycznej

Umiejętności w zakresie twórczości matematycznej	Badania wstępne			Badania końcowe		
	Poziom ocenianych umiejętności			Poziom ocenianych umiejętności		
	A (w %)	B (w %)	C (w %)	A (w %)	B (w %)	C (w %)
1	9,52	73,81	16,67	28,57	66,67	4,76
2	26,19	66,67	7,14	40,48	59,52	0,00
3	14,29	50,00	35,71	21,43	78,57	0,00
4	45,24	38,10	16,67	45,24	54,76	0,00
Ogółem	**23,81**	**57,14**	**19,05**	**33,93**	**64,88**	**1,19**

A - bardzo dobry; B - wystarczający; C - niewystarczający

1 - Stosuje własne strategie rozwiązywania zadań; 2 - Robi fotografie przedstawiające dane zagadnienie w oryginalny sposób; 3 - Konstruuje gry, układa krzyżówki, rebusy; 4 - Układa zadania i próbuje je rozwiązywać

Źródło: Opracowanie własne na podstawie przeprowadzonych badań

Wyniki badań własnych zawarte w tabeli nr 44, dotyczące grupy eksperymentalnej, pokazują, że stosowanie własnych strategii rozwiązywania zadań to umiejętność, gdzie odnotowano najbardziej dynamiczną transformację jakościową, przejawiającą się sześciokrotnym przyrostem wyników na poziomie bardzo dobrym (z 7,32% do 43,90%). Tak znacząca zmiana dokumentuje wyraźną przewagę empiryczną fotoedukacji, która skutecznie stymuluje autonomię poznawczą i ośmiela uczniów do porzucania rutynowych algorytmów na rzecz autorskich poszukiwań. Robienie fotografii przedstawiających zagadnienie w oryginalny sposób (Umiejętność 2), będąc kluczową sprawnością dla eksperymentu, osiągnęło najwyższy pułap biegłości. Aż 73,17% uczniów uzyskało umiejętności na poziomie bardzo dobrym. Prawie całkowita eliminacja deficytów (spadek poziomu C do 2,44%) potwierdza wysoką doniosłość pedagogiczną metody, która uczyniła z fotografii naturalny i precyzyjny język ekspresji matematycznej. W sferze tworzenia gier, układania krzyżówek i rebusów (Umiejętność 3), nastąpił czterokrotny wzrost najwyższych notowań (z 12,20% do 48,78%). Wynik ten dowodzi, że integracja obrazu z matematyką pozwala uczniom na sprawne operowanie strukturą zadania i budowanie złożonych korelacji logicznych, co w tradycyjnym modelu nauczania jest niezwykle trudne do

osiągnięcia na tak dużą skalę. Umiejętność w zakresie układania zadań i prób ich rozwiązywania (Umiejętność 4), stała się domeną 65,85% uczniów, którzy osiągnęli ją na poziomie bardzo dobrym. Marginalizacja wyników niewystarczających (z 26,83% do 2,44%) stanowi ostateczny argument potwierdzający, że fotoedukacja nadaje procesowi uczenia się realny kontekst, przekształcając ucznia z odtwórcy w świadomego autora treści. Sumaryczne zestawienie wszystkich umiejętności w klasie trzeciej w grupie eksperymentalnej wykazuje, że fotoedukacja nie tylko poprawiła statystyczne wskaźniki sukcesu, ale przede wszystkim doprowadziła do jakościowej zmiany postaw uczniów. Wyraźna przewaga empiryczna we wszystkich czterech kategoriach oraz wysoka doniosłość pedagogiczna uzyskanych efektów potwierdzają, że fotoedukacja matematyczna jest kompletnym narzędziem rozwijającym inwencję i twórcze myślenie u progu drugiego etapu edukacyjnego.

Analiza wyników uzyskanych przez uczniów klasy trzeciej w grupie kontrolnej (tabela nr 45) wskazuje na umiarkowaną dynamikę rozwoju umiejętności twórczych w ramach tradycyjnego modelu kształcenia. Choć w badaniu końcowym odnotowałam wzrost odsetka ocen bardzo dobrych (ogółem) z poziomu 23,81% do 33,93%, to w zestawieniu z rezultatami grupy eksperymentalnej trudno przypisać tym zmianom cechę wysokiej doniosłości pedagogicznej. W umiejętności stosowania własnych strategii odnotowałam wzrost notowań najwyższych z 9,52% do 28,57%. Mimo pozytywnej tendencji, większość uczniów (66,67%) pozostała na poziomie wystarczającym, co sugeruje trudność w pełnym przełamaniu schematyzmu bez dodatkowych bodźców innowacyjnych. Wzrosła kompetencja uczniów w zakresie oryginalności reprezentacji matematycznej (2) z 26,19% do 40,48% na poziomie bardzo dobrym. Jest to wynik satysfakcjonujący, jednak znacząco ustępuje on efektom uzyskanym dzięki fotoedukacji. W obszarze układania gier i rebusów nastąpił przyrost umiejętności na poziomie bardzo dobrym (z 14,29% do 21,43%). Dominującym trendem stało się „uśrednianie" kompetencji do poziomu wystarczającego (wzrost z 50,00% do 78,57%). W kategorii układania zadań i podejmowania prób ich rozwiązania odnotowałam całkowitą stagnację na poziomie bardzo dobrym, który w obu badaniach utrzymał się na identycznym pułapie 45,24%. Brak progresu w tym kluczowym wskaźniku kreatywności jest symptomatyczny dla tradycyjnych metod nauczania.

Reasumując, analiza danych grupy kontrolnej wykazuje brak wyraźnej przewagi empirycznej tradycyjnego modelu edukacji w zakresie stymulowania postaw twórczych. Choć nastąpiła niemal całkowita niwelacja wyników niewystarczających (spadek ogólny do 1,19%), to proces ten odbył się głównie poprzez przesunięcie uczniów do grupy o kompetencjach zaledwie wystarczających (wzrost poziomu B do 64,88%). Wyniki te potwierdzają, że bez wprowadzenia celowej innowacji, rozwój inwencji matematycznej uczniów klas trzecich ma charakter liniowy

i ograniczony, nie osiągając skali przełomu jakościowego obserwowanego w grupie eksperymentalnej.

Porównanie danych empirycznych początkowych i końcowych uzyskanych w grupie eksperymentalnej i kontrolnej uczniów klas trzecich dostarcza jednoznacznych dowodów na to, że wdrożenie innowacyjnej koncepcji fotoedukacji generuje wyraźną przewagę empiryczną w zakresie kształtowania postaw kreatywnych względem modelu tradycyjnego. W grupie eksperymentalnej odnotowałam dużą progresję wyników na poziomie wystarczającym i bardzo dobrym, gdzie wzrost ogólny z 21,95% do 57,93% stanowi o wysokiej doniosłości pedagogicznej podjętych działań, przy jednoczesnej marginalizacji obszarów deficytowych i spadku poziomu C do zaledwie 4,27%. Szczególny sukces i wyraźną przewagę empiryczną odnotowałam w zakresie przedstawienia zagadnienia w oryginalny sposób, w którym aż 73,17% uczniów posiada umiejętności na poziomie wystarczającym i bardzo dobrym oraz w projektowaniu autorskich zadań, w którym to obszarze 65,85% badanych osiągnęło wysokie wskaźniki. Wyniki te potwierdzają pozytywną rolę fotoedukacji, która trwale przekształca uczniów z odtwórców w świadomych autorów treści matematycznych. W grupie kontrolnej odnotowałam wprawdzie pewien przyrost wyników bardzo dobrych z 23,81% do 33,93%, jednak ma on jedynie charakter liniowy, co w zestawieniu z grupą eksperymentalną ukazuje jej wyraźną przewagę empiryczną. Dominującym trendem w grupie kontrolnej dla umiejętności w zakresie twórczości matematycznej był poziom wystarczający (64,88%), przy jednoczesnej stagnacji w zakresie umiejętności układania zadań, gdzie nie zarejestrowano żadnej dynamiki wzrostowej na poziomie wystarczającym i bardzo dobrym, co ostatecznie dowodzi wysokiej doniosłości pedagogicznej fotoedukacji jako narzędzia przełamującego schematy nauczania tradycyjnego.

Przeprowadzone badania, zarówno za pomocą testu, jak i obserwacji, pozwalają przyjąć, że fotoedukacja matematyczna stanowi wartościowe uzupełnienie tradycyjnych metod nauczania. Jej zastosowanie w nauczaniu matematyki w klasach I-III sprzyja aktywizacji uczniów oraz wspiera rozwój umiejętności językowych, wyobraźni matematycznej, elegancji matematycznej i twórczości matematycznej. Kontakt z obrazem fotograficznym stwarza uczniom okazję do obserwacji, porównywania, analizowania oraz poszukiwania różnych sposobów rozwiązania problemu, co wzmacnia ich samodzielność poznawczą, kreatywność oraz dążenie do porządkowania własnych działań. Metoda ta przyczynia się do kształtowania estetyki zapisu, logicznego porządkowania rozwiązań, umiejętności optymalizowania działań oraz twórczego stawiania pytań. Istotne zmiany dotyczyły umiejętności prezentowania rozwiązań w sposób upo-

rządkowany i logiczny, zadawania pytań świadczących o poszukiwaniu optymalnych rozwiązań oraz dokonywania wyboru rozwiązań prostszych i bardziej efektywnych. Przeprowadzone badania wykazały, że zarówno w grupie eksperymentalnej, jak i kontrolnej nastąpił wzrost poziomu umiejętności związanych z poszczególnymi komponentami kultury matematycznej. Skala i charakter zaobserwowanych zmian były wyraźnie zróżnicowane. Analiza wyników pokazała, że znacznie większą dynamikę rozwoju odnotowano w grupie eksperymentalnej, w której proces kształcenia został wzbogacony o elementy fotoedukacji matematycznej. Uzyskane rezultaty potwierdzają wysoką wartość pedagogiczną tej metody i wskazują na zasadność jej szerszego wykorzystania w edukacji matematycznej uczniów klas pierwszych, drugich i trzecich szkoły podstawowej.

Zakończenie

Proces nauczania i uczenia się matematyki w klasach I–III znajduje się w punkcie zwrotnym, w którym tradycyjne metody podające ustępują miejsca paradygmatom opartym na wizualizacji i działaniu. Współczesna dydaktyka stoi u progu redefinicji roli narzędzi wizualnych w naukach ścisłych. Fotoedukacja matematyczna jawi się w tym kontekście jako innowacyjne podejście, które wykracza poza tradycyjne ramy tablicy i kredy, oferując nauczycielom instrumentarium umożliwiające transformację klasycznego modelu lekcji w dynamiczny proces odkrywczy. Integracja fotografii z edukacją nie jest jedynie zabiegiem estetycznym, lecz strategicznym działaniem, mającym na celu osadzenie abstrakcyjnych pojęć w namacalnej rzeczywistości. Kluczowym elementem tej metody jest zmiana perspektywy ucznia, który przestaje być biernym odbiorcą wiadomości, a staje się aktywnym obserwatorem otoczenia. Poprzez realizację projektów fotograficznych uczniowie uczą się dostrzegać matematyczne aspekty w codziennym życiu – od geometrii architektury po fraktalne struktury natury. Takie samodzielne doświadczanie matematyki sprzyja znacznie efektywniejszemu przyswajaniu wiedzy, ponieważ buduje trwałe połączenia między teorią a praktyką[11]. Włączenie fotoedukacji do procesu nauczania – uczenia się przekłada się bezpośrednio na jakość kształcenia, przygotowując młodych ludzi do wyzwań współczesnego świata, w którym umiejętność analizy danych wizualnych staje się kompetencją kluczową.

W dobie gwałtownego rozwoju technologii i rosnącej popularności nauczania opartego na projektach, fotoedukacja staje się naturalnym pomostem między światem cyfrowym a szkolną ławą. Pozwala ona na rozwijanie kreatywności uczniów w sposób spójny z ich naturalnymi zainteresowaniami, wykorzystując powszechnie dostępne narzędzia, takie jak smartfony czy tablety do celów poznawczych[12]. Dzięki temu matematyka przestaje być postrzegana jako dziedzina hermetyczna, stając się obszarem twórczej ekspresji. Fotoedukacja wyposaża uczniów w konkretne umiejętności matematyczne, kształtuje postawę badawczą, niezbędną do funkcjonowania w społeczeństwie.

Przeprowadzone przeze mnie badania empiryczne, realizowane w grupach eksperymentalnych i kontrolnych na poszczególnych poziomach, pozwoliły mi na sformułowanie tezy, mó-

[11] Bruner J., Proces kształcenia, Warszawa 2006, s. 42–48 (w zakresie znaczenia aktywnego odkrywania i struktury wiedzy w procesie uczenia się).
[12] Plebańska M., Polska szkoła w dobie cyfryzacji, Warszawa 2017, s. 112–115 (dotyczący wykorzystania technologii mobilnych w kształtowaniu postaw kreatywnych u uczniów).

więcej, że wdrożenie modelu fotoedukacji matematycznej Profesor Małgorzaty Makiewicz stanowi przełomowy czynnik w kształtowaniu nie tylko sprawności rachunkowej, ale całej kultury matematycznej dziecka, we wszystkich jej obszarach. Wyniki te osadzone są w rygorystycznych ramach psychodydaktycznych prof. Edyty Gruszczyk-Kolczyńskiej. Dowodzą, że obraz fotograficzny pełni rolę pomostu ułatwiającego przejście od myślenia konkretno-obrazowego do abstrakcyjnego operowania symbolem. Jak słusznie zauważa Małgorzata Makiewicz, „fotografia w edukacji matematycznej nie jest jedynie ilustracją, lecz specyficznym modelem rzeczywistości, który pozwala uczniowi na zatrzymanie ulotnego zjawiska i poddanie go wielokrotnej analizie logicznej”[13]. To właśnie ta możliwość „zatrzymania czasu” w kadrze pozwoliła badanym przeze mnie dzieciom na głębszą refleksję nad strukturą liczb i figur, co widać w przyrostach wyników we wszystkich klasach, w których wprowadzono koncepcję fotoedukacji.

Fotoedukacja matematyczna jest nowatorskim podejściem do nauczania i uczenia się matematyki. Łączy ona elementy fotografii z matematyką. Dzięki wykorzystaniu zdjęć można przedstawić złożone koncepty matematyczne w bardziej przystępny sposób. Opiera się ona na poznawczej koncepcji człowieka, w myśl której uczeń tworzy własne struktury poznawcze, wychodząc poza informacje dostarczone z zewnątrz. Ponadto dąży do osiągnięcia wyższych poziomów ogólności poprzez stopniowe odrywanie się od konkretów otaczających go przedmiotów[14]. Celem jej jest ułatwienie uczniom zrozumienia treści matematycznych, zwiększenie zaangażowania, rozwój umiejętności analitycznych oraz kreatywności, a także wzrost odpowiedzialności uczniów za proces uczenia się. Współczesna edukacja stoi przed wyzwaniem znalezienia języka, który skutecznie połączy teorię z dynamicznie zmieniającą się rzeczywistością uczniów. W tym kontekście fotoedukacja w nauczaniu matematyki przestaje być jedynie estetycznym dodatkiem, a staje się fundamentem nowoczesnej dydaktyki, pozwalającym na głębsze i bardziej trwałe przyswajanie wiedzy.

Głównym atutem włączenia fotografii do procesu lekcyjnego jest zdolność wizualizacji pojęć abstrakcyjnych, które dla wielu uczniów stanowią barierę nie do przejścia. Obraz fotograficzny pozwala „zobaczyć” matematykę tam, gdzie dotąd istniały jedynie suche wzory. Przekładając skomplikowane struktury na konkretne obrazy z otoczenia, nauczyciel demistyfikuje przedmiot, czyniąc go bardziej przystępnym. Takie podejście nie tylko ułatwia zrozumienie materiału, ale przede wszystkim drastycznie zwiększa motywację wewnętrzną młodzieży. Wykorzystanie interaktywnych i twórczych metod nauczania angażuje emocjonalnie, co w pro-

[13]Makiewicz M., Matematyka w obiektywie. Fotografia jako narzędzie edukacyjne, Szczecin 2012, s. 15.
[14] Zob. Kozielecki J., Koncepcje psychologiczne człowieka, Warszawa 1987.

cesie kognitywnym jest kluczowe dla efektywnego zapamiętywania. Równolegle z nauką samej dyscypliny, fotoedukacja staje się miejscem doświadczeń dla rozwoju biegłości technologicznej. Uczniowie, korzystając z narzędzi cyfrowych do tworzenia i edycji zdjęć, naturalnie rozwijają kompetencje niezbędne w dorosłym życiu. To przygotowanie wykracza poza czysto techniczne aspekty; uczy ono krytycznego spojrzenia na matematykę w kontekście rzeczywistym i praktycznym. Dzięki temu młody człowiek zaczyna dostrzegać symetrię, geometrię czy statystykę w architekturze, przyrodzie i codziennych sytuacjach, co czyni go bardziej świadomym obywatelem cyfrowego świata.

Ostatecznie praca z obrazem w edukacji matematycznej sprzyja kształtowaniu kluczowych kompetencji XXI wieku. Realizacja wspólnych projektów fotograficznych wymaga od uczniów negocjowania znaczeń, wspólnego rozwiązywania problemów oraz nieszablonowego myślenia. Matematyka przestaje być wtedy indywidualnym zmaganiem z kartką papieru, a staje się płaszczyzną do budowania relacji i wymiany myśli. W ten sposób fotoedukacja łączy nauki ścisłe z humanistycznym wymiarem rozwoju osobistego, przygotowując uczniów do funkcjonowania w świecie, który wymaga nie tylko wiedzy, ale przede wszystkim umiejętności jej twórczego zastosowania[15].

Analiza sprawności rachunkowej na wczesnym etapie kształcenia w klasach pierwszych wykazała, że fotoedukacja odegrała bardzo istotną rolę w kształtowaniu kultury matematycznej. Spowodowała podniesienie średniej liczby punktów z 7,82 do 8,83. W tym samym czasie, gdy grupa eksperymentalna odniosła sukces, w kontrolnej, pracującej metodami tradycyjnymi, przyrost ten był znikomy i wyniósł jedynie 0,09 punktu procentowego. Tak znacząca różnica potwierdza tezę prof. Edyty Gruszczyk-Kolczyńskiej, która alarmuje, że „szkoła zbyt szybko narzuca dzieciom język symboli, zapominając, że matematyka dla dziecka to przede wszystkim czynność, ruch i manipulacja”[16]. Fotoedukacja, jak wynika z moich badań, stała się formą eksploracji wizualnej, która pozwoliła dzieciom „zobaczyć” operacje matematyczne przed ich zapisaniem. Dzięki temu w grupie eksperymentalnej klas pierwszych udało się zredukować odsetek uczniów posiadających umiejętności w niewystarczającym zakresie, wynoszącym 40,49% do 14,88%. Jest to dowód, że obraz stał się dla najmłodszych „materiałem dowodowym” wspierającym świadomą argumentację matematyczną, co bezpośrednio koresponduje z postulatem Edyty Gruszczyk-Kolczyńskiej o konieczności budowania dojrzałości do uczenia się matematyki poprzez konkretne doświadczenia.

[15] Plebańska M., Nowa edukacja. Uczenie (się) w świecie nowoczesnych technologii, Warszawa 2017, s. 45-52 (w zakresie wpływu narzędzi cyfrowych na rozwój kompetencji kluczowych).
[16] Gruszczyk-Kolczyńska E., Dziecięca matematyka – dwadzieścia lat później, Warszawa 2015, s. 45.

Najbardziej widoczne jest oddziaływanie fotoedukacji na sprawności matematyczne u uczniów klas drugich. Analiza wyników pokazała wzrost średniej liczby punktów uzyskanych w badaniu testowym z 7,17 do 9,16 punktu. Imponujące są także wskaźniki siły efektu d_ Cohena, osiągające wartości 1,22 oraz 1,35. Stanowią twardy, matematyczny dowód na skuteczność koncepcji fotoedukacji. W tym wieku dzieci zaczynają operować na większych zbiorach, a ich myślenie staje się bardziej krytyczne. Małgorzata Makiewicz podkreśla, że „matematyzowanie otoczenia poprzez kadr aparatu uczy dziecko selekcji informacji i dostrzegania porządku tam, gdzie pozornie go nie ma”[17]. W grupie badawczej klas drugich odnotowałam zmniejszenie wyników niewystarczających, które spadły z 44,26% do 6,17%, podczas gdy w grupie kontrolnej jest stagnacja, a nawet regres w zakresie ocen bardzo dobrych (spadek z 26,30% do 25,00%). Potwierdza to obawy prof. E. Gruszczyk-Kolczyńskiej, że „tradycyjne nauczanie często blokuje naturalne uzdolnienia dzieci, zmuszając je do odtwarzania schematów, których nie rozumieją”[18]. Fotoedukacja pozwoliła uczniom na osiągnięcie biegłości zwłaszcza w wyjaśnianiu istoty działań (46,81% ocen bardzo dobrych) oraz znajomości znaków matematycznych (82,98% ocen bardzo dobrych).

Szczególnie istotnym obszarem moich badań był rozwój języka matematycznego, który obok sprawności matematycznej, traktuję jako fundament późniejszych sukcesów edukacyjnych. Przeprowadzona analiza porównawcza efektów dowiodła, że implementacja modelu fotoedukacyjnego stanowiła kluczowy czynnik stymulujący ewolucję myślenia uczniów - od poziomu konkretno-obrazowego do biegłości w posługiwaniu się abstrakcyjnymi konstruktami. W klasach trzecich, aż 65,12% uczniów grupy eksperymentalnej zdobyło umiejętność posługiwania się językiem matematycznym na poziomie bardzo dobrym, co stanowi znaczącą przewagę nad grupą kontrolną (47,38%). Uczniowie objęci innowacją wykazali się szczególną sprawnością w rozumieniu poleceń (82,93% grupy osiągnęło umiejętności na poziomie bardzo dobrym), co jest bezpośrednim efektem pracy z fotografią. Jak zauważa prof. Edyta Gruszczyk-Kolczyńska, „precyzyjne nazywanie relacji i związków jest warunkiem koniecznym dla uświadomienia sobie przez dziecko reguł, którymi rządzi się świat liczb”[19]. Fotoedukacja dostarczyła badanym uczniom pretekstu do rozmowy o matematyce, czyniąc ją językiem żywym i użytecznym.

[17]Makiewicz M., Fotoedukacja matematyczna: od inspiracji do interpretacji, Szczecin 2015, s. 32.
[18] Gruszczyk-Kolczyńska E., O dzieciach uzdolnionych matematycznie, Warszawa 2012, s. 58.
[19] Gruszczyk-Kolczyńska E., Zielińska E., Wspomaganie rozwoju matematycznego dzieci, Warszawa 2000, s. 142.

Kolejnym filarem moich rozważań jest kształtowanie wyobraźni matematycznej. Wyniki w klasach pierwszych, gdzie odsetek uczniów na poziomie bardzo dobrym wzrósł z 4,88% do 29,27%, przy jednoczesnym spadku poziomu niewystarczającego z 63,41% do 13,01%, dowodzą, że systematyczna praca ze zdjęciem trwale podnosi jakość wizualizacji. Jeszcze silniejszy efekt zaobserwowałam w klasach drugich, gdzie w grupie eksperymentalnej całkowicie wyeliminowano niewystarczający poziom umiejętności uczniów (0,00%). Bardzo dobry zaś poziom umiejętności osiągnęło 68,09 % uczniów, podczas gdy grupa kontrolna uzyskała wynik 43,21% uczniów na tym poziomie. Zdolność do wykonywania zdjęć na temat „Matematyka w fotografii" w klasach trzecich w grupie eksperymentalnej na poziomie bardzo dobrym osiągnęło 80,49% uczniów. To pokazuje, że uczeń wykorzystujący zdjęcia do uczenia się matematyki widzi strukturę świata zupełnie inaczej. Małgorzata Makiewicz twierdzi, że „proces matematyzacji świata poprzez fotografię sprzyja rozwijaniu wyobraźni geometrycznej oraz umiejętności dostrzegania analogii, co stanowi istotę twórczego myślenia"[20]. Moje dane potwierdzają te słowa: różnica w najwyższych notach między grupami w zakresie wizualizacji w klasie trzeciej wyniosła ponad 22 punkty procentowe na korzyść fotoedukacji.

W badaniu kultury matematycznej nie mogłam pominąć aspektu elegancji matematycznej, którą rozumiem jako dbałość o estetykę zapisu, uporządkowane i logiczne prezentowanie rozwiązania i poszukiwanie optymalnych strategii rozwiązania. W klasach pierwszych grupa eksperymentalna zredukowała poziom niewystarczający w tej umiejętności z 68,90% do 23,17%, osiągając również bardzo doby poziom umiejętności u 31,71% badanych (wobec zaledwie 2,78% w grupie kontrolnej). W klasach drugich dbałość o czytelność i estetykę zapisu w grupie objętej innowacją pokazuje, że aż 89,36% uczniów osiągnęło tę umiejętność w zakresie bardzo dobrym. E. Gruszczyk-Kolczyńska wskazuje, że „elegancja w matematyce to nie tylko ładne pismo, to przede wszystkim klarowność myślenia i zdolność do selekcji ważnych informacji"[21]. Moje badania dowodzą, że fotoedukacja stymuluje tę potrzebę porządku. W klasach drugich umiejętność proponowania prostszego rozwiązania wzrosła do 36,17%, co świadczy o tym, że uczniowie zaczęli postrzegać matematykę jako przestrzeń dla estetycznej i logicznej elegancji.

Szczególnie wartościowych konkluzji dostarczyła analiza otrzymanych wyników badań dotyczących wyobraźni matematycznej, która wykazała, że systematyczne włączanie elemen-

[20] Makiewicz M., Dydaktyczne aspekty fotografii w nauczaniu matematyki, „Dydaktyka Matematyki" 2012, nr 34, s. 85.
[21] Gruszczyk-Kolczyńska E., Dziecięca matematyka. Program edukacji matematycznej, Warszawa 2013, s. 89.

tów fotoedukacji trwale podnosi jakość myślenia matematycznego, czyniąc je bardziej elastycznym i świadomym. W klasach pierwszych (grupie eksperymentalnej), aż 63,41% uczniów wykazało się bardzo dobrym stopniem opanowania umiejętności układania i rozwiązywania zadań. W klasach trzecich twórczość stała się integralnym elementem procesu uczenia się. W grupie eksperymentalnej 57,93% uczniów opanowało tę umiejętność na poziomie bardzo dobrym, redukując poziom niewystarczający do zaledwie 4,27%. Uczniowie pracujący z fotografią zdominowali rówieśników w oryginalności przedstawiania zagadnień (73,17% uczniów na poziomie bardzo dobrym, wobec 40,48% w grupie kontrolnej). Tak wyraźne różnice dowodzą, że fotoedukacja trwale podnosi jakość myślenia matematycznego, czyniąc je bardziej elastycznym. Małgorzata Makiewicz słusznie zauważa, że „estetyka obrazu łagodzi surowość matematycznych reguł, czyniąc je bardziej przystępnymi i atrakcyjnymi”[22]. Z perspektywy prof. Edyty Gruszczyk-Kolczyńskiej, jest to klucz do budowania odporności emocjonalnej, gdyż dziecko, które tworzy matematykę (układa zadania, fotografuje je), przestaje się jej bać.

Zastosowana koncepcja fotoedukacji powinna się stać stałym narzędziem warsztatu każdego nauczyciela edukacji wczesnoszkolnej, ponieważ determinuje wieloaspektowo kluczowe obszary rozwoju ucznia. Dzięki niej sprawność rachunkowa dzieci w klasach 1-3, przestaje być tylko mechanicznym operowaniem na liczbach. Fotoedukacja pozwala uczniom na „widzenie” struktur ilościowych i relacji. Realnie przekłada się to na biegłość liczenia i wybór skutecznych strategii. Empirycznym potwierdzeniem wysokiej efektywności tej metody jest znacząca progresja średnich wyników odnotowana w grupach eksperymentalnych na każdym etapie badania. Również kluczową rolę odgrywa w kształtowaniu języka matematycznego. Fotografia stanowi dla dziecka wizualny fundament argumentacji, stając się bezpośrednim bodźcem do precyzyjnego definiowania relacji matematycznych i samodzielnego generowania pytań, co trwale usuwa przeszkody poznawcze w kontakcie z abstrakcyjną terminologią. W obszarze elegancji matematycznej wizualizacja problemu naturalnie wymusza na uczniu porządkowanie zapisu i dbałość o estetykę prezentowanych rozwiązań, skłaniając go do poszukiwania strategii najprostszych i najbardziej przejrzystych. Fotoedukacja staje się także potężnym stymulatorem twórczości, daje dzieciom prawo do autorskiej interpretacji rzeczywistości i samodzielnego układania zadań na podstawie własnych zdjęć, co przeciwdziała spadkowi kreatywności w późniejszych etapach nauki. Powyższe efekty są silnie osadzone w rozwoju wyobraźni matematycznej, gdzie obraz staje się narzędziem ułatwiającym strukturyzację pojęć przestrzennych.

[22] Makiewicz M., Kultura wizualna w edukacji matematycznej, Kraków 2018, s. 201

Przekłada się to bezpośrednio na sukces edukacyjny, mierzony znaczącą redukcją deficytów kompetencyjnych i ocen negatywnych.

Podczas realizacji zajęć z fotoedukacji matematycznej uczniowie wykazali się niezwykłą kreatywnością, wykonując łącznie 160 fotografii. Wybrane z nich, zostały zgłoszone do XV Konkursu „Matematyka w Obiektywie". Zgromadzony materiał wizualny posłużył do stworzenia autorskiego „Banku fotografii", stanowiącego cenne zaplecze dydaktyczne wykorzystywane podczas bieżących zajęć w szkole w Szewnie. Spośród wszystkich prac wyselekcjonowałam trzydzieści obrazów, które wraz z nadanymi przez dzieci tytułami oraz moim komentarzem merytorycznym zostały włączone do niniejszej pracy (patrz aneks). Stanowią one element inspirujący do konstruowania przez nauczycieli takich sytuacji edukacyjnych, w których uczeń ma szansę rozwijać wszystkie elementy kultury matematycznej. Takie działanie potwierdza tezę, iż „proces wizualizacji pojęć matematycznych na bazie otoczenia bliskiego dziecku pozwala na trwałe zakorzenienie wiedzy w jego strukturach poznawczych"[23]. Sześć wybranych scenariuszy, które zamieściłam w pracy (patrz aneks), stanowi praktyczną egzemplifikację tego, jak fotografia staje się pomostem między abstrakcyjnym światem liczb a codzienną percepcją dziecka.

Fotoedukacja powinna być stosowana również w pracy z uczniami wykazującymi trudności w zrozumieniu terminologii, ponieważ pozwala na budowanie wiedzy w oparciu o konkretne reprezentacje wizualne. Stosowanie fotografii jako naturalnego łącznika przez cały okres nauki wczesnoszkolnej ułatwia uczniom płynne przekładanie obrazu na język symboli. Niniejsza praca stanowi zatem nie tylko dowód skuteczności tej metody, ale przede wszystkim apel o humanizację edukacji matematycznej. Jak pisała prof. Edyta Gruszczyk-Kolczyńska, „ratowanie dzieci przed porażką matematyczną to obowiązek każdego pedagoga"[24]. Fotoedukacja okazuje się jednym z najskuteczniejszych narzędzi realizacji tego obowiązku, pozwalając każdemu dziecku stać się odkrywcą porządku wszechświata uwiecznionego w kadrze aparatu. Wyposaża ponadto uczniów w kompetencje niezbędne w nowoczesnym społeczeństwie informacyjnym, dając im jednocześnie poczucie sprawstwa i wysoką satysfakcję z procesu uczenia się. Niweluje negatywne emocje towarzyszące nauce matematyki. Świadczą o tym także dane statystyczne, uzyskane podczas ewaluacji zajęć i wypowiedzi uczniów, które zamieszczam poniżej w części zatytułowanej: *Matematyka widziana oczami uczniów.*

[23] M. Makiewicz M.,. Dydaktyczne aspekty fotografii matematycznej. Szczecin 2012, s. 45.
[24] Gruszczyk-Kolczyńska E., Dziecięca matematyka – dwadzieścia lat później, Warszawa 2015, s. 12.

Matematyka widziana oczami uczniów

Dzieci lubią fotografować otaczającą rzeczywistość, o tym świadczy przeprowadzona przez nauczycieli w każdej grupie eksperymentalnej ewaluacja zajęć. Przykładem jest fotografia nr 23, która została wykonana przez nauczycielkę prowadzącą fotoedukację. Po zakończeniu zajęć, nauczycielka poprosiła uczniów, aby na tablicy przykleili kartkę z wybranym przez siebie kolorem, który oznaczał aprobatę fotografowania matematyki lub jej brak (Fot. nr 23).



Fotografia 23.Opinie uczniów klasy drugiej eksperymentalnej na temat fotografowania matematyki

Autor fotografii: Nauczyciel ZSP w Szewnie

Kolor zielony – bardzo lubię; *Kolor żółty- nie bardzo;* *Kolor czerwony- nie lubię*

Otrzymane przeze mnie dane pokazały, że 89% uczniów w klasie eksperymentalnej, podczas ewaluacji zajęć odpowiedziało, że lubi szukać konstruktów matematycznych wokół siebie, tylko 0,11 % że nie bardzo. Pozytywnym elementem zastosowania fotoedukacji jest brak opinii negatywnych, co świadczy o dobrym odbiorze uczniów klas I-III, odnośnie zastosowania tej koncepcji w edukacji matematycznej.

Fotografia jest skutecznym narzędziem, które pomaga uczniom zrozumieć treści matematyczne. Potwierdzają to liczby zawarte w tabeli nr 45.

Tabela 45. Opinie uczniów klas I-III uczniów klas eksperymentalnych na temat roli fotoedukacji w zgłębieniu wiadomości matematycznych

Klasa	Czy fotografia pomogła ci w zrozumieniu lekcji matematyki? 				
	Bardzo pomogła	*Pomogła*	*Raczej pomogła*	*Mało pomogła*	*Nie pomogła*
1a	23	1	0	0	0
1b	15	0	1	0	1
2a	11	8	6	0	0
2b	15	5	1	1	0
3a	5	10	5	0	0
3b	14	2	3	2	0
Razem	83	26	16	3	1

Źródło: Opracowanie własne[25]

Przedstawione wyniki w tabeli nr 45 potwierdzają bardzo wysoką skuteczność fotoedukacji w nauczaniu matematyki uczniów klas I-III. Łącznie w badaniu wzięło udział 129. uczniów trzech grup eksperymentalnych. Aż 125 uczniów (ok. 97%) oceniło, że fotografia *bardzo pomogła* lub *pomogła* im w zrozumieniu treści matematycznych. Tak wysoki wskaźnik aprobaty jest dowodem, że wizualizacja zagadnień matematycznych jest dla dzieci narzędziem intuicyjnym i niezwykle pomocnym w procesie dydaktycznym. Tylko jedna osoba (0,8%) stwierdziła, że fotografia nie pomogła jej wcale, a 3 (2,3%) uczniów uznało ją za mało pomocną. Dane te są dowodem, że fotoedukacja wspiera procesy poznawcze i powinna być stałym elementem edukacji wczesnoszkolnej. Wizualne przedstawienie pojęć i odszukanie ich w realnym świecie ułatwiają uczniom przyswojenie wiedzy i powodują rozwój umiejętności analitycznych. Sprawia, również, że uczniowie przechodzą od biernego przyswajania wiedzy do aktywnego działania.

[25] Opracowania dokonałam, na podstawie danych otrzymanych od nauczycieli uczących w klasach eksperymentalnych.

Fotografia użyta na zajęciach osadza problem matematyczny w kontekście życiowym, dzięki temu zmniejsza stres poznawczy i wywołuje wiele pozytywnych emocji (Fot.nr 24 i nr 25).



Fotografia 24. Termometr emocji, jakie towarzyszą edukacji matematycznej

Autor zdjęcia: Nauczyciel ZSP w Szewnie



Fotografia 25. Termometr emocji, jakie towarzyszą edukacji matematycznej

Autor zdjęcia : Nauczyciel ZSP w Szewnie

Zbiorcze zestawienie emocji, które towarzyszą uczniom w klasach I-III grup eksperymentalnych, pokazuje tabela nr 46.

Tabela 46. Emocje towarzyszące uczniom na zajęciach z fotomatematyki w klasach 1-3

Klasa	**Emocje dzieci na zajęciach z fotoedukacji**				
	Wysokie zainteresowanie i satysfakcja (poziom: 8,9,10)	Duże zaangażowanie (poziom: 6,7)	Radość i dobrą zabawę (poziom: 5)	Trudności i znużenie (poziom: 3,4)	Brak zainteresowania i dezorientacja (poziom: 1,2)
1a	*12*	*8*	*4*	*0*	*0*
1b	*15*	*1*	*1*	*0*	*0*
2a	*12*	*6*	*2*	*5*	*0*
2b	*10*	*7*	*4*	*1*	*0*
3a	*8*	*7*	*4*	*2*	*0*
3b	*9*	*5*	*5*	*1*	*0*
Razem	*66*	*34*	*20*	*9*	*0*

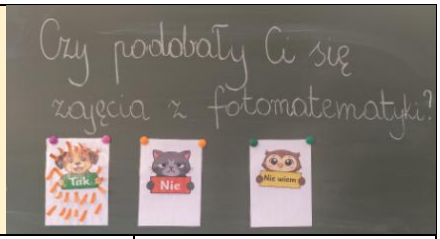
Źródło: Opracowanie własne[26]

Dane w powyższej tabeli wskazują, że uczniowie klas I-III lubią zajęcia z fotomatematyki. Podczas tych zajęć towarzyszą im pozytywne emocje. Powodują one, że uczniowie są zmotywowani i zaangażowani w proces uczenia się. Ponad połowa uczestników, 51,2%, co stanowi 66 osób, wyraziła najwyższy stopień zadowolenia z realizowanych zajęć. 34 osoby (26,4%), wykazało duże zaangażowanie podczas zajęć, co w połączeniu z grupą 20 uczniów (15,5%), którzy deklarowali radość i dobrą zabawę – pokazuje, że większość dzieci pozytywnie odbiera

[26] Opracowania dokonałam, na podstawie danych otrzymanych od nauczycieli uczących w klasach eksperymentalnych.

tę formę nauki. Podsumowując, pozytywne emocje towarzyszyły ponad 93% badanych. Negatywne odczucia miały charakter marginalny. Tylko 9 uczniów (7%) zasygnalizowało wystąpienie trudności lub znużenia podczas tych zajęć. Żaden uczeń (0%) nie zaznaczył braku zainteresowania i dezorientację podczas zajęć z fotografią. Takie wyniki świadczą, że fotomatematyka jest koncepcją, która bardzo motywuje i angażuje uczniów do wysiłku poznawczego i wywołuje pozytywne emocje. Dzieciom podobają się zajęcia z zastosowaniem fotografii. Mówią to tym wyniki zamieszczone w tabeli nr 47.

Tabela 47. Ocena zadowolenia uczniów z uczestniczenia w zajęcia fotoedukacji w klasach I-III

Klasa	***Czy podobały ci się zajęcia z fotomatematyki ?*** 		
	Tak	***Nie wiem***	***Nie***
1a	*24*	*0*	*0*
1b	*16*	*1*	*0*
2a	*23*	*1*	*1*
2b	*19*	*3*	*0*
3a	*19*	*1*	*1*
3b	*19*	*1*	*0*
Razem	*120*	*7*	*2*

Źródło: opracowanie własne[27]

Na pytanie, czy podobały się uczniom zajęcia z fotoedukacji, 120 osób (93%) udzieliło odpowiedzi twierdzącej. Tak wysoki wskaźnik zadowolenia buduje pozytywny dobrostan ucznia i redukuje lęk przed matematyką. Tylko 7 uczniów (5,4%) nie miało sprecyzowanego zdania, a zaledwie 2 osoby (1,6%) wyraziły opinię negatywną. Może to wynikać z ich indywidualnych preferencji poznawczych. Tak wysoki wskaźnik aprobaty potwierdza, że fotoedukacja jest formą zajęć niezwykle atrakcyjną dla uczniów klas I-III. Świadczą o tym, również ich wypowiedzi np.:

— *Fotoedukacja pomaga mi lepiej zrozumieć symetrię, bo mogę ją zobaczyć w rzeczywistości, zrobić zdjęcie i szybciej zapamiętać.* (Franek kl. 3 b);

[27] Opracowania dokonałam, na podstawie danych otrzymanych od nauczycieli uczących w klasach eksperymentalnych.

— *Dzięki zdjęciom na lekcji matematyki uczę się w ciekawy sposób i nie jest to tylko nudne przepisywanie z tablicy.* (Kasia kl. 1 b);

— *Lubię, kiedy na lekcji pokazujemy zdjęcia, bo wtedy matematyka staje się bardziej realna i widzę, jak jest wykorzystywana w codziennym życiu.* (Staś kl. 3 b);

— *Dzięki zdjęciom na lekcji matematyki czuję się pewniej i chętniej rozwiązuję zadania, bo wszystko jest bardziej jasne*. (Kornelia kl. 3 b);

— *Lubię, jak na lekcji matematyki pokazujemy i omawiamy zdjęcia, bo łatwiej zrozumieć trudne rzeczy*. (Adrian kl. 3 b);

— *Fajnie jest, gdy na lekcji pokazujemy zdjęcia różnych figur geometrycznych, bo wtedy łatwiej jest je rozpoznawać i zrozumieć, jak wyglądają.* (Julka kl. 1 a);

— *Zdjęcia sprawiają, że nauka matematyki jest fajniejsza i bardziej kolorowa. To lepsze niż nauka z podręczników.* (Adam kl. 2 b);

— *Lubię, kiedy uczymy się matematyki na zdjęciach, bo wtedy nie muszę tylko słuchać, ale widzę co się dzieje.* (Marysia kl. 2a);

— *Podoba mi się, kiedy idziemy szukać matematyki wokół szkoły, robimy zdjęcia, a potem opowiadamy co na nich widać*. (Piotrek kl. 3 b);

— *Fajne są lekcje podczas których rozwiązujemy zadania matematyczne wykorzystując zrobione wcześniej zdjęcia. Matematyka jest wtedy łatwa i prosta.* (Klara kl. 2a);

— *Kiedy analizujemy zdjęcia, musimy się zastanowić, co na nich widzimy i jakie elementy matematyczne możemy na nich dostrzec. Wyszukujemy osie symetrii, figury geometryczne, odcinki, linie łamane i krzywe, odcinki prostopadłe i równoległe. Zaznaczamy je na zdjęciach, układamy z patyczków, rysujemy w zeszytach. Fajnie jest pracować w grupach z kolegami. Wspólne pomysły sprawiają, że lekcje są bardzo interesujące i możemy uczyć się od siebie nawzajem.* (Wojtek 3b);

— *Fotomatematyka sprawia, że matematyka staje się bardziej zabawna i ciekawa*. (Lea 1a);

— *Dzięki zdjęciom lepiej rozumiem różne pojęcia, mogę być kreatywny i współpracować z kolegami.* (Kornel 3b);

— *Używanie zdjęć w nauce matematyki jest super. Pomaga mi lepiej zrozumieć różne rzeczy matematyczne.* (Julka 3b);

— *Podczas zajęć mogę być kreatywna. Gdy mamy zadanie, w którym musimy znaleźć coś w naszym otoczeniu, na przykład figury geometryczne czy oś symetrii, mogę fotografować różne przedmioty i później opisywać, co widzę. Na przykład, gdy szukaliśmy figur geometrycznych, robiłam zdjęcia książek, pudełek, zabawek i budynków.* (Marysia 3b);

— *Dzięki temu łatwiej zapamiętuję, jak wyglądają różne figury, bo widzę je w rzeczywistości*. (Hania 2a);

— *Podczas zajęć pracujemy w grupach. Możemy wtedy dzielić się swoimi pomysłami i rozwiązywać wspólnie problemy. Zdjęcia, które zrobiliśmy, wysłaliśmy na konkurs „Matematyka w obiektywie*. (Zuzia 2b).

Wypowiedzi uczniów klas I–III potwierdzają, że fotoedukacja znacząco podnosi jakość nauczania, czyniąc matematykę dziedziną bardziej przystępną i zrozumiałą. Franek z klasy 3b zauważa, że dzięki możliwości zobaczenia symetrii w rzeczywistości i wykonania zdjęcia, potrafi ją szybciej zapamiętać. Podobne korzyści w sferze poznawczej dostrzega Julka z klasy 1a, dla której zdjęcia ułatwiają rozpoznawanie figur geometrycznych, oraz Hania z klasy 2a, która twierdzi, że widząc figury w rzeczywistości, łatwiej je zapamiętuje. Zastosowanie fotografii buduje także pewność siebie uczniów, o czym wspomina Kornelia z klasy 3b, tłumacząc, że dzięki jasności przekazu chętniej rozwiązuje zadania.

Fotoedukacja jest ceniona przez dzieci za odejście od rutyny, co Kasia z klasy 1b opisuje jako alternatywę dla „nudnego przepisywania z tablicy", a Adam z klasy 2b uznaje za formę „fajniejszą niż nauka z podręczników". Dzięki zdjęciom matematyka staje się dla dzieci realna i widoczna w codziennym życiu. Marysia z klasy 2a podkreśla walor wizualny zajęć, dzięki któremu „nie musi tylko słuchać, ale widzi, co się dzieje". Dodatkowo Lea z klasy 1a wskazuje, że fotomatematyka czyni naukę bardziej zabawną i ciekawą.

Uczniowie akcentują również rolę własnej aktywności i współpracy grupowej. Piotrek z klasy 3b cieszy się z poszukiwania matematyki wokół szkoły, natomiast Marysia z klasy 3b docenia możliwość bycia kreatywną podczas fotografowania przedmiotów z otoczenia, takich jak książki czy zabawki. Wojtek z klasy 3b wyjaśnia, że analiza zdjęć zmusza do myślenia i wyszukiwania konkretnych elementów, jak osie symetrii czy linie prostopadłe. Kluczowym elementem jest także praca zespołowa, która według Kornela z klasy 3b i Zuzi z klasy 2b pozwala na dzielenie się pomysłami, wspólną naukę oraz rozwiązywanie problemów.

Reasumując, analiza otrzymanych przeze mnie danych ilościowych, a także opinie uczniów uczestniczących w badaniach, potwierdzają wysoką efektywność fotoedukacji w klasach I–III szkoły podstawowej. Uzyskane wyniki pokazują, że wykorzystanie fotografii w pro-

cesie dydaktycznym nie tylko zwiększa atrakcyjność zajęć, lecz przede wszystkim sprzyja osiąganiu zamierzonych efektów edukacyjnych i wychowawczych. Fotoedukacja angażuje uczniów emocjonalnie i poznawczo, stymuluje ich aktywność, rozwija ciekawość świata, a także motywuje do samodzielnego poszukiwania wiadomości. Dzięki temu proces nauczania-uczenia się staje się bardziej dynamiczny i dostosowany do potrzeb współczesnego dziecka funkcjonującego w kulturze obrazu. Wypowiedzi uczniów wskazują ponadto, że zajęcia, na których zastosowano fotografię budują pozytywne emocje związane z nauką, umożliwiają dzieciom wyrażanie własnych przeżyć i sposobów postrzegania rzeczywistości, a także wzmacniają poczucie sprawstwa. Według relacji nauczycieli prowadzących fotoedukację, w grupach eksperymentalnych uczniowie częściej angażowali się w wykonywane zadania, wykazywali większą otwartość na współpracę i chętniej uczestniczyli w aktywnościach edukacyjnych. To oznacza, że fotoedukacja może pełnić nie tylko funkcję dydaktyczną, ale również wspierać rozwój społeczno-emocjonalny dziecka. Przeprowadzony przeze mnie eksperyment pedagogiczny utwierdził mnie w przekonaniu, że fotoedukacja matematyczna wpisuje się w założenia współczesnej pedagogiki konstruktywistycznej, akcentującej aktywną rolę dziecka w procesie zdobywania wiadomości matematycznych i doświadczeń. W dobie dynamicznych przemian technologicznych i kultury medialnej, szczególnego znaczenia nabiera potrzeba poszukiwania takich koncepcji i metod dydaktycznych, które będą inspirować zarówno nauczycieli, jak i uczniów do efektywnego nauczania-uczenia się. Fotoedukacja może być odpowiedzią na te wyzwania, ponieważ łączy tradycyjne cele edukacyjne z nowoczesnymi formami aktywności ucznia. Zaprezentowane przeze mnie w niniejszej pracy rozważania teoretyczne oraz wyniki przeprowadzonych badań pokazują nowe perspektywy wykorzystania fotografii w edukacji wczesnoszkolnej oraz na kolejnych etapach kształcenia. Odpowiednio zaplanowana i świadomie realizowana fotoedukacja może w przyszłości odgrywać coraz większą rolę w procesie edukacyjnym, odpowiadając na potrzeby kształcenia XXI wieku.

Szczegółowa analiza otrzymanych wyników, z przeprowadzonych przeze mnie badań i obserwacji, pozwala rekomendować fotoedukację matematyczną jako wartościowy i trwały element koncepcji nauczania w edukacji wczesnoszkolnej. Ważnym etapem realizacji eksperymentu było opracowanie, we współpracy z nauczycielami edukacji wczesnoszkolnej, innowacyjnych scenariuszy zajęć opartych na koncepcji fotoedukacji matematycznej autorstwa prof. Małgorzaty Makiewicz[28]. Konstrukcja tych propozycji dydaktycznych została zaprojektowana w taki sposób, aby poprzez różnorodność aktywności wyjść poza ramy tradycyjnego nauczania

[28] M. Makiewicz, O fotografii w edukacji matematycznej. Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów, Szczecin 2013.

i umożliwić pełne, podmiotowe zaangażowanie uczniów klas I–III. Przykłady wybranych scenariuszy lekcji umieszczono w aneksie niniejszej pracy. Przyjęte podejście ściśle wpisuje się w nurt pedagogiki konstruktywistycznej. U jej podstaw leży przekonanie, że uczeń samodzielnie buduje swoją wiedzę poprzez aktywną eksplorację oraz nadawanie indywidualnych znaczeń otaczającej go rzeczywistości. Jak podkreśla Małgorzata Makiewicz, „fotografia może stanowić doskonały środek dydaktyczny, pozwalający na skorelowanie edukacji matematycznej z edukacją plastyczną, przyrodniczą i techniczną, co sprzyja całościowemu rozwojowi dziecka”[29].

Podczas realizacji zajęć z fotoedukacji matematycznej uczniowie wykazali się niezwykłą kreatywnością, wykonując łącznie 160 fotografii. Wybrane z nich, zostały zgłoszone do XV Konkursu „Matematyka w Obiektywie”. Zgromadzony materiał wizualny posłużył do stworzenia autorskiego „Banku fotografii”, stanowiącego cenne zaplecze dydaktyczne wykorzystywane podczas bieżących zajęć w szkole w Szewnie. Spośród wszystkich prac wyselekcjonowałam trzydzieści obrazów, które wraz z nadanymi przez dzieci tytułami oraz moim komentarzem merytorycznym zostały włączone do niniejszej pracy (patrz aneks). Stanowią one element inspirujący do konstruowania przez nauczycieli takich sytuacji edukacyjnych, w których uczeń ma szansę rozwijać wszystkie elementy kultury matematycznej. Takie działanie potwierdza tezę, iż „proces wizualizacji pojęć matematycznych na bazie otoczenia bliskiego dziecku pozwala na trwałe zakorzenienie wiedzy w jego strukturach poznawczych”[30]. Sześć wybranych scenariuszy, które zamieściłam w pracy, stanowi praktyczną egzemplifikację tego, jak fotografia staje się pomostem między abstrakcyjnym światem liczb a codzienną percepcją dziecka.

[29]Makiewicz M., Matematyka w obiektywie. Fotografia wspomagająca edukację matematyczną, Szczecin 2010, s. 12.
[30] Makiewicz M.. Dydaktyczne aspekty fotografii matematycznej. Szczecin 2012, s. 45.

Bibliografia

Adamek I., Praktyka rozwojowa w wychowaniu małego dziecka, Kraków 1998

Adamkiewicz S., Edukacja w II Rzeczypospolitej, https://niepodlegla.gov.pl/o-niepodleglej/edukacja-w-ii-rzeczypospolitej/,(dostęp:26.11.2022r.)

Ajnenkiel A., Polskie konstytucje, Warszawa 1982. Pierwsze kodyfikacje podstawowych zasad budowy nowego systemu oświaty w Polsce Ludowej znalazły swoje miejsce w pracach programowych i dokumentach Polskiej Partii Robotniczej z lat 1942–1944. Zob. PPR. Rezolucje, odezwy, instrukcje i okólniki Komitetu Centralnego od sierpnia 1944 roku do grudnia 1945 roku, Warszawa 1959

Akin A., Kurbanoglu I.N., The relationship between math anxiety, math attitudes, and self-efficacy: A structural equation model, "Studia Psychologica", 2011, Vol. 53(3).

Araszkiewicz F. W., Ideały wychowawcze Drugiej Rzeczypospolitej, Warszawa 1978. Szerzej na ten temat w: Falski M., Koncepcja szkoły powszechnej i jej roli w ustroju szkolnictwa w okresie międzywojennym w Polsce Rozprawy z Dziejów Oświaty 1958

Babbie E.R., Badania społeczne w praktyce, Warszawa 2004

Banach Cz., Polska szkoła i system edukacji: przemiany i perspektywy, Toruń 1999

Banach S., Przedmowa [w:] E. Colerus, Od tabliczki do różniczki. Matematyka dla wszystkich, Kraków 1938

Barody, Cosilick, 1993, (w:) Jeffery S. Turner, Donald B. Helms, Rozwój człowieka, Warszawa1999

Becelewska D., Repetytorium z rozwoju człowieka, Jelenia Góra 2006

Beilock S.L, Maloney E.A., Math Anxiety: A Factor in Math Achievement Not to Be Ignored, Behavioral and Brain Sciences, 2015, Vol. 2(1),

Bereźnicki F., Prace magisterskie z pedagogiki, Szczecin 2000

Bereźnicki F., Reforma edukacji narodowej- istotny problem społeczny, Toruń 1997

Bjerke B., Kultura a style przywództwa. Zarządzanie w warunkach globalizmu, Kraków 2004

Blum W., Borromeo Ferri R., Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt?, "Journal of Mathematical Modelling and Application" 2009, Vol. 1 (1)

Boni M. (red.), Polska 2030. Wyzwania rozwojowe. Kancelaria Prezesa Rady Ministrów, Warszawa 2009

Borovik, A.V., Mathematics for Makers and Mathematics for Users. In: Sriraman, B. (eds) Humanizing Mathematics and its Philosophy. Birkhäuser, 2017

Bray M., Korepetycje. Cień rzucany przez szkoły, przekład K. Chodzińska, Warszawa 2012

Brodzik M., Pruszyńska R., Komentarz do podstawy programowej przedmiotu matematyka, [w:] Podstawa programowa kształcenia ogólnego z komentarzem 2017, Szkoła podstawowa. Matematyka, https://www.ore.edu.pl/wp-content/uploads/2017/05/matematyka.-pp-z-komentarzem.-szkola-podstawowa-1.pdf, (dostęp:26.11.2020)

Bruner J., Poza dostarczone informacje, Warszawa 1978,

Bruner J., Proces kształcenia, Warszawa 2006

Bruner J.S., Akt dokonywania odkrycia. w: Bruner J.S., Poza dostarczone informacje. Studia z psychologii poznawania, Warszawa 1978.

Brzezińska R., Koncepcje edukacji wczesnoszkolnej w ujęciu historycznym, s.182. https://czasopisma.mazowiecka.edu.pl/index.php/sej/article/view/773/766, (dostęp: 29.09.2019)

Brzeziński J., Metodologia badań psychologicznych, Warszawa 2019

Chinn S., Mathematics Anxiety in Secondary Students in England, "Dyslexia: An International Journal of Research and Practice", Vol. 15 (1), 2009

Ciesielski K., Pogoda Z., Królowa bez Nobla. Rozmowy o matematyce, Warszawa 2013

Cieślarczyk M., Chojnacki Z., Techniki i narzędzia badawcze stosowane w pracach magisterskich i doktorskich, Warszawa 2006

Cohen, J., Statistical power analysis for the behavioral sciences (2nd ed.). Lawrence Erlbaum Associates, New York 1988

Connie M. Moss, Susan M. Brookhart, Cele uczenia się. Jak pomóc uczniom zrozumieć każdą lekcję, Warszawa 2014

Creswell J.W., Projektowanie badań naukowych. Metody jakościowe, ilościowe i mieszane, tłumaczenie J. Gilewicz, Kraków 2013.

Czarnowski S., Kultura, [w:] *Dzieła*, t. 1: *Studia z historii kultury*, red. N. Assorodobraj, S. Ossowski, Warszawa 1956

Daniel J., Szafrańska I., Fałat M., Sprawozdanie z egzaminu maturalnego 2018 Matematyka, s. 46. Microsoft Word - 20180920 Sprawozdanie 2018 - Matematyka , (dostęp:17.12. 2024)

Daszkiewicz W., Podstawowe rozumienie kultury – ujęcie filozoficzne. Roczniki Kulturoznawcze Katolickiego Uniwersytetu Lubelskiego im. Jana Pawła II 2010, Tom 1, Lublin 2010

Dąbrowa M., Specyfika tekstu matematycznego i jego lektury , Zeszyty naukowe Małopolskiej Wyższej Szkoły Ekonomicznej w Tarnowie , T. 18, nr 1/2011

Dąbrowski M. (red.), Trzecioklasista 2010. Raport z badań ilościowych 2010. CKE, Warszawa 2011

Dąbrowski M., (Za) trudne, bo trzeba myśleć. O efektach nauczania matematyki na I etapie kształcenia, IBE, Warszawa 2013

Dąbrowski M., Żytko M. (red.), Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej, cz. I: Raport z badań ilościowych. CKE, Warszawa 2007, cz. II: Konteksty szkolnych osiągnięć uczniów. CKE, Warszawa 2008

Deci E.L, Ryan R.M. , The "What" and "Why" of Goal Pursuits: Human Needs and the Self-Determination of Behavior, "Psychological Inquiry" 2000, t. 11, nr 4, s. 227-230.

Dekret o obowiązku szkolnym, Dziennik Ustaw 1919.14.poz. 147, https://isap.sejm.gov.pl/isap.nsf/download.xsp/WDU19190140147/O/D19190147.pdf, (dostęp:26.11.2022r.)

Dekret z dnia 23 marca 1956 r. o obowiązku szkolnym, Dz.U. 1956 nr 9 poz. 52, https://isap.sejm.gov.pl/isap.nsf/DocDetails.xsp?id=WDU19560090052#:~:text=Dz.U.%201956%20nr%209%20poz.%2052, (dostęp:26.11.2022r.)

Dernowska U., Ruch Pedagogiczny 4/2014

Dobosz-Leszczyńska W. (red.), Osiągnięcia matematyczne i przyrodnicze czwartoklasistów, Warszawa 2024, s. 13, https://pirls.ibe.edu.pl/wp-content/uploads/2024/12/2023-RAPORT-TIMSS.pdf, (dostęp:17.12. 2024)

Dudel B., M. Głoskowska-Sołdatow M., Kompetencje matematyczne i podstawowe kompetencje naukowo-techniczne w edukacji wczesnoszkolnej – studium empiryczne, Wyd. Adam Marszałek, Toruń 2020

Dudel B., Matematyka w centrum uwagi. Jak możemy pomóc dziecku w uczeniu się?, J. Nikitorowicz, Piwowarski R. , Kryńska E. J.,. Dudel, B Głoskowska-Sołdatow M., Kienig A., Śmietało K., Kupka J. Szarkowska A., Wróblewska U., (red.) Wyrównywanie szans edukacyjnych polskiej wsi. Internetowe Centra Edukacyjno-Oświatowe na wsi, Wydawnictwo Uniwersytetu w Białymstoku, 2008

Dyczewski L., Wartości w kulturze polskiej, Lublin 1993

Dylak S., Architektura wiedzy w szkole, Warszawa 2013

Dylak S., Gołębniak B. D., Pęczkowski R., Podstawa programowa, standardy kształcenia, programy nauczania oraz rozkład materiału nauczania, w: https://wspolna-szkola.pcss.pl/podstawa-programowa-standardy-ksztalcenia-programy-nauczania-oraz-rozklad-materialu-nauczania/ (dostęp:09.06.2023).

Dylak S., Pęczkowski R., Denicolo P., Procesy globalizacji nauczycieli-spojrzenie międzykulturowe, Poznań-Rzeszów 2006

Dzida G., Edukacja człowieka w zakresie nauk przyrodniczych i ścisłych według koncepcji Jana Amosa Komeńskiego, „Siedleckie Zeszyty Komeniologiczne" seria „Pedagogika" 2015

Dziennik Ustaw - Dz.U.2025.1043 t.j. Akt obowiązujący, wersja od: 1 stycznia 2026 r. do: 31 sierpnia 2027, w: https://sip.lex.pl/akty-prawne/dzu-dziennik-ustaw/prawo-oswiatowe-18558680/art-4 (dostęp: 23.12.2024)

Encyklopedia Powszechna PWN, https://encyklopedia.pwn.pl/haslo/matematyka; 3938552.html, (dostęp: 22.03.2025)

Ernest P., (ed.) The Philosophy of Matematics Education Today, Springer Cham, 2018, https://doi.org/10.1007/978-3-319-77760-3.

Ernest P., Social constructivism and the psychology of mathematics education. W: P. Ernest (ed.), Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematics Education. London, Falmer Press 199.

Fechner-Sędzicka I., MSB – Matematyczne Stacje Badawcze, s.23-29 w: Fechner-Sędzicka Barbara Ochmańska Wiesława Odrobina, Rozwijanie zainteresowań i zdolności matematycznych uczniów klas I – III szkoły podstawowej Poradnik dla nauczyciela, Warszawa 2012

Filipiak M. (red.), Wprowadzenie do socjologii kultury, Lublin 2009

Fisher R., Uczymy, jak się uczyć, tłum. K. Kruszewski, Warszawa 1999.

Fiszer R., (w:) Z. Kwieciński, B. Śliwerski, Pedagogika 2, podręcznik akademicki, Warszawa 2004

Frankfort-Nachmias C., Nachmias D., Metody badawcze w naukach społecznych, Poznań 2001

Frenkel E., Miłość i matematyka. Istota ukrytej rzeczywistości, Warszawa 2015

Freudenthal H., Mathematics as an Educational Task, D.Reidel Publishing Company Dordrecht-Holland 1973; Hans Freudenthal, Nowa matematyka czy nowe jej nauczanie? Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria II: Wiadomości matematyczne XXV, nr 1, 1983

Freudenthal H., Niejawna filozofia historii i dydaktyki matematyki, tłum. Anna Sierpińska, w: Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego Seria V: Dydaktyka Matematyki 5(1985)

Freudenthal H., O strukturach w nauce i nauczaniu. Fragmenty z referatu H. Freudenthala wygłoszonego przez niego w czasie wizyty w krakowskiej WSP w 198.4

Gałaś M., (Re)konstruowanie edukacji, (w:) Refleksje, Zachodniopomorski Dwumiesięcznik Oświatowy, nr.6, listopad/grudzień 2016

Gałwiaczek E., Psychologiczne podstawy kształtowania pojęć matematycznych, https://www.profesor.pl/publikacja,8648,Artykuly,Psychologiczne-podstawy-ksztaltowania-pojec-matematycznych-referat, (dostęp:12.03.2025).

Gnitecki J., Zarys metodologii badań w pedagogice empirycznej, Zielona Góra 1993

Gołek B., Poznawcze Potrzeby nauczycieli, Kraków 2010, s.26, https://ruj.uj.edu.pl/server/api/core/bitstreams/689c1880-fa54-4a9e-90d2-85e63655af63/content, (dostęp:12.03.2025)

Gołębniak, D., Program szkolny, w: Kwieciński, Z., Śliwerski, B, Pedagogika – podręcznik akademicki, T2., Warszawa 2004

Gravemeijer K., Terwel J., Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory, „Journal of curriculum studies" 2000, 32.6

Gruszczyk – Kolczyńska E., Zastosowanie darów Froebla w dziecięcej matematyce. Treści kształcenia, komentarze metodyczne oraz opisy zajęć wspomagających rozwój umysłowy i edukację matematyczną przedszkolaków, Lublin, 2017

Gruszczyk-Kolczyńska E., Dlaczego dzieci nie potrafią uczyć się matematyki?, Warszawa 1989

Gruszczyk-Kolczyńska E. (red.), Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz edukacja matematyczna dzieci w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i w pierwszym roku szkolnej edukacji, Warszawa 2009

Gruszczyk-Kolczyńska E., Diagnoza kryzysu w matematycznym kształceniu dzieci oraz rekomendowane działania naprawcze, Warszawa 2018, w: https://www.nik.gov.pl/plik/id,19329,vp,21937.pdf, (dostęp:11.12. 2024 r.)

Gruszczyk-Kolczyńska E., Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki. Warszawa 1997

Gruszczyk-Kolczyńska E., Dziecięca matematyka – dwadzieścia lat później, Warszawa 2015

Gruszczyk-Kolczyńska E., Dziecięca matematyka. Program edukacji matematycznej, Warszawa 2013

Gruszczyk-Kolczyńska E., Gustaw Treliński G., Semadeni Z., Beata Bugajska-Jaszczołt B., Czajkowska M., Matematyczna edukacja wczesnoszkolna. Teoria i praktyka. Warszawa 2015

Gruszczyk-Kolczyńska E., O dzieciach uzdolnionych matematycznie, Warszawa 2012

Gruszczyk-Kolczyńska E., O kryzysie edukacji matematycznej dzieci. Rozpaczliwe wołanie o działania naprawcze, https://www.matematykadlawszystkich.pl/mednr1/Gruszczyk.pdf, (dostęp:17.12. 2024r.).

Gruszczyk-Kolczyńska E., Zielińska E., Dziecięca matematyka, Edukacja matematyczna dzieci w domu, w przedszkolu i szkole, drugi tom w serii „Edukacja matematyczna dzieci", Warszawa 1997

Gruszczyk-Kolczyńska E., Zielińska E., Dziecięca matematyka: książka dla rodziców i nauczycieli. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1997

Gruszczyk-Kolczyńska E., Zielińska E., Dziecięca matematyka-dwadzieścia lat później, Kraków 2015

Gruszczyk-Kolczyńska E., Zielińska E., Nauczycielska diagnoza edukacji matematycznej dzieci. Metody, interpretacja i wnioski. Warszawa: Wydawnictwo Nowa Era, 2013

Gruszczyk-Kolczyńska E., Zielińska E., Wspomaganie rozwoju matematycznego dzieci, Warszawa 2000

Gruszczyk-Kolczyńska G., (red.), O dzieciach matematycznie uzdolnionych. Książka dla rodziców i nauczycieli, Warszawa 2012,

Gutstein E., Reading and Writing the World with Mathematics: Toward a Pedagogy of for Social Justice (Critical Social Thought), Routledge Taylor & Francis Group, New York 2006

Hammond A.L., Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura, w: L.A. Steen, Matematyka współczesna. Dwanaście esejów, Warszawa 1983

Hanisz J., Program edukacji wczesnoszkolnej w klasach 1-3 szkoły podstawowej, WSiP, Warszawa 2017

Hardy G.H., Apologia matematyka, tłum. R. Duda, , Warszawa 2017, s. 53–54.

Hartman S., Dyskusja „Co to jest kultura matematyczna?”, https://smp.uws.edu.pl/msn/5/02-04.pdf, (dostęp:21.11.2024)

Helie B., Świtlik W., Fotografia i media cyfrowe jako źródło inspiracji dla edukacji interdyscyplinarnej, s.28, https://ibe.edu.pl/images/EBiS/Numery/2021-1/PDF/02_Blazej%20Helie.pdf, (dostęp:26.11.2020)

Heller M., Co to jest matematyka? Zagadnienia Filozoficzne w Nauce, XXVIII-XXIX, 2001

Herder J.G, Myśli o filozofii dziejów (wybór), Warszawa 2000

Herder J.G., Myśli o filozofii dziejów tom I , Warszawa1962

Hessen S., Struktura i treści szkoły współczesnej, 1957, (w:) W. Okoń, Wprowadzenie do dydaktyki ogólnej, Warszawa 2003

Instrukcja z dnia 16 lipca 1945 w sprawie realizacji obowiązku szkolnego i organizacji szkół powszechnych w roku szkolnym 1945/46-Dz.Urz.MO 1945r. Nr 2, http://mbc.cyfrowemazowsze.pl/dlibra/plain-content?id=19357, (dostęp: 22.10.2022)

Instrukcja z dnia 4 maja 1948 roku w sprawie organizacji roku szkolnego 1948/49 w szkolnictwie ogólnokształcącym (Dz. Urz. Min. Ośw.,1948 nr 5, poz. 86), w: https://jbc.bj.uj.edu.pl/Content/379989/PDF/NDIGCZAS018608_1948_66379862_67298732.pdf (dostęp: 4.05.2023)

Iskierka I., Kształtowanie wyobraźni przestrzennej poprzez modelowanie i animacje 3D, https://repozytorium.ur.edu.pl/handle/item/2508, (dostęp:20.04.2020)

Jan Paweł II, Pielgrzymka do Ojczyzny, Przemówienie do młodzieży na Wzgórzu Lecha, Gniezno, 3 czerwca 1979, https://ekai.pl/dokumenty/przemowienie-do-mlodziezy-zgromadzonej-na-wzgorzu-lecha/(dostęp:22.11.2020)

Janos I., Koziej S., Bugajska-Jaszczołt B., Foreign Language Acquisition in Pre-primary CLIL Education Supported by a Social Robot EMYS, The New Education ReviewSpecial 2024, 5: 54-69

Jaoui H., Klucze do twórczości, [w:] Psychologia twórczości, wybór tekstów Z. Siwek, D. Zarębska-Piotrowska, Skrypty Uczelniane – Uniwersytet Jagielloński, Kraków 1980

Jedynak S., Kategorie kultury, Lublin 2011

Jeffery S. Turner, Helms Donald B., Rozwój człowieka, Warszawa1999

Kalinowska A., Murawska B. (red.), Diagnoza umiejętności językowych i matematycznych uczniów klas trzecich szkół podstawowych województwa kujawsko-pomorskiego. Bydgoszcz 2009

Kalinowska A., Pozwólmy dzieciom działać – mity i fakty o rozwijaniu myślenia matematycznego, Warszawa 2010

Kalinowska-Iżykowska A., Konstruktywistyczna dydaktyka w edukacji matematycznej, w: Problemy Wczesnej Edukacji 4 (51)/2020,

Kamiński A., Metoda, technika, procedura badawcza w pedagogice empirycznej [w:] Metodologia pedagogiki społecznej, red. R. Wroczyński, T. Pilch, PAN, Wrocław 1974

Kamza A., Rozwój dziecka. Wczesny wiek szkolny (w:) Niezbędnik Dobrego Nauczyciela Redakcja: prof. dr hab. Anna Izabela Brzezińska, Seria I Rozwój w okresie dzieciństwa i dorastania. TOM 3, Warszawa 2014

Kandzia J., Aspekty trudności i niepowodzeń dzieci w uczeniu się matematyki, w: Kultura – Przemiany – Edukacja, tom specjalny 2024

Karpińska A., W poszukiwaniu źródeł edukacyjnego sukcesu. Wyzwania – strategie – złożoność XXI wieku. [w:] Edukacyjne tendencje XXI wieku w dialogu i perspektywie, (red.) A. Karpińska, Białystok 2005

Karpiński M., Nauczanie matematyki w szkole podstawowej. Raport z badania, https://www.ibe.edu.pl/pl/aktualnosci/520-matematyka-w-szkole-podstawowej, (dostęp:17.12. 2024 r.).

Karpiński M., Nowakowska A., Orzechowska M., Sosulska D., Zambrowska M., Ogólnopolskie Badanie Umiejętności Trzecioklasistów Raport OBUT 2013, Instytut Badań Edukacyjnych, Warszawa 2013

Kennedy John F, Kennedy John F, Spraw, aby nauka była osobista. Umocnienie każdego ucznia do gotowości na przyszłość, https://kathleenmcclaskey.com/purpose-2/,dostęp:19.04.2024)

Klus-Stańska D,. Światy dziecięcych znaczeń-poszukiwanie kontekstów teoretycznych, (w:) D. Klus-Stańska (red.) Światy dziecięcych znaczeń, Warszawa 2004

Klus-Stańska D., Nowicka M., Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej, Warszawa 2005

Klus-Stańska D., Paradygmaty matematyki. Myśleć teorią o praktyce. Warszawa, 2018

Kłoskowska A. (red.) Encyklopedia kultury polskiej XX wieku. Pojęcia i problemy wiedzy o kulturze, Wrocław 1991

Kłoskowska A., Kultura masowa. Krytyka i obrona, Warszawa 2005

Kłoskowska A., Socjologia Kultury, Warszawa 2007, s.71.

Konarzewski K., Osiągnięcia szkolne polskich trzecioklasistów w perspektywie międzynarodowej, Centralna Komisja Egzaminacyjna, Warszawa 2012

Konarzewski K., Program szkolny [w:] K. Konarzewski, Sztuka nauczania, T2, Warszawa 2005

Konarzewski K., Reforma oświaty. Podstawa programowa i warunki kształcenia, Warszawa 2004

Kordos M., Zobaczyć to czego nie widać, czyli kultura matematyczna w praktyce, Wydawnictwo "Aksjomat", Toruń, 2009

Kotarbiński T., Próba zastosowania pewnych pojęć prakseologii do metodologii pracy umysłowej, Warszawa 1957

Kotarbiński, T. (1970). Logika jako szkolny przedmiot pomocniczy. Ze szczególnym uwzględnieniem studiów humanistycznych. Studia Logika, XXVI

Kowalczyk G., Wybrane przykłady trudności w uczeniu się matematyki na początku klasy czwartej z perspektywy nauczyciela, s.151, https://www.matematykadlawszystkich.pl/mednr2/Kowalczyk.pdf, (dostęp: 12.02.2025)

Kozielecki J., Koncepcje psychologiczne człowieka, Warszawa 1987

Koziej S., The role of „Chilgren's University" in the development of media competence in praimary school students, SHS Web of Conference, 2021, DOI: 10.1051/shsconf/20219805008

Krąpiec M. A., Człowiek w kulturze, Warszawa 1996, (w:) W. Daszkiewicz, Rocznik kulturoznawczy, Tom I, 2010

Krąpiec M.A, U podstaw rozumienia kultury, Lublin 1991

Kroeber A., Kluckhohn. Culture C.. A Critical Review of Concepts and Definitions. Cambridge: Papers of Peabody Museum 1952.Cyt. za: A. Kłoskowska, Kultura masowa, Warszawa 1996 r.

Kruszewski K. (red.), Sztuka nauczania. Czynności nauczyciela, Warszawa2004

Krygowska A. Z., Zarys dydaktyki matematyki, cz.1, Warszawa 1969

Krygowska A.Z., Zarys dydaktyki matematyki, część 2, Warszawa1977

Krygowska A.Z., Zarys dydaktyki matematyki. Cz. 1. Warszawa 1979

Krygowska A.Z., Zarys dydaktyki matematyki; część 3, Warszawa 1977

Krygowska A.Z., Zarys dydaktyki matematyki, Warszawa 1997

Książek W., Rzecz o reformie edukacji 1997-2001, Warszawa 2001

Kupisiewicz Cz., Koncepcje reform szkolnych w latach osiemdziesiątych, Warszawa 1994

Kupisiewicz Cz., Z dziejów teorii i praktyki wychowania, Warszawa 2012

Kurina F., Kultura matematyczna nauczyciela matematyki, „Matematyka. Społeczeństwo. Nauczanie”, Nr 6 1991

Kurina F., Kultura matematyczna nauczyciela matematyki, https://smp.uph.edu.pl/msn/6/30-32.pdf, (dostęp:21.11.2020).

Lewicki Cz., Zbiór zadań ze statystyki dla pedagogów. Rzeszów 1989

Lorens R., Miejsce i rola podstawy programowej w polskim systemie prawnym, w: https://www.mac.pl/blog/opinie-ekspertow/miejsce-i-rola-podstawy-programowej-w-polskim-systemie-prawnym (dostęp: 05.03.2026).

Lubański, M., Dyskusja „Co to jest kultura matematyczna?", https://smp.uws.edu.pl/msn/5/02-04.pdf (dostęp: 24.03.2024).

Łobocki M., Metody badań pedagogicznych, Państwowe Wydawnictwa Naukowe, Warszawa 1978

Łobocki M., Metody i techniki badań pedagogicznych, Wydawnictwo Impuls, Kraków 2011

Łobocki M., Wprowadzenie do metodologii badań pedagogicznych, Impuls, Kraków 2009

Łomny Z., W intencji przetrwania i rozwoju, Warszawa 1998

Makiewicz M., Widzialne i niewidzialne piękno matematyki, E-mentor, dwumiesięcznik Szkoły Głównej Handlowe w Warszawie, nr 4(66) 2016,

Makiewicz M., (red.), Matematyka nasza niedostrzegalna kultura. Wypowiedzi, cytaty o kulturze matematycznej, matematyce i jej nauczaniu, Szczecin 2023

Makiewicz M., Dydaktyczne aspekty fotografii w nauczaniu matematyki, „Dydaktyka Matematyki” 2012, nr 34

Makiewicz M., Fotoedukacja matematyczna, https://www.aps.edu.pl/instytuty/instytut-wspomagania-rozwoju-czlowieka-i-edukacji/wspolpraca/fotoedukacja-matematyczna/#:~:text=STREFA%20PROJEKT%C3%93W-,Fotoedukacja%20matematyczna,-Aktualizacja%3A%2013%2D05, (dostęp:6.12.2024)

Makiewicz M., Fotoedukacja matematyczna: od inspiracji do interpretacji, Szczecin 2015

Makiewicz M., Fragmenty opinii przygotowanej na zamówienie NIK, s.21, https://www.nik.gov.pl/plik/id,20330,vp,22953.pdf, (dostęp:29.12.2024).

Makiewicz M., Kultura wizualna w edukacji matematycznej, Kraków 2018

Makiewicz M., Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura, Studia Pedagogiczne t. L XIV/2011

Makiewicz M., Matematyka w obiektywie. Kultura matematyczna dla nauczycieli, Szczecin 2010

Makiewicz M., Matematyka w obiektywie. Fotografia wspomagająca edukację matematyczną, Szczecin 2010,

Makiewicz M., Math & Art. Reprezentacje enaktywne w edukacji matematycznej - badania w działaniu, Uniwersytet Szczeciński 2018

Makiewicz M., Model kultury matematycznej ucznia, w: Edukacja – Technika – Informatyka nr 4(26)/2018

Makiewicz M., O fotografii w edukacji matematycznej. Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów, Szczecin 2013

Makiewicz M., O kulturze matematycznej ucznia. Eksterioryzacja wiedzy matematycznej za pomocą fotografii, Edukacja humanistyczna nr 2 (31), 2014, Szczecin 2014

Makiewicz M., Opinia w przedmiocie diagnozy problemów związanych z procesem nauczania matematyki w szkole (począwszy od IV klasy szkoły podstawowej) wraz z odpowiednimi rekomendacjami, https://www.nik.gov.pl/plik/id,19330,vp,21938.pdf, (dostęp:17.12. 2024)

Makiewicz M., Z Abstraktu do: „Mathematical Cognition in Metaphors Expressed through Photography". Chemistry-Didactics-Ecology-Metrology, t. 17, nr 1-2, 2012

Makiewicz M., Dydaktyczne aspekty fotografii matematycznej. Szczecin 2012

Marciniak Z., Podstawa programowa z komentarzem, Warszawa 2008

Marek E., W poszukiwaniu ciekawych programów rozwijania aktywności twórczej dzieci, https://rebus.us.edu.pl/bitstream/20.500.12128/12747/4/Marek_W_poszukiwaniu_ciekawych_programow.pdf , (dostęp:31.01.2021)

Marekwia M., Polewczyk I,, Znaczenie diagnozy gotowości szkolnej w zakresie matematyki w kontekście diagnozy umiejętności matematycznych po klasie I,"Chowanna",T.1, 2018

Maszke A.W., Metody i techniki badań pedagogicznych, Rzeszów 2008

Matematyka do poprawy. NIK o nauczaniu matematyki, https://www.nik.gov.pl/najnowsze-informacje-o-wynikach-kontroli/matematyka-do-poprawy.html, (dostęp:29.12.2024r.).

Matematyka do poprawy: NIK o nauczaniu matematyki, https://www.nik.gov.pl/najnowsze-informacje-o-wynikach-kontroli/matematyka-do-poprawy.html, (dostęp:17.12. 2024)

Matematyka to wspólny język ludzi i przyrody https://www.earlymath.pl/matematyka-to-wspolny-jezyk-ludzi-i-przyrody1/matematyka-to-wspolny-jezyk-ludzi-i-przyrody(dostęp:06.11.2020)

Mazurkiewicz G., Jak być jeszcze lepszym? Ewaluacja w edukacji, Kraków 2012

Michalak R., Miejsce i rola wizualizacji w edukacji daltońskiej, „Inspiracje Daltońskie", nr 1/2018

Milgram J., Zakresy biegłości matematycznej, https://www.nap.edu/read/9822/chapter/6 (dostęp:23.11.2020)

Moduł 1. Osiem kluczowych kompetencji - Eduspaces (szkolazklasa.org.pl), https://eduspaces.szkolazklasa.org.pl/osiem-kluczowych-kompetencji/,(dostęp: 28.12.2023)

Moss C. M, Brookhart S.M., Cele uczenia się. Jak pomóc uczniom zrozumieć każdą lekcję, przekład W. Gasperczyk, Warszawa 2014

Mrozowska K., Historia oświaty i wychowania w Polsce w latach 1918–1978 – przeszłość, stan obecny, perspektywy, „Kwartalnik Pedagogiczny", nr 3 1979

Muszyński H., Metodologiczne vademecum badacza pedagoga, Poznań 2018

Muszyński H., Zarys teorii wychowania, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1977

National Strategies, Children thinking mathematically: PSRN essential knowledge for early years practitioners. 2009, w: https://birthto5matters.org.uk/wp-content/uploads/2021/03/Children_thinking_mathematically_PSRN_essential_knowledge_for_Early_Years_practitioners.pdf (dostęp: 24.08.2020).

Niemierko B., Kształcenie szkolne. Podręcznik skutecznej dydaktyki, Warszawa 2007

Nowak S., Metodologia badań socjologicznych, Warszawa 1970

Nowak-Łojewska A., Wybrane obszary edukacji matematycznej. Poradnik dla nauczycieli klas I-III, https://ore.edu.pl/wp-content/uploads/phocadownload/EFS/Wybrane-obszary-edukacji-matematycznej-dzieci_ANowak-Lojewska.pdf, (dostęp: dostęp:17.12. 2024).

Nowakowska A., Orzechowska M., Sosulska D., Zambrowska M., i in., Bydgoski bąbel matematyczny O wprowadzaniu zmian w nauczaniu matematyki w klasach I–III, Warszawa 2014, https://www.ibe.edu.pl/images/download/IBE_Bydgoski_Babel_Matematyczny_NET.pdf, (dostęp:17.12. 2024r.)

Nowicka E., Głowacka M. - Grajper (red.), Świat człowieka, świat kultury. Antologia tekstów klasycznej antropologii, Warszawa 2009

Nowicka E., Świat człowieka – świat kultury. Systematyczny wykład problemów antropologii. kulturowej, Warszawa 2005

Nowik J., Kształcenie matematyczne w edukacji wczesnoszkolnej. Wydanie II rozszerzone. Poradnik dla nauczycieli, Opole 2013

Obuchowski K., Psychologia dążeń ludzkich, Warszawa 1983

Ocenianie kształtujące, https://pomagajsieuczyc.ceo.org.pl/tematy/ocenianie-ksztaltujace/, (dostęp: 13.04.2024)

Okoń W., Nowy słownik pedagogiczny, Warszawa 2007

Okoń W., Słownik pedagogiczny, Warszawa 1992

Okoń W., Słownik pedagogiczny, Warszawa 1981

Okoń W., Wprowadzenie do dydaktyki ogólnej, Warszawa 2003

Ossowski S., Z zagadnień psychologii społecznej. Dzieła, t. 3, Warszawa 1967, s. 163, w: Marian Filipiak Wprowadzenie do socjologii kultury, Lublin 2009

Palka S., Metodologiczne aspekty uprawiania pedagogiki [w:] Orientacje w metodologii badań pedagogicznych, S. Palka (red.), Wydaw. Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 1998

Panek D., Pardała A., Diagnozowanie wyobraźni przestrzennej uczniów i studentów, (w:) Dydaktyce matematyki nr 21. Seria V, Kraków 1999

Parkhurst H., Wykształcenie według Planu Daltońskiego, przekład Zofia Umińska, Warszawa 1928, s.16, w:https://pbc.gda.pl/dlibra/publication/1328/edition/4642/wykształcenie-wedlug-planu-daltonskiego-parkhurst-helen-1887-1959 (dostęp: 23.04.2025)

Pawlak R.J., Minimum edukacji matematycznej przyszłych nauczycieli. Kultura matematyczna, https://dspace.uni.lodz.pl/xmlui/handle/11089/14496, (dostęp: 26.11.2020)

Pawlak R.J., Minimum edukacji matematycznej przyszłych nauczycieli. Kultura matematyczna, ACTA UNIVERSITATIS LODZIENSIS FOLIA MATHEMATICA 6, 1993 https://dspace.uni.lodz.pl/xmlui/bitstream/handle/11089/14496/fm6Ryszard%20J.%20Pawlak57_66.pdf?sequence=1&isAllowed=y (dostęp: 12.12.2024)

Pawlusińska L., Kierowane odkrywanie matematyki we współczesnej edukacji, Szczecin 2021, file:///C:/Users/komputer/Desktop/rozprawy_i_studia__kierowane_odkrywanie_matematyki_we_wczes%20Pawlusin%C5%9Bka.pdf, (dostęp: 12.03.2025).

Piaget J., Dokąd zmierza edukacja? Warszawa 1977

Piaget J., Studia z psychologii dziecka, Warszawa 1966

Pietrasiński Z., Rozwój z perspektywy jego podmiotu, [w:] Rozwój psychiczny człowieka w ciągu życia. Zagadnienia teoretyczne i metodologiczne, red. M. Tyszkowa, Warszawa 1988

Pierzchała K., Wychowawcze znaczenie kultury i religii w przeżywaniu macierzyństwa, Towarzystwo Naukowe Katolickiego Uniwersytetu Lubelskiego Jana Pawła II, Lublin 2022.

Pilch T., Bauman T., Zasady badań pedagogicznych: strategie ilościowe i jakościowe, Warszawa 2001

Pilch T., Encyklopedia pedagogiczna XXI wieku, t. 1, Warszawa 2003

Pilch T., Zasady badań pedagogicznych, Warszawa 1998

Pilch T., Zasady badań pedagogicznych, Warszawa 1995

Pintal D., Ocenianie kształtujące. Od koncepcji do praktycznej realizacji w klasie zróżnicowanej, Warszawa 2022

Plan Daltoński Czym jest Edukacja Daltońska? https://dalton.org.pl/ (Dostęp:07.02.2020)

Plebańska M., Nowa edukacja. Uczenie (się) w świecie nowoczesnych technologii, Warszawa 2017

Plebańska M., Polska szkoła w dobie cyfryzacji, Warszawa 2017

Podstawa programowa kształcenia ogólnego z komentarzem, szkoła podstawowa, matematyka, https://www.ore.edu.pl/wp-content/uploads/2017/05/matematyka.-pp-z-komentarzem.-szkola-podstawowa-1.pdf, (dostęp:21.11.2020)

Polya G., Jak to rozwiązać, Warszawa 2012

Polya G., Odkrycie matematyczne: o rozumieniu, uczeniu się i nauczaniu rozwiązywania zadań. Warszawa 1975

Pomykało W., Encyklopedia pedagogiczna, Warszawa 1993

Popek S., Aktywność twórcza dzieci i młodzieży, Warszawa 1988

Popek S., Twórczość artystyczna w wychowaniu dzieci i młodzieży, Warszawa 1985

Prajzner A,, Wybrane wskaźniki wielkości efektu w badaniach psychologicznych. Annales Univesitatis Mariae Curie-Skkłodowska. Sectio Paedagogia-Psychologia, 2022 35(4)

Pregler A. (red.), Ogólnopolskie Badanie Umiejętności Trzecioklasistów. Raport OBUT 2013. IBE, Warszawa 2013

Pregler A., Wiatrak E. (red.), Ogólnopolskie Badanie Umiejętności Trzecioklasistów. Raport OBUT 2011. CKE, Warszawa 2011

Pregler A., Wiatrak E. (red.,) Ogólnopolskie Badanie Umiejętności Trzecioklasistów Raport OBUT 2012. CKE , Warszawa 2012

Przetacznik-Gierowska M., Świat dziecka. Aktywność-Poznanie-Środowisko, Kraków 1993

Przetacznikowa M., Rozwój psychiczny dzieci i młodzieży, Warszawa 1967

Remża P., Niepowodzenia szkolne w dziedzinie matematyki a efektywność procesu dydaktycznego [w:] A. Karpińska, M. Zińczuk (red.), Dydaktyczna refleksja o edukacyjnych priorytetach, Warszawa 2014

Remża P., Uwarunkowania niepowodzeń szkolnych z matematyki, Białystok 2025

Robinson K., Zmiana Paradygmatu Edukacji, wykład, https://www.youtube.com/watch?v=_wxcXd5Cnv8, (dostęp:19.04.2022)

Rodziński A., Osoba, moralność, kultura, Lublin 1989, s. 27 [w:] L. Dyczewski, Wartości w kulturze polskiej, Lublin 1993

Rowe W., Zen i sztuka fotografii. Od inspiracji do obrazu, przeł. s. Kupisz, Gliwice 2011

Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 14 lutego 2017 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym, kształcenia ogólnego dla branżowej szkoły I stopnia, kształcenia ogólnego dla szkoły specjalnej przysposabiającej do pracy oraz kształcenia ogólnego dla szkoły policealnej, Dz.U. 2017 poz. 356, https://isap.sejm.gov.pl/isap.nsf/DocDetails.xsp?id=wdu20170000356, (dostęp: 06.11.2020)

Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 15 lutego 1999 r. w sprawie podstawy programowe kształcenia ogólnego, Dz.U. 1999 nr 14 poz. 129 http://isap.sejm.gov.pl/isap.nsf/download.xsp/WDU19990140129/O/D19990129_01.pdf. (dostęp:11.04.2021)

Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 16 maja 2019 r. w sprawie podstaw programowych kształcenia w zawodach szkolnictwa branżowego oraz dodatkowych umiejętności zawodowych w zakresie wybranych zawodów szkolnictwa branżowego

Rozporządzenie Ministra Edukacji narodowej z dnia 22 lutego 2019 r. w sprawie oceniania, klasyfikowania i promowania uczniów i słuchaczy w szkołach publicznych, DZ. U. z dnia 26 lutego 2019 r. Poz. 373

Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 23 grudnia 2008 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół, Dz. U. 2009 nr 4 poz. 17, http://prawo.sejm.gov.pl/isap.nsf/DocDetails.xsp?id=WDU20090040017, (dostęp:02.03.2022).

Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 11 marca 2026 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym Na podstawie art. 47 ust. 1 pkt 1 lit. a i b ustawy z dnia 14 grudnia 2016 r. – Prawo oświatowe (Dz. U. z 2025 r. poz. 1043, 1160 i 1837 oraz z 2026 r. poz. 187 i 203)

Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia

Rozporządzenie Ministra Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego w sprawie zaprowadzenia nauki uzupełniającej w myśl dekretu o obowiązku szkolnym z dnia 7 lutego 1919 roku, https://isap.sejm.gov.pl/isap.nsf/download.xsp/WDU19190790443/O/D19190443.pdf, (dostęp:26.11.2022 r.)

Russell B., Mistycyzm i logika oraz inne eseje, tłum. Z. Krasnodębski, Warszawa 1986

Sawiński, J.P., Zainteresowania jako kluczowy czynnik wpływający na osiągnięcia biologiczne uczniów. W: R. Kowalski (red.). Efekty działalności biologicznej i środowiskowej w zreformowanej szkole. Siedlce, 2004

Sawyer W.W., Matematyka nauką przyjemną, Warszawa 1988

Schuberth E., Matematyka w szkołach waldorfskich, Kraków 2013

Semadeni Z., Trudności i niepowodzenia w uczeniu się matematyki, w: Nauczanie matematyki w klasach początkowych. Podręcznik dla nauczyciela, red. Z. Semadeni, t. 1, wyd. II rozszerz., Warszawa 1991

Sitek M., Ostrowska E.B., PISA 2018 Czytanie, rozumienie, rozumowanie, Instytut Badań Edukacyjnych, Warszawa 2020

Skałbania R., Rola wyobraźni we wczesnej edukacji – wychowanie do transgresji innowacji, w: Science Bulletin of Chełm. Section of Pedagogy,2, 73-83, 2017

Skorny Z., Prace magisterskie z psychologii i pedagogiki: przewodnik metodologiczny dla studiujących nauczycieli, Warszawa 1984

Staszczak Z. (red), Słownik etnologiczny, Warszawa-Poznań, 1987

Steen L.A., Matematyka współczesna. Dwanaście esejów, Warszawa 1983

Stefańska-Klar R., Późne dzieciństwo. Młodszy wiek szkolny, w: B. Harwas-Napierała, J. Trempała, (red:) Psychologia rozwoju człowieka. Charakterystyka okresów człowieka, Warszawa 2020

Stefańska-Klar R., Późne dzieciństwo. Młodszy wiek szkolny,(w:) Psychologia rozwoju człowieka, t. 2, red. B. Harwas-Napierała, J. Trempała, Warszawa 2001

Stróżyński K., Nowe potrzeby edukacyjne na IV etapie kształcenia. „Otwarta Szkoła" 2002

Strykowski W., Audiowizualne materiały dydaktyczne. Podstawy kształcenia multimedialnego, Warszawa 1984

Strykowski W., Media wyznacznikiem zmian w edukacji, NEODIDAGMATA 25/26, Poznań 2003

Strzemieczny J., Przedmowa, (w:) D. Sterna, Uczę (się) w szkole, Warszawa 2014,

Stucki E., Heurystyczna metoda Polya w początkowym nauczaniu matematyki. „Życie szkoły", nr 10, 1992

Such J., Wstęp do metodologii ogólnej nauk, Poznań 1969

Suchecki A. M., Naukowe rozumienie kultury jako zjawiska społeczno-ekonomicznego –przegląd koncepcji, Zeszyty Naukowe Ostrołęckiego Towarzystwa Naukowego,| Zeszyt | XXVI, 2012

Suchodolski B., Pedagogika. Podręcznik dla kandydatów na nauczycieli, Warszawa 1980

Suchodolski B., Uspołecznienie kultury, Warszawa 1947

Sułowska A., rozmowa z Peterem Liljedahlem, Od znudzenia do myślenia. Rozumowanie matematyczne,https://fde.org.pl/od-znudzenia-do-myslenia-rozumowanie-matematyczne/, (dostęp:16.01.2022).

Swoboda E., O przygotowaniu do nauczania matematyki wczesnoszkolnej – krytycznie, „Edukacja – Technika – Informatyka" nr 4/22/2017

Syrek E., Teoretyczne podstawy współczesnej pedagogiki zdrowia jako subdyscypliny pedagogiki, Pedagogika Społeczna 2019, DOI: http://dx.doi.org/10.35464/1642-672X.PS.2019.2.01

Syrek E., Kryzys kompetencji zdrowotnych w społeczeństwie i jego konsekwencje dla zdrowia publicznego, Studia edukacyjne 2022 DOI: 10.14746/se.2022.65.2

Szacka B., Wprowadzenie do socjologii, Warszawa 2003

Szczepański J., Wstęp do wydania polskiego [w:] F. Znaniecki, Nauki o kulturze. Narodziny i rozwój, przeł. J. Szacki, wstęp J. Szczepański, Warszawa 1992

Szewczuk W., Słownik psychologiczny, Warszawa 1985

Szmidt K.J., Pedagogika twórczości, Gdańsk 2007

Sztumski J., Wstęp do metod i technik badań społecznych, Śląsk, Katowice 1995

Szulc B.M., Pierzchała K., Człowiek we współczesnym społeczeństwie. Wybrane problemy, Wydawnictwo Adam Marszałek, Toruń 2022.

Szymczak M., Słownika języka polskiego, 1981, t. III,

Śliwerski B., Na ostrzu noża. „Vox Educandi" nr 1 (15) 2005

Śliwerski B., Recepcja planu daltońskiego Helen Parkhurst w Polsce, [w:] Röhner R., Wenke H., Pedagogika planu daltońskiego, Łódź 2011

Śliwerski, Problemy współczesnej edukacji: dekonstrukcja polityki oświatowej III RP, Kraków 2009

Tatara A., Edukacja wczesnoszkolna wokół problemów i nowych rozwiązań, s.12, w: Edukacja Elementarna w Teorii i Praktyce, 10(37/3), 11-28, 20215.

Tatarkiewicz W., Historia filozofii, Warszawa 1978.

Treliński G., Stosowanie matematyki jako problem dydaktyki matematyki, Kraków 1982

Trentowski B.F., Chowanna czyli system pedagogiki narodowej jako umiejętności wychowania, nauki i oświaty, słowem wykształcenia naszej młodzieży, t. 1–2, Biblioteka Klasyków Pedagogiki, Wrocław 1970.

Trzebiatowski T., Problem powszechności nauczania w Polsce w latach 1918—1931, s.49, [w:] Rozprawy z Dziejów Oświaty 12/1969, https://bazhum.muzhp.pl/media/texts/rozprawy-z-dziejow-oswiaty/1969-tom-12/rozprawy_z_dziejow_oswiaty-r1969-t12-s49-87.pdf, (dostęp:17.05.2025).

Turczyńska M., Dalton – od teorii do praktyki, w: Acta Scientifica Academiae Ostroviensis. Sectio A, Nauki Humanistyczne, Społeczne i Techniczne 2019, v. 13-14, wyd.1-2

Turczyńska M., Lasek D., Od szkoły tradycyjnej do kreatywności i innowacyjności. International Conference on Innowation and Wellbeing in Education Editon 109-11 Mai 2024 Satu Mare

Turczyńska M., Zamiast klasówki lapbook, Inspiracje Daltońskie13/2021

Turnau I., Turnau S.. Matematyka realistyczna. Program nauczania matematyki dla II etapu edukacyjnego - klasy IV-VI szkoły podstawowej,Warszawa 2012

Turner J. S., Donald B. Helms, Rozwój człowieka, Warszawa 1999

Uchwała Nr 161 Rady Ministrów z dnia 15 czerwca 1972 r.w sprawie utworzenia Instytutu Programów Szkolnych, https://sip.lex.pl/akty-prawne/mp-monitor-polski/utworzenie-instytutu-programow-szkolnych-16818096, (dostęp: 09.06.2023)

Uchwała Sejmu Polskiej Rzeczypospolitej Ludowej z dnia 13 października 1973 r. w sprawie systemu edukacji narodowej, https://www.prawo.pl/akty/m-p-1973-44-260,16818493.html,(dostęp: 27.11.2022).

Usiskin Z., Matematyka jako język, tłumaczenie oryginału z Communication in Mathematics, K -12 and Beyond, NCTM 1996 Yearbook, http://mathsiedlce.edu.pl/attachments/article/24/020_Usiskin_Z.pdf, (dostęp:11.11.2020)

Ustawa z dnia 11 marca 1932 r. o ustroju szkolnictwa, https://isap.sejm.gov.pl/isap.nsf/DocDetails.xsp?id=wdu19320380389, (dostęp:22.10.2022).

Ustawa z dnia 15 lipca 1961 r. o rozwoju systemu oświaty i wychowania, Dz.U.1961.32.160, https://www.prawo.pl/akty/dz-u-1961-32-160,16785051.html,(dostęp: 26.11.2022)

Ustawa z dnia 17 lutego 1922 r. o zakładaniu i utrzymywaniu publicznych szkół powszechnych w: https://sip.lex.pl/akty-prawne/dzu-dziennik-ustaw/zakladanie-i-utrzymywanie-publicznych-szkol-powszechnych-16777262 (dostęp: 21.05.2024)

Ustawa z dnia 7 września 1991 r. o systemie oświaty. Dz.U. 1991 nr 95 poz. 425, https://isap.sejm.gov.pl/isap.nsf/DocDetails.xsp?id=WDU19910950425, (dostęp:26.11.2022).

Ustawa z dnia 8 stycznia 1999 r. - Przepisy wprowadzające reformę ustroju szkolnego., Dz.U. 1999 nr 12 poz. 96, https://isap.sejm.gov.pl/isap.nsf/DocDetails.xsp?id=WDU19990120096, (dostęp:29.09.2019)

Uszyńska – Jarmoc J., Podróże, skarby, przygoda. Podręcznik i program rozwijania twórczości, samoświadomości oraz dyspozycji autokreacyjnych dzieci klas I–III, Białystok 2005

Uszyńska – Jarmoc J., Twórcza aktywność dziecka, teoria -rzeczywistość-perspektywy rozwoju, Białystok 2003

Vasta R., Marshall M. Haith, Skott A. Miller, Psychologia dziecka, Warszawa 1995

Walczyna J., Integracja nauczania początkowego, Wrocław- Warszawa- Kraków 1968

Walton E., 20 prostych pytań do oceny lekcji, https://teacherblog.ef.com/20-question-checklist-evaluate-lesson/, (dostęp: 22.03.2023)

Wielki słownik języka polskiego, https://wsjp.pl/haslo/podglad/36557/refleksja/4179140/rezultat (dostęp: 07.02.2020)

Wilgocka B. - Okoń, Gotowość szkolna dzieci sześcioletnich. Warszawa 2003

Williams R., Keywords: A Vocabulary of Culture and Society. New York 1983: Oxford University Press

Wittmann E., Dydaktyka matematyki jako „design science", „Dydaktyka Matematyki" 1993

Wołoszyn S., Dzieje wychowania i myśli pedagogicznej w zarysie, Warszawa 1964

Wołoszynowa L., Młodszy wiek szkolny, (w:) Psychologia rozwojowa dzieci i młodzieży, red. M. Żebrowska, Warszawa 1997

Wołoszynowa L., Rozwój i wychowanie dzieci w młodszym wieku szkolnym, Warszawa 1967

Woronowicz S., Czym jest piękno w matematyce?, https://www.polityka.pl/tygodnikpolityka/spoleczenstwo/11067,1,czym-jest-piekno-w-matematyce.read, dostęp: 21.11.2020).

Wroczyński R., Dzieje oświaty polskiej 1795–1945, Warszawa 1980

Wrońska M., Kultura medialna adolescentów. Studium dostępu i zastosowań, Rzeszów 2012

Wrońska M., Early Years Teacher Training Through Practice. The Polish Example. - International Journal of Pedagogy Innovation and New Technologies, Vol. 10, No. 1, pp. 79-90, 2023

Wygotski, L.S., Nauczanie a rozwój w wieku przedszkolnym. W: L.S. Wygotski, Wybrane prace psychologiczne, Wybór i tłumaczenie: Edda Flesznerowa i Józef Fleszner, redaktor naukowy Edward Franus, Warszawa 1971

Zalecenie Rady z dnia 22 maja 2018 r. w sprawie kompetencji kluczowych w procesie uczenia się przez całe życie, Dz. Urz. UE C 189 z 4.6.2018, s. 9, https://eur-lex.europa.eu/legal-content/PL/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604(01) (wersja na dzień:18.04.2021

Zaręba E., Badania empiryczne ilościowe i jakościowe w pedagogice, w: Orientacje w metodologii badań pedagogicznych, S. Palka (red.),, Kraków 1998

Zarządzenie nr 23 Ministra Edukacji Narodowej z dnia 18 sierpnia 1992 r. w sprawie minimum programowego obowiązkowych przedmiotów ogólnokształcących, Dz.Urz.MEN.1992.5.25, https://sip.lex.pl/akty-prawne/dzienniki-resortowe/minimum-programowe-obowiazkowych-przedmiotow-ogolnoksztalcacych-33631435, (wersja na dzień:18.04.2021)

Zarządzenie Nr 8 Ministra Edukacji Narodowej z dnia 15 maja 1997 r. w sprawie podstaw programowych obowiązkowych przedmiotów ogólnokształcących, Dz. Urz. MEN Nr 5, poz. 23

Zarządzenie nr 8 Ministra Edukacji Narodowej z dnia 15 maja 1997 r. w sprawie podstaw programowych obowiązkowych przedmiotów ogólnokształcących, Dzienniki resortowe Dz.Urz.MEN.1997.5.23, https://sip.lex.pl/akty-prawne/dzienniki-resortowe/podstawy-programowe-obowiazkowych-przedmiotow-ogolnokształcacych-33631758 (dostęp: 24.01. 2023)

Zdankiewicz-Scigala E., Maruszewski T., Wyobrażenia jako pierwsza forma doświadczenia generowanego przez jednostkę,https://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:nfbb_2T5xrIJ:https://bg.uwb.edu.pl/ekopie/archiwum/k00468_2.doc+&cd=1&hl=pl&ct=clnk&gl=pl&client=firefox-b-d,(dostęp:20.042020)

Zeki S., Romaya J.P., Benincasa D.M., Atiyah M.F., The experience of mathematical beauty and its neural correlates, Londyn 2014

Zmiany w systemie oświaty, KNO.430.002.2019 Nr ewid. 42/2019/P/18/027/KNO, Warszawa 20.05.2019, s.7, w: https://www.nik.gov.pl/plik/id,20607,vp,23235.pdf ,(dostęp: 25.05.2022)

Żebrowska M., (red), Psychologia rozwojowa dzieci i młodzieży, Warszawa 1977

Żytko M., Integracja treści kształcenia, art. cyt. W: Agata Tatara, Edukacja wczesnoszkolna wokół problemów i nowych rozwiązań, „Edukacja i Dialog'', 95/2, s. 27, 1998

Żytko M., Ogólnopolskie Badanie Umiejętności Trzecioklasistów (OBUT)– pedagogiczny eksperyment z „politycznymi konsekwencjami", Teraźniejszość – Człowiek – Edukacja, Nr 4(64), 2013

Spis fotografii

Fotografia 1. Tablica zadań dodatkowych z matematyki 52
Fotografia 2. Przykład sygnalizatorów 53
Fotografia 3. Tablica ilustrująca poprawne wykonanie zadań przez uczniów …… 54
Fotografia 4. Tablice emocji 55
Fotografia 5. Tablice emocji 56
Fotografia 6. Cele i kryteria sukcesu z edukacji matematycznej w klasie III dotyczące umiejętności rozwiązywania zadań tekstowych (opracowanie nauczyciel edukacji wczesnoszkolnej w Zespole Szkół Publicznych w Szewnie) 59
Fotografia 7. Cele i kryteria sukcesu kryteria sukcesu dotyczące edukacji matematycznej w klasie I (opracowanie nauczyciela ZSP w Szewnie) 62
Fotografia 8. Przykład informacji zwrotnej – klasa I 62
Fotografia 9. Przykład informacji zwrotnej – klasa II 62
Fotografia 10. Zaangażowanie dzieci podczas wykonywania lapbooków 66
Fotografia 11. Zaangażowanie uczniów w tworzeniu książek na kolanie 66
Fotografia 12. Zaangażowanie uczniów w aranżowaniu lapbooków 67
Fotografia 13. Zaangażowanie uczniów w aranżowaniu lapbooków 67
Fotografia 14. Przykład lapbooka matematycznego 68
Fotografia 15. Przykład lapbooka matematycznego 68
Fotografia 16. Przykład lapbooka matematycznego 69
Fotografia 17. Choinkowy fraktal w chmurach 95
.Fotografia 18. *Symetria na niebiesko* 113
Fotografia 19. Serowe ułamki 114
Fotografia 20. Walec w chmurach 115
Fotografia 21. Kolorowa nieskończoność 115
Fotografia 22. Symetria plam żaby rogatej 116
Fotografia 23. Opinie uczniów klasy drugiej eksperymentalnej na temat fotografowania matematyki 289
Fotografia 24. Termometr emocji, jakie towarzyszą edukacji matematycznej 291
Fotografia 25. Termometr emocji, jakie towarzyszą edukacji matematycznej 291
Fotografia 26. Latająca symetria 357
Fotografia 27. *Zakręcone koła* 358

Fotografia 28. *Ośmielony ośmiościan*.....359
Fotografia 29. W koło jest wesoło.....360
Fotografia 30. *Podniebna geometria*.....361
Fotografia 31. Pracowity okrąg.....362
Fotografia 32. *Różnobarwne prostokąty*.....363
Fotografia 33. *Pomarańcza kołem się toczy*.....364
Fotografia 34. *Koła na bogato*.....365
Fotografia 35. *Symetria na niebiesko*.....366
Fotografia 36. *Symetria ruin*.....367
Fotografia 37. *Tajemniczy trapez*.....368
Fotografia 38. *Strefa kolorowych prostokątów*.....369
Fotografia 39. Symetria plam żaby rogatej.....370
Fotografia 40. Symetria w zamku w Lublinie.....371
Fotografia 41 *Symetria w liściu*.....372
Fotografia 42. *Owalny most*.....373
Fotografia 43. *Wiszące prostokąty*.....374
Fotografia 44. *Czworokątna harmonia okien*.....375
Fotografia 45. *Dzień dobry kwadracie, prostokątów bracie*.....376
Fotografia 46. *Owocowy trójkąt*.....377
Fotografia 47. *Koło czasu*.....378
Fotografia 48. *Odlotowa kula*.....379
Fotografia 49. *Wysoko, wyżej, najwyżej prostokącie*.....380
Fotografia 50 *Zaczarowane koła wokół nas*.....381
Fotografia 51. *Krajobrazowa oś liczbowa*.....382
Fotografia 52. *Historyczne walce*.....383
Fotografia 53. *Matematyka w naturze*.....384
Fotografia 54. *Podróżujące kwadraty*.....385
Fotografia 55. *Kolorowa nieskończoność*.....386

Spis tabel

Tabela 1. Zakres dojrzałości do uczenia się matematyki w warunkach szkolnych 39
Tabela 2. Etapy przyswajania wiedzy i umiejętności przez uczniów oraz interwencje nauczyciela w procesie interioryzacji za pomocą fotografii 121
Tabela 3. Etapy przyswajania wiedzy i umiejętności przez uczniów oraz interwencje nauczyciela w procesie eksterioryzacji 123
Tabela 4. Cele i sposoby realizacji fotoedukacji matematycznej 125
Tabela 5. Kluczowe różnice między tradycyjnymi metodami nauczania-uczenia się a fotoedukacją 125
Tabela 6. Zmiany strukturalne po roku 1999.....145
Tabela 7. Porównanie założeń edukacji matematycznej w klasach I–III w podstawie programowej z 2017/2019 oraz zmian z 2024 roku 174
Tabela 8. Edukacja matematyczna w klasach I–III – porównanie: podstawa programowa 2024 vs 2026.....178
Tabela 9. Zmienne i wskaźniki badań własnych 200
Tabela 10. Zestawienie danych z badań testowych uczniów pierwszej klasy z uwzględnieniem grupy eksperymentalnej i kontrolnej 210
Tabela 11. Szczegółowe dane uzyskane w badaniu testowym oraz analizie statystycznej uczniów klasy pierwszej w grupie eksperymentalnej 211
Tabela 12. Szczegółowe dane uzyskane w badaniu testowym oraz analizie statystycznej uczniów klasy pierwszej w grupie kontrolnej 212
Tabela 13. Zestawienie danych z badań testowych uczniów drugiej klasy z uwzględnieniem grupy eksperymentalnej i kontrolnej 214
Tabela 14. Szczegółowe dane uzyskane w badaniu testowym oraz analizie statystycznej uczniów klasy drugiej w grupie eksperymentalnej 215
Tabela 15. Szczegółowe dane uzyskane w badaniu testowym oraz analizie statystycznej uczniów klasy drugiej **w** grupie kontrolnej 218
Tabela 16. Zestawienie danych z badań testowych uczniów trzeciej klasy z uwzględnieniem grupy eksperymentalnej i kontrolnej 220
Tabela 17. Zestawienie wskaźników statystycznych uzyskanych w badaniu testowym uczniów trzeciej klasy z uwzględnieniem grupy eksperymentalnej i kontrolnej.....221

Tabela 18. Szczegółowe dane uzyskane w badaniu testowym oraz analizie statystycznej uczniów klasy trzeciej w grupie eksperymentalnej 222
Tabela 19. Szczegółowe dane uzyskane w badaniu testowym oraz analizie statystycznej uczniów klasy trzeciej w grupie eksperymentalnej 224
Tabela 20. Wyniki procentowe badań wstępnych i końcowych w grupie eksperymentalnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy pierwszej w zakresie języka matematycznego 227
Tabela 21. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie kontrolnej – ocena umiejętności badanych uczniów klasy pierwszej w zakresie języka matematycznego 228
Tabela 22. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie eksperymentalnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy drugiej w zakresie języka matematycznego.....232
Tabela 23 Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie kontrolnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy drugiej w zakresie języka matematycznego 233
Tabela 24. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie eksperymentaln**ej** - ocena umiejętności badanych uczniów klasy trzeciej w zakresie języka matematycznego 237
Tabela 25. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie kontrolnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy trzeciej w zakresie języka matematycznego 238
Tabela 26. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie eksperymentalnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy pierwszej w zakresie wyobraźni matematycznej 243
Tabela 27. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie kontrolnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy pierwszej w zakresie wyobraźni matematycznej 243
Tabela 28. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie eksperymentalnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy drugiej w zakresie wyobraźni matematycznej ...246
Tabela 29. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie kontrolnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy drugiej w zakresie wyobraźni matematycznej 247
Tabela 30. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie eksperymentalnej - ocena umiejętności badanych uczniów klas trzecich w zakresie wyobraźni matematycznej....250
Tabela 31. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie kontrolnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy trzeciej w zakresie wyobraźni matematycznej 251
Tabela 32. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie eksperymentalnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy pierwszej w zakresie elegancji matematycznej .254
Tabela 33. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie kontrolnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy pierwszej w zakresie elegancji matematycznej 255

Tabela 34. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie eksperymentalnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy drugiej w zakresie elegancji matematycznej 259
Tabela 35. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie kontrolnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy drugiej w zakresie elegancji matematycznej 259
Tabela 36. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie eksperymentalnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy trzeciej w zakresie elegancji matematycznej 263
Tabela 37. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie kontrolnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy trzeciej w zakresie elegancji matematycznej 263
Tabela 38. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie eksperymentalnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy pierwszej w zakresie twórczości matematycznej 268
Tabela 39. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie kontrolnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy pierwszej w zakresie twórczości matematycznej 269
Tabela 40. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie eksperymentalnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy drugiej w zakresie twórczości matematycznej ..272
Tabela 41. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie kontrolnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy drugiej w zakresie twórczości matematycznej 270
Tabela 42. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie eksperymentalnej - ocena umiejętności badanych uczniów klasy trzeciej w zakresie twórczości matematycznej ..271
Tabela 43. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie kontrolnej – ocena umiejętności badanych uczniów klasy trzeciej w zakresie twórczości matematycznej 275
Tabela 44. Wyniki badań wstępnych i końcowych w grupie kontrolnej – ocena umiejętności badanych uczniów klasy trzeciej w zakresie twórczości matematycznej 276
Tabela 45. Opinie uczniów klas I-III uczniów klas eksperymentalnych na temat roli fotoedukacji w zgłębieniu wiadomości matematycznych 290
Tabela 46. Emocje towarzyszące uczniom na zajęciach z fotomatematyki w klasach 1-3 ...292
Tabela 47. Ocena zadowolenia uczniów z uczestniczenia w zajęcia fotoedukacji w klasach I-III 293

Spis infografik

Infografika 1. Filary Planu Daltońskiego 48
Infografika 2. Zalety stosowania na zajęciach współpracy 50
Infografika 3. Zastosowanie kolorów w wizualizacji tygodnia w Planie Daltońskim 51
Infografika 4. Zastosowanie kolorów w wizualizacji zadań dla uczniów w Planie Daltońskim w klasach I-III.....52
Infografika 5. Walory stosowania celów uczenia się 59
Infografika 6. Czynniki wpływające na rozwój kultury matematycznej 85
Infografika 7. Określenie kultury szkoły 87
Infografika 8. Przykładowe warunki zewnętrzne i wewnętrzne kształtujące kulturę szkoły ...88
Infografika 9. Przykłady pytań poszukujących.....92
Infografika 10. Komponenty kultury matematycznej ucznia 98
Infografika 11. Elementy sprawności matematycznej 100
Infografika 12. Elementy języka matematycznego.....103
Infografika 13. Symbole wykorzystywane do podstawowych operacji matematycznych 104
Infografika 14. Grupy znaczeniowe wyobraźni.....107
Infografika 15. Konteksty rozpatrywania twórczości.....110
Infografika 16. Cechy twórczości uczniów klas I-III 115
Infografika 17. Struktura szkolnictwa według reformy jędrzejewiczowskiej 138
Infografika 18. Trzystopniowa struktura szkolnictwa powszechnego w reformie jędrzejewiczowskiej 139
Infografika 19. Zmiana struktury szkół po 2017 roku.....147
Infografika 20. Struktura Minimum programowego przedmiotów ogólnokształcących w szkołach podstawowych i średnich obowiązujące od 1 września 1992 r. 151
Infografika 21. Istota podstaw programowych kształcenia ogólnego 153
Infografika 22. Elementy postawy programowej obowiązującej od 1 września 1999 roku...156
Infografika 23. Schemat podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkół podstawowych obowiązującej od 1 września 2009 roku. 159
Infografika 24. Podmioty objęte rozporządzeniem z dnia 23 grudnia 2008 r. 160
Infografika 25. Schemat podstawy programowej obowiązującej od 1 września 2017 roku ..162
Infografika 26. Schemat szczegółowy podstawy programowej kształcenia ogólnego obowiązujący od 1 września 2019 roku. 164

Infografika 27. Rola/doniosłość celów kształcenia 169
Infografika 28. Obszary edukacji matematycznej świetle podstaw programowych 172

Aneksy

Załączniki:

Załącznik nr 1 Narzędzie badawcze - Test sprawności matematycznej dziecka z klasy 1[31].

Imię i nazwisko ucznia: ……..

Zadanie1.

Policz i napisz, ile jest jabłek?



Zadanie 2

Kuba dostał na imieniny 2 duże samochody i 5 małych. Ile samochodów otrzymał Kuba?

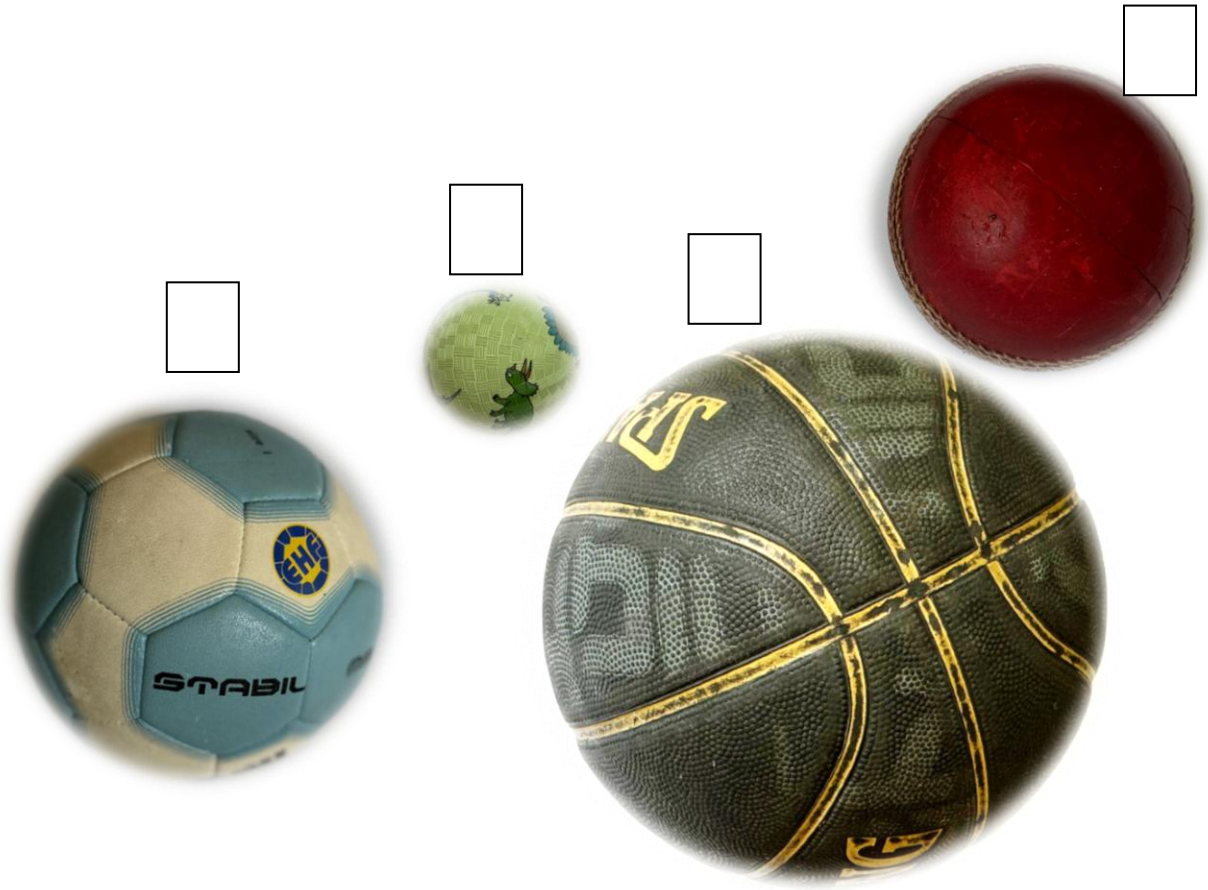


Odpowiedź

[31] Zawarte w testach fotografie są mojego autorstwa.

Zadanie 3.

Otocz pętlą najmniejszą piłkę.



Zadanie 4.

Co znajduje się na półce pod misiem.

Podkreśl prawidłową odpowiedź

Książki

Piłka



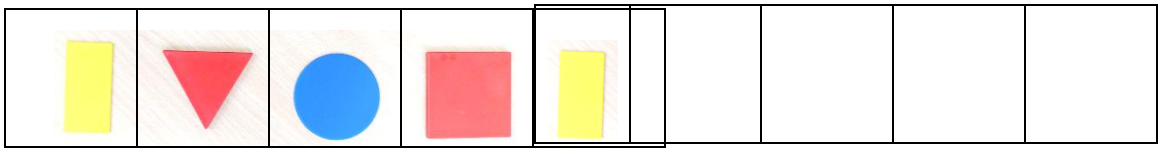
Zadanie5.

W puste okienka wpisz prawidłową liczbę.

	+	2	=	7
6	+		=	9
5	+	0	=	
	-	5	=	1
5	-		=	2
8	-		=	8

Zadanie 6.

Dorysuj figury według wzoru



Załącznik nr 2 Narzędzie badawcze **- Test sprawności matematycznej dziecka z klasy 2**

Imię i nazwisko ucznia: ……..

Zadanie 1

Agata miała trzy monety: 1zł, 2zł, 5zł



Oblicz, czy wystarczy jej pieniędzy na zakup czekolady za 7 zł.

Podkreśl prawidłową odpowiedź i ją uzasadnij.

Obliczenia ……

……

Odpowiedź : TAK, wystarczy, bo ma ……. zł.

Odpowiedź: NIE, nie wystarczy, bo ma ……. zł.

Zadanie 2

Uzupełnij działania. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.

8	·	7	=	
6	·		=	48
	·	9	=	27

Zadanie 3

Nad misiem narysuj jabłko, a pod misiem narysuj piłkę.



Zadanie 4

Zuzia włożyła do koszyka 12 jabłek, 3 gruszki i 5 śliwek. Ile owoców włożyła Zuzia do koszyka?

Obliczenia ……..

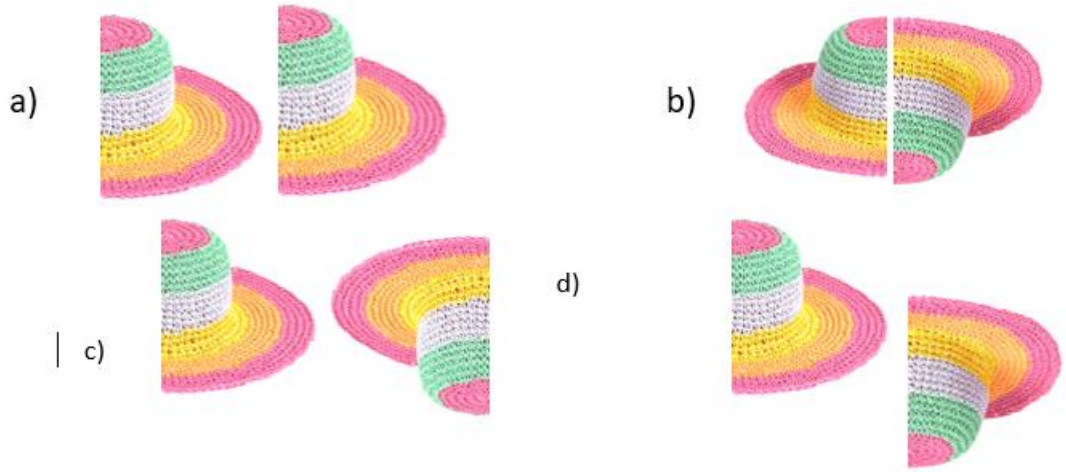
Odpowiedź: …….

Zadanie 5

Agnieszka przecięła rysunek na pół.



Na którym z poniższych obrazków pokazano obie części rysunku Agnieszki ?
Otocz je pętlą



Zadanie 6

Przyjrzyj się autom.



Odpowiedz na pytania podkreślając prawidłową odpowiedź:

Jakiego koloru auto jedzie pomiędzy autem zielonym i białym?

żółte

fioletowe

Jakie auta jadą przed żółtym autem?

białe i zielone

zielone i fioletowe

Ile aut jedzie za zielonym autem ?

jedno auto

dwa auta

Załącznik nr 3 Narzędzie badawcze - **Test sprawności matematycznej dziecka z klasy 3**

Zadanie 1

Czterech uczniów wzięło udział w konkursie matematycznym. Wszyscy wykonali poprawnie działania.

Zosia: 31 + 62

Marysia: 90 – 33

Michał: 36 + 48

Dominik: 91- 38

Który z uczniów otrzymał w wyniku liczbę 53?

Podkreśl prawidłową odpowiedź.

Zosia b) Marysia c) Michał d) Dominik

Zadanie 2

Agata kupiła trzy różne czekolady. Zapłaciła za nie 10 zł. Dała kasjerce 20 zł. Kasjerka wydała jej resztę monetami dwuzłotowymi. Ile monet otrzymała Agata? Podkreśl właściwą odpowiedź.

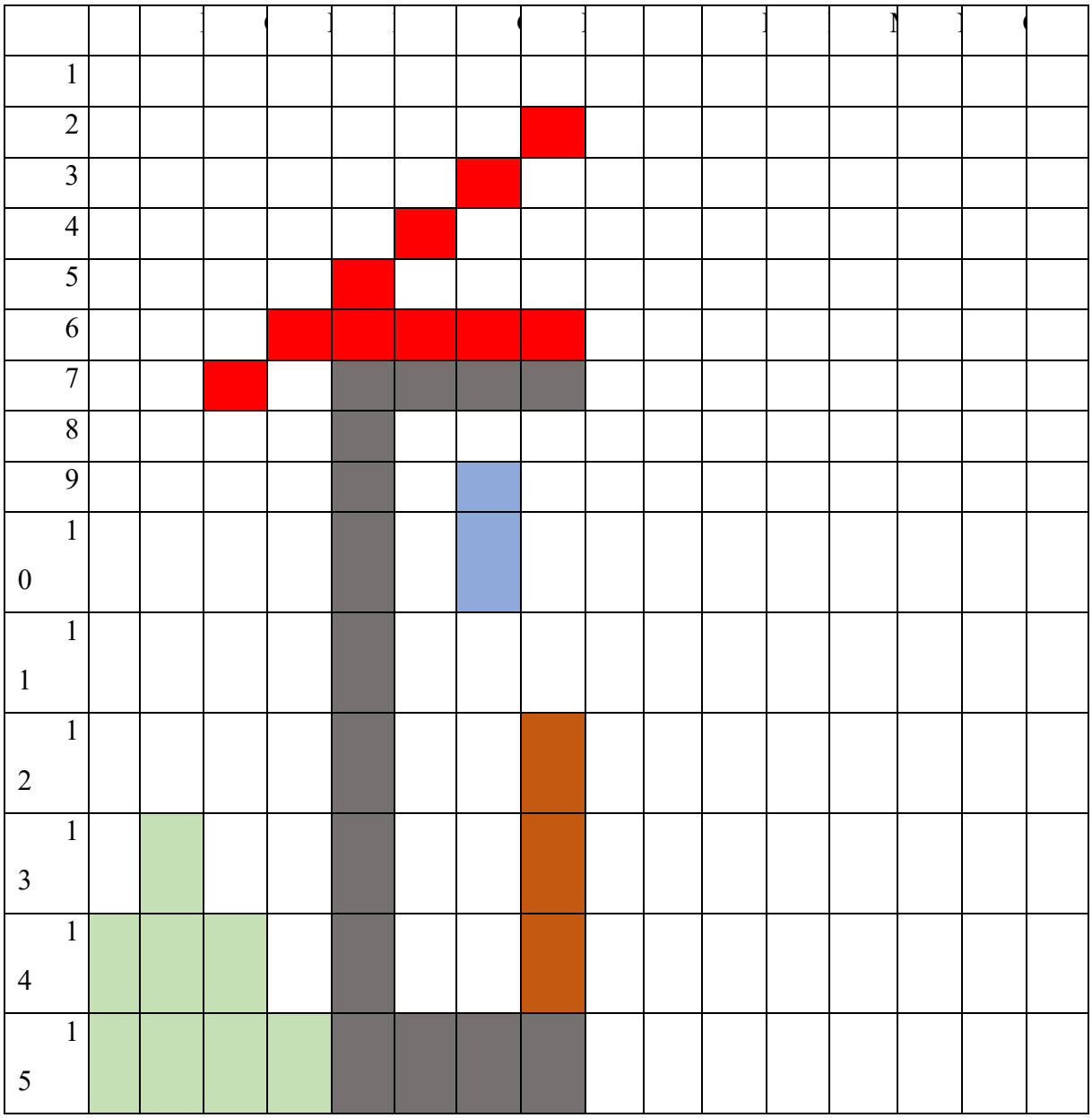
4 b) 10 c) 2 d) 5

Zadanie 3

Ola narysowała połowę obrazka. Dorysuj drugą połowę figury symetrycznie względem osi a

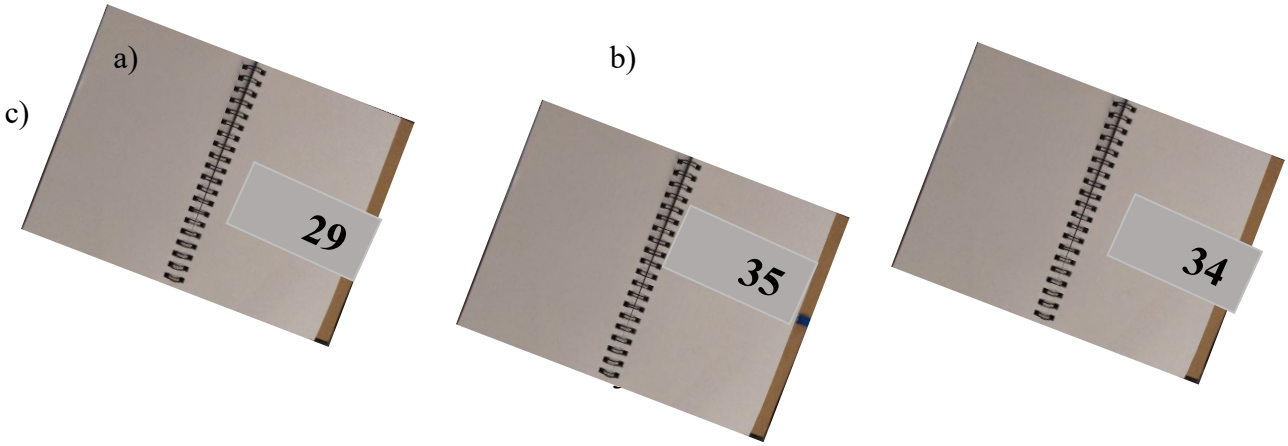
a





Zadanie 4

Michał waży 31 kg. Paweł jest o 4 kg cięższy od Michała. Janek waży więcej niż Michał, ale mniej niż Paweł. Janek zapisał swoją wagę w notesie. Który to notes? Otocz go pętlą.



Zadanie 5

Otocz pętlą termometr wskazujący najwyższą temperaturę.

b) c) d)



Zadanie 6

Sześcioro dzieci trzyma się za ręce. Niektóre dzieci stoją przodem, a inne tyłem (patrz zdjęcie). Ile z tych dzieci trzyma inne dziecko swoją lewą ręką?

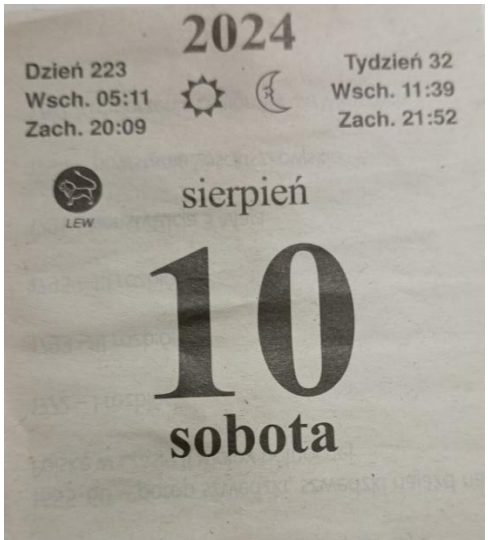
Otocz pętlą właściwą odpowiedź.

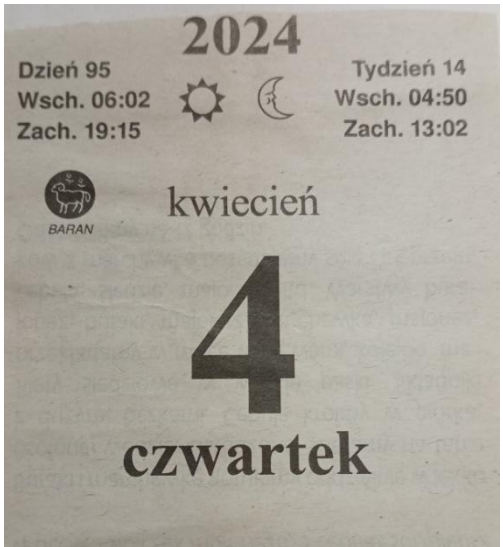


a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

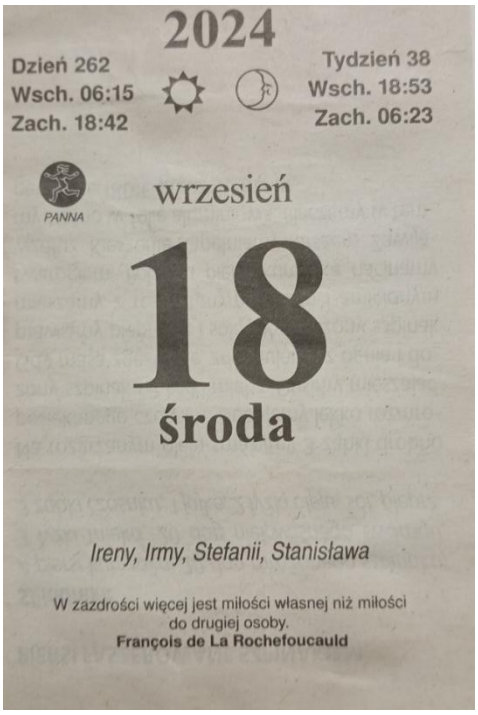
Zadanie 7

Przyjrzyj się kartkom z kalendarza i odpowiedz na pytania.









O której godzinie był wschód słońca 24 stycznia 2024 r.?

Odpowiedź

Przyjrzyj się kartkom z kalendarza i napisz którego dnia, w jakim miesiącu był najdłuższy dzień i ile trwał?

Odpowiedź

O której godzinie był zachód słońca 18 września 2024r. ?

Odpowiedź

Jakim dniem tygodnia był 10 sierpnia 2024 r. ?

Odpowiedź

Złącznik nr 4 -Karta oceny zadań ucznia klasy I

1. Policz i napisz ile jest jabłek?



1. Zadanie wykonane…	*Ilość przyznanych punktów*
Poprawne wykonanie zadania	*1*
Brak wykonania zadania	*0*
Niepoprawne wykonanie zadania	*0*

2. Kuba dostał na imieniny 2 duże samochody i 5 małych. Ile samochodów otrzymał Kuba?





Odpowiedź

2. Zadanie wykonane…	*Ilość przyznanych punktów*
Przedstawienie **- poprawnego** sposobu obliczenia łącznej ilości samochodów Kuby *oraz* - ***podanie poprawnego wyniku*** *oraz* - sformułowanie **poprawnej** odpowiedzi.	*3*
Przedstawienie - **poprawnego** sposobu obliczenia łącznej ilości samochodów Kuby *oraz* - ***podanie poprawnego wyniku*** *oraz* - sformułowanie **niepoprawnej** odpowiedzi.	*2*
Przedstawienie - **poprawnego** sposobu obliczenia łącznej ilości samochodów Kuby *oraz* - ***podanie niepoprawnego wyniku*** *oraz* - sformułowanie **poprawnej** odpowiedzi.	*1*
Przedstawienie - **poprawnego** sposobu obliczenia łącznej ilości samochodów Kuby *oraz* - ***podanie niepoprawnego wyniku*** *oraz* - sformułowanie **niepoprawnej** odpowiedzi.	*1*
Przedstawienie **niepoprawnego sposobu obliczenia** łącznej ilości samochodów Kuby niezależnie od poprawnego, czy niepoprawnego przedstawienia wyniku, czy też odpowiedzi	*0*
Brak wykonania zadania	*0*

3. Otocz pętlą najmniejszą piłkę.



3. Zadanie wykonane…	*Ilość przyznanych punktów*
Poprawne wykonanie zadania	*1*
Brak wykonania zadania	*0*
Niepoprawne wykonanie zadania	*0*

4. Co znajduje się na półce pod misiem.

Podkreśl prawidłową

odpowiedź



Książki

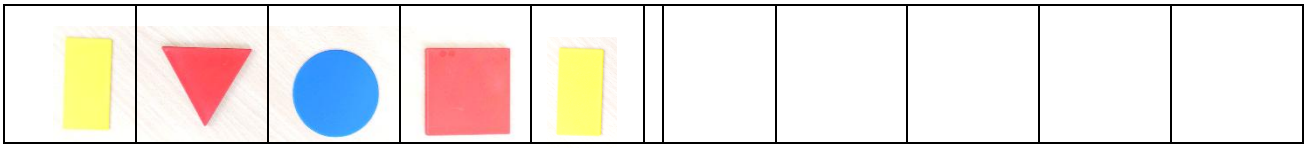
Piłka

5. W puste okienka wpisz prawidłową liczbę.

	+	2	=	7		-	5	=	1
6	+		=	9	5	-		=	2
5	+	0	=		8	-		=	8

5.Zadanie wykonane…	Ilość przyznanych punktów
Za każde poprawne obliczenie i zapisanie liczby w okienku	0,5
Brak wykonania zadania lub niepoprawne zapisanie wszystkich liczb w okienkach	0
Maksymalna ilość punktów do przyznania za poprawne wykonanie zadania	3

6.Dorysuj figury według wzoru



6.Zadanie wykonane…	Ilość przyznanych punktów

Poprawne wykonanie zadania	1
Brak wykonania zadania	0
Niepoprawne wykonanie zadania	0
Nawet jeden błąd w wykonaniu zadania dotyczący kształtu lub koloru – uczeń otrzymuje 0 pkt.	

Złącznik nr 5 - Karta oceny zadań ucznia klasy II

Do wykonania 6 zadań

Zadanie 1

Agata miała trzy monety: 1zł, 2zł, 5zł



Oblicz, czy wystarczy jej pieniędzy na zakup czekolady za 7 zł.
Podkreśl prawidłową odpowiedź i ją uzasadnij.

Obliczenia
……

a) *Odpowiedź* : TAK, wystarczy, bo ma …… zł.
b) *Odpowiedź*: NIE, nie wystarczy, bo ma ……. zł.

1. Zadanie wykonane…	*Ilość przyznanych punktów*
Przedstawienie - **poprawnego** sposobu obliczenia ile pieniędzy ma Agata ***oraz*** -**poprawnego** sposobu obliczenia, czy wystarczy Agacie pieniędzy na zakup czekolady za 7 zł. ***oraz*** -**poprawne** podkreślenie i uzasadnienie odpowiedzi.	*3*
Jeżeli uczeń obliczy w pamięci ile pieniędzy ma Agata ***oraz*** -**poprawnie przedstawi** sposób obliczenia, czy wystarczy Agacie pieniędzy na zakup czekolady za 7 zł. ***oraz*** -**poprawne** podkreśli i uzasadnieni odpowiedź	*3*
Uwagi do zadania: • Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne, spełniające warunki zadania. • Jeżeli na dowolnym etapie rozwiązania zadania uczeń popełnia jeden lub więcej błędów rachunkowych, ale stosuje poprawne sposoby obliczania, to ocenę rozwiązania ***obniża się o 1 punkt.***	
Jeżeli uczeń tylko **poprawnie** podkreśli i uzasadnieni odpowiedź	*2*
Brak wykonania zadania	*0*

Zadanie 2

Uzupełnij działania. W puste okienka wpisz odpowiednie liczby.

8	·	7	=		
	·	9	=	27	
6	·		=	48	

2 .Zadanie wykonane…	*Ilość przyznanych punktów*
Za każde poprawne obliczenie i zapisanie liczby w okienku	*0,5*
Brak wykonania zadania lub niepoprawne zapisanie wszystkich liczb w okienkach	*0*
Maksymalna ilość punktów do przyznania za poprawne wykonanie zadania	*1,5*

Zadanie 3

Nad misiem narysuj jabłko, a pod misiem narysuj piłkę.



4.Zadanie wykonane…	*Ilość przyznanych punktów*
Poprawne wykonanie zadania	*1*
Brak wykonania zadania	*0*
Niepoprawne wykonanie zadania	*0*

Zadanie 4

Zuzia włożyła do koszyka 12 jabłek, 3 gruszki i 5 śliwek. Ile owoców włożyła Zuzia do koszyka?

Obliczenia ……

Odpowiedź: ……

Zadanie wykonane…	Ilość przyznanych punktów
Przedstawienie poprawnego sposobu obliczenia łącznej ilości owoców, które Zuzia włożyła do koszyka oraz sformułowanie poprawnej odpowiedzi.	2
Przedstawienie poprawnego sposobu obliczenia łącznej ilości owoców, które Zuzia włożyła do koszyka oraz sformułowanie niepoprawnej odpowiedzi.	1
Przedstawienie niepoprawnego sposobu obliczenia łącznej ilości owoców, które Zuzia włożyła do koszyka oraz sformułowanie niepoprawnej odpowiedzi.	0
Brak wykonania zadania	0
Jeżeli uczeń udziela poprawnej odpowiedzi *bez uzasadnienia jej, czyli poprawnego sposobu obliczenia to otrzymuje 0 punktów.*	
Jeżeli uczeń popełnia jeden lub więcej błędów rachunkowych, ale stosuje poprawne sposoby obliczania, to ocenę rozwiązania *obniża się o 1 punkt.*	

Zadanie 5

Agnieszka przecięła rysunek na pół.



Na którym z poniższych obrazków pokazano obie części rysunku Agnieszki ?

Otocz je pętlą



b)



d)

c)

Zadanie wykonane…	Ilość przyznanych punktów
Poprawne wykonanie zadania	1
Brak wykonania zadania	0
Niepoprawne wykonanie zadania	0

Zadanie 6

Przyjrzyj się autom.



Odpowiedz na pytania podkreślając prawidłową odpowiedź:

Jakiego koloru auto jedzie pomiędzy autem zielonym i białym?

żółte *fioletowe*

Jakie auta jadą przed żółtym autem?

białe i zielone *zielone i fioletowe*

Ile aut jedzie za zielonym autem ?

6.Zadanie wykonane…	Ilość przyznanych punktów

Za każde podkreślenie poprawnej odpowiedzi 0,5 pkt	
Brak wykonania zadania lub niepoprawne zapisanie wszystkich liczb w okienkach	0
Maksymalna ilość punktów do przyznania za poprawne wykonanie zadania	1,5

5. Złącznik nr 6 - Karta oceny zadań ucznia klasy III

Do wykonania 7 zdań

Zadanie 1

Czterech uczniów wzięło udział w konkursie matematycznym. Wszyscy wykonali poprawnie działania.

Zosia: 31 + 62 *Michał:* 36 + 48

Marysia: 90 – 33 *Dominik:* 91- 38

Który z uczniów otrzymał w wyniku liczbę 53? Podkreśl prawidłową odpowiedź.

Zosia b) Marysia c) Michał d) Dominik

1.Zadanie wykonane…	Ilość przyznanych punktów
Poprawne podkreślenie prawidłowej odpowiedzi	3
Brak wykonania zadania	0
Niepoprawne wykonanie zadania	0

Zadanie 2

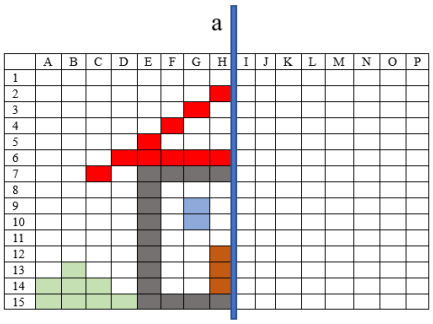
Agata kupiła trzy różne czekolady. Zapłaciła za nie 10 zł. Dała kasjerce 20 zł. Kasjerka wydała jej resztę monetami dwuzłotowymi. Ile monet otrzymała Agata? Podkreśl właściwą odpowiedź.

4 b) 10 c) 2 d) 5

2 .Zadanie wykonane…	Ilość przyznanych punktów
Poprawne podkreślenie prawidłowej odpowiedzi	3
Brak wykonania zadania	0
Niepoprawne wykonanie zadania	0

Zadanie 3

Ola narysowała połowę obrazka. Dorysuj drugą połowę figury symetrycznie względem osi a.

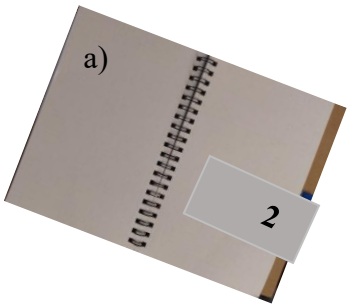


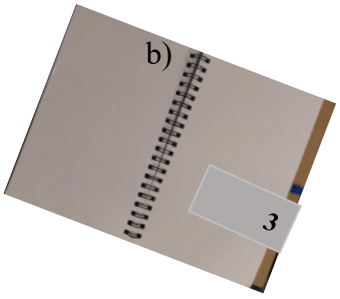
3.Zadanie wykonane…	Ilość przyznanych punktów
Poprawne wykonanie zadania	2
Ilość punktów obniża się o 1,5 jeżeli uczeń: - niepoprawnie dorysuje drugą połowę domu *lub* - popełni jeden lub więcej błędów w drugiej dorysowanej części domu	
Ilość punktów obniża się o 0,5 jeżeli uczeń: - niepoprawnie dorysuje elementy zielone obrazka l*ub* -popełni jeden lub więcej błędów w dorysowanych zielonych elementach obrazka	

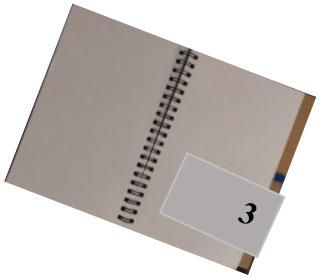
Zadanie 4

Michał waży 31kg, Paweł jest o 4 kg cięższy od Michała. Janek waży więcej niż Michał, ale mniej niż Paweł. Janek zapisał swoją wagę w notesie. Który to notes? Otocz go pętlą.

c)







4 .Zadanie wykonane…	Ilość przyznanych punktów
Poprawne wykonanie zadania	3

Brak wykonania zadania	0
Niepoprawne wykonanie zadania	0

Zadanie 5

Otocz pętlą termometr wskazujący najwyższą temperaturę.



5 .Zadanie wykonane…	Ilość przyznanych punktów
Poprawne wykonanie zadania	1
Brak wykonania zadania	0
Niepoprawne wykonanie zadania	0

Zadanie 6

Sześcioro dzieci trzyma się za ręce. Niektóre dzieci stoją przodem, a inne tyłem (patrz zdjęcie). Ile z tych dzieci trzyma inne dziecko swoją lewą ręką? Otocz pętlą właściwą odpowiedź.



a) b) c) d) e)

2 3 4 5 6

6.Zadanie wykonane…	Ilość przyznanych punktów
Poprawne wykonanie zadania	2
Brak wykonania zadania	0
Niepoprawne wykonanie zadania	0

Zadanie 7

Przyjrzyj się kartkom z kalendarza i odpowiedz na pytania.



7. Zadanie wykonane…	Ilość przyznanych punktów
Za podanie prawidłowej odpowiedzi do pytań : a) – przyznajemy 0,5 punktu c) – przyznajemy 0,5 punktu d) – przyznajemy 0,5 punktu	
Odpowiedzi do pytania b)	
- Za poprawne podanie dnia i miesiąca, w którym był najdłuższy dzień	0,5
- Za poprawną odpowiedź ile trwał najdłuższy dzień	1
Brak wykonania zadania	0
Maksymalna ilość punktów do przyznania za poprawne wykonanie całości zadania	3

Załącznik 7 - Arkusz obserwacji ucznia z kultury matematycznej w klasie I w Zespole Szkół Publicznych w Szewnie

Imię i nazwisko ucznia:…….

Klasa: I

Imię i nazwisko nauczyciela uczącego:…….

Temat zajęć:

Obszar	Osiągnięcia ucznia w danym zakresie tematycznym	Stopień opanowania		
		Bardzo dobry	Wystarczający	Niewystarczający
Język matematyczny	Pisze i czyta liczby do 20.			
	Zna i stosuje znaki działań			
	Wyjaśnia istotę działań matematycznych – dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia oraz związki między nimi; korzysta intuicyjnie z własności działań.			
	Zna i stosuje znaki: <, =, >.			
	Posługuje się pojęciami matematycznymi.			
	Potrafi formułować pytania matematyczne.			
	Rozumie polecenia matematyczne.			
	Uzasadnia i argumentuje otrzymane wyniki.			
	Liczy (w przód i wstecz) od podanej liczby po 1, po 2, po 10 itp.			
	Potrafi czytać fotografie, diagramy, wykresy.			
Wyobraźnia matematyczna	Posiada umiejętność wizualizacji i dostrzegania zależności.			
	Wykonuje rysunki, schematy, robi zdjęcia.			

	Wykonuje zdjęcia na temat „Matematyka w fotografii”.			
Elegancja matematyczna	Czytelnie, estetycznie wykonuje zapisy.			
	W sposób uporządkowany i logiczny prezentuje rozwiązania.			
	Potrafi zaproponować/wybrać rozwiązanie prostsze, lepsze.			
	Potrafi zadać interesujące pytanie świadczące o poszukiwaniu optymalnego rozwiązania.			
Twórczość matematyczna	Stosuje własne strategie rozwiązywania zadań			
	Robi fotografie przedstawiające dane zagadnienie w oryginalny sposób			
	Konstruuje gry, układa krzyżówki, rebusy.			
	Układa zadania i próbuje je rozwiązać.			

Zalecenia i sugestie do dalszej pracy

Data i podpis nauczyciela Podpis dyrektora

Złącznik nr 8 - Arkusz obserwacji ucznia z kultury matematycznej w klasie II w Zespole Szkół Publicznych w Szewnie

Imię i nazwisko ucznia: …….

Klasa: II

Imię i nazwisko nauczyciela uczącego:…….

Temat zajęć:

Obszar	**Osiągnięcia ucznia w danym zakresie tematycznym**	**Stopień opanowania**		
Język matematyczny	Pisze i czyta liczby w zakresie 100.			
	Zna i stosuje znaki działań matematycznych.			
	Wyjaśnia istotę działań matematycznych – dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia oraz związki między nimi; korzysta intuicyjnie z własności działań.			
	Zna i stosuje znaki: <, =, >.			
	Posługuje się pojęciami matematycznymi.			
	Potrafi formułować pytania matematyczne.			
	Rozumie polecenia matematyczne.			
	Uzasadnia i argumentuje otrzymane wyniki.			
	Liczy (w przód i wstecz) od podanej liczby po 1, po 2, po 10 itp.			
	Potrafi czytać fotografie, diagramy, wykresy.			

Wyobraźnia matematyczna	Posiada umiejętność wizualizacji i dostrzegania zależności.			
	Wykonuje rysunki, schematy, robi zdjęcia.			
	Wykonuje zdjęcia na temat „Matematyka w fotografii”.			
Elegancja matematyczna	Czytelnie, estetycznie wykonuje zapisy.			
	W sposób uporządkowany i logiczny prezentuje rozwiązanie.			
	Potrafi zaproponować/wybrać rozwiązanie prostsze, lepsze.			
	Potrafi zadać interesujące pytanie świadczące o poszukiwaniu optymalnego rozwiązania.			
Twórczość matematyczna	Stosuje własne strategie rozwiązywania problemu.			
	Robi fotografie przedstawiające dane zagadnienie w oryginalny sposób.			
	Konstruuje, gry, układa krzyżówki, rebusy, łamigłówki matematyczne, wykorzystuje w tym procesie własną aktywność artystyczną, techniczną, konstrukcyjną.			
	Układa zadania i próbuje je rozwiązać.			

Zalecenia i sugestie do dalszej pracy……..

Data i podpis nauczyciela Podpis dyrektora

Złącznik nr 9 - Arkusz obserwacji ucznia z kultury matematycznej w klasie III w Zespole Szkół Publicznych w Szewnie

Imię i nazwisko ucznia:…… …….

Klasa: III

Imię i nazwisko nauczyciela uczącego:…….

Obszar	Osiągnięcia ucznia w danym zakresie tematycznym	Stopień opanowania		
		Bardzo dobry	Wystarczający	Niewystarczający
Język matematyczny	Pisze i czyta liczby do 1000.			
	Zna i stosuje znaki działań.			
	Wyjaśnia istotę działań matematycznych – dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia oraz związki między nimi; korzysta intuicyjnie z własności działań.			
	Zna i stosuje znaki: <, =, >.			
	Posługuje się pojęciami matematycznymi.			
	Potrafi formułować pytania matematyczne.			
	Rozumie polecenia matematyczne.			
	Uzasadnia i argumentuje otrzymane wyniki.			
	Liczy (w przód i wstecz) od podanej liczby po 1, po 2, po 10 itp.			

	Potrafi czytać fotografie, diagramy, wykresy.			
Wyobraźnia matematyczna	Posiada umiejętność wizualizacji i dostrzegania zależności.			
	Wykonuje rysunki, schematy, robi zdjęcia.			
	Wykonuje zdjęcia na temat „Matematyka w fotografii”.			
Elegancja matematyczna	Czytelnie, estetycznie wykonuje zapisy.			
	W sposób uporządkowany i logiczny prezentuje rozwiązania.			
	Potrafi zaproponować/wybrać rozwiązanie prostsze, lepsze.			
	Potrafi zadać interesujące pytanie świadczące o poszukiwaniu optymalnego rozwiązania.			
Twórczość matematyczna	Stosuje własne strategie rozwiązywania zadań.			
	Robi fotografie przedstawiające dane zagadnienie w oryginalny sposób.			
	Konstruuje gry, układa krzyżówki, rebusy, gry, łamigłówki matematyczne, wykorzystuje w tym procesie własną aktywność artystyczną, techniczną, konstrukcyjną.			
	Układa zadania i próbuje je rozwiązać.			

Zalecenia i sugestie do dalszej pracy:

Data i podpis nauczyciela Podpis dyrektora

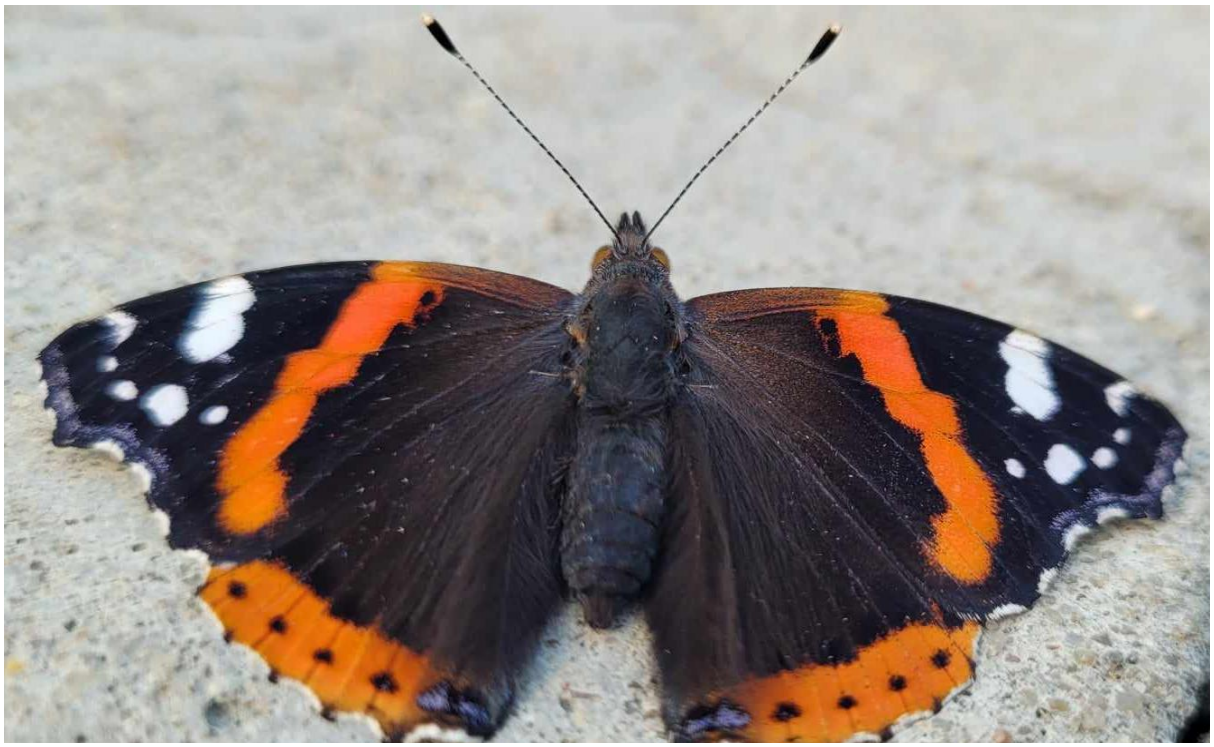
Załącznik nr 10

Fotoedukacja jako czynnik kształtujący wybrane elementy kultury matematycznej

W tym załączniku zaprezentowane zostaną prace fotograficzne w wykonaniu uczniów klas 1–3. W prezentowanym projekcie fotograficznym wzięło udział 120 uczniów z klas 1–3, Szkoły Podstawowej w Szewnie, którzy wykonali łącznie aż 160 fotografii. Przed przystąpieniem do realizacji zadania nauczyciel przeprowadził z uczniami krótką rozmowę wprowadzającą, podczas której zwrócił uwagę dzieciom na to, że matematyka „nie mieszka" wyłącznie w podręcznikach, ale otacza nas z każdej strony. Pedagog poprosił młodych fotografów, aby w swoim domowym i szkolnym środowisku poszukali geometrii, symetrii oraz powtarzających się wzorów, czyli rytmów. Dzieci zostały uwrażliwione na dostrzeganie kształtów w architekturze, naturalnych formach przyrody oraz przedmiotach codziennego użytku, a także na rejestrowanie sytuacji, w których stykamy się bezpośrednio z liczbami i miarami.

Ważnym elementem metodologicznym projektu było wymaganie, aby uczniowie fotografowali dany obiekt w sposób oryginalny oraz wieloaspektowy, zwracając uwagę na to, czy struktura kadru zawiera w sobie tylko jeden prosty element, czy też bardziej złożone układy. Po wykonaniu zdjęć zadaniem każdego ucznia było podpisanie swojej pracy przy użyciu języka matematycznego. Nadany tytuł musiał poprawnie reprezentować konkretne pojęcie matematyczne i składać się z przymiotnika oraz rzeczownika odzwierciedlającego dane zagadnienie. Tak skonstruowane zadanie pozwoliło nie tylko na rozwijanie spostrzegawczości, ale również na celowe zintegrowanie percepcji wizualnej z poprawnym aparatem pojęciowym młodych badaczy.

Poniżej znajdują się fotografie wykonane przez uczniów wraz z moimi komentarzami.



Fotografia 26
Julia „Latająca symetria”

Autorka nadała fotografii tytuł „Latająca symetria”, wykazując przy tym swoją inwencję twórczą. Na zdjęciu uwypuklone zostały osie symetrii motyla. Oprócz symetrii, na skrzydłach można zauważyć inne figury geometryczne: koła, odcinki, łuki. Fotografię tę można wykorzystać do doskonalenia umiejętności rozpoznawania i nazywania figur geometrycznych oraz symetrii, ale również liczenia elementów, wykonywania działań, rozpoznawania kształtów figur czy mierzenia odcinków, a tym samym kształtowania elementów kultury matematycznej w zakresie: sprawności matematycznej, języka matematycznego, elegancji matematycznej, wyobraźni i twórczości matematycznej w łatwy i atrakcyjny sposób.



Fotografia 27

Kacper „Zakręcone koła”

Zdjęcie przedstawia podstawkę pod talerz. Ma ona kształt koła. Gdy przyjrzymy się podstawce bardziej wnikliwie, zobaczymy wiele mniejszych kół i okręgów, które zmniejszają się, ku środkowi. Gdy podstawkę wytniemy z fotografii i złożymy na pół, to obie części są identyczne - czyli symetryczne.

Tę fotografię można wykorzystać jako materiał do nauczania-uczenia się symetrii, porównywania, kół i okręgów, zaznaczania, średnic, cięciw, porównywania wielkości kół i okręgów, zaznaczania osi symetrii. Skonstruowana przez dzieci wiedza kształtuje kulturę matematyczną w zakresie: sprawności matematycznej, języka matematycznego, elegancji matematycznej, wyobraźni oraz twórczości matematycznej.



Fotografia 28

Adrian „Ośmielony ośmiościan”

Zdjęcie przedstawia niebieską, kostkę do gry. Jest ona kształtem zbliżona do ośmiościanu foremnego. Na ścianach możemy zobaczyć liczby: 7, 4, 6 oraz linie krzywe. Ściany kostki są zbliżone do trójkątów. Po poprawieniu przez uczniów ścian tak, aby były trójkątami równobocznymi - fotografia będzie atrakcyjną pomocą do np.: mierzenia długości krawędzi ośmiościanu, opisu ośmiościanu i trójkąta równobocznego, wskazywania kątów oraz wykonywania działań pamięciowych.

Zastosowanie tej fotografii pozwoli na rozwijanie i doskonalenie sprawności matematycznej, posługiwanie się językiem matematycznym, pobudzanie wyobraźni, elegancji matematycznej oraz wspieranie twórczości w dziedzinie matematyki – czyli wszystkich kanonów kultury matematycznej.



Fotografia 29

Bartosz „W koło jest wesoło”

Fotografia „W koło jest wesoło” przedstawia tarczę strzelniczą do gry. Wewnątrz niej widoczne jest czerwone koło, a wokół niego okręgi. Tarcza podzielona jest na kolorowe czworokąty: czerwone, niebieskie i żółte. Boki czworokątów tworzą odcinki. Na zielonym tle widoczne są zapisane za pomocą cyfr liczby od 1 do 20. Kolorowe pola ułożone wewnątrz tarczy tworzą czworokąty. Na fotografii można odnaleźć też kąty i fraktale. Zdjęcie pozwoli uczniom na prosty i przyjemny sposób poznawania koła i okręgu oraz pojęć z nimi związanych. Jest także doskonałym narzędziem do wykonywania czterech działań na liczbach naturalnych, porównywania liczb, mierzenia odcinków.

Jest bardzo wiele możliwości wykorzystania tej fotografii - wystarczy tylko pomysłowość nauczyciela. Dzięki niej rozwijamy kulturę matematyczną poprzez: doskonalenie sprawności matematycznej i elegancji, kształtowanie biegłości w posługiwaniu się językiem matematycznym, stymulowanie wyobraźni, oraz wspieranie twórczości w obszarze matematyki.



Fotografia 30

Pola „Podniebna geometria”

Fotografia wykonana przez Polę, uwidacznia zwieńczenie stalowej, ażurowej bramy kościoła. Można odnaleźć na niej wiele figur geometrycznych, np.: kulę, prostokąty, kwadraty, trapezy, kąty, odcinki, odcinki równoległe, prostopadłe.

Zdjęcie to daje wiele możliwości do twórczego konstruowania i doskonalenia wiedzy z zakresu: kwadratów i prostokątów, odcinków, odcinków równoległych i prostopadłych, mierzenia odcinków, porównywania odcinków, figur, orientacji przestrzennej.

Poprzez zastosowanie tej fotografii doskonalimy kulturę matematyczną w zakresie: sprawności matematycznej, posługiwania się językiem matematycznym, rozwijania wyobraźni i elegancji matematycznej oraz twórczości matematycznej.



Fotografia 31
Magdalena „Pracowity okrąg”

Zdjęcie przedstawia piękną serwetkę wpisaną w okrąg. Jej wzór tworzą okręgi, łuki i linie krzywe.

Fotografia, ta jest doskonałą pomocą dydaktyczną, dzięki której dzieci mogą odnajdować symetrię, łuki. Wykonywać działania na liczbach. Konstruować wiedzę na temat własności okręgu oraz doskonalić kulturę matematyczną odnośnie: sprawności matematycznej, języka matematycznego, wyobraźni, twórczości matematycznej i elegancji matematycznej.



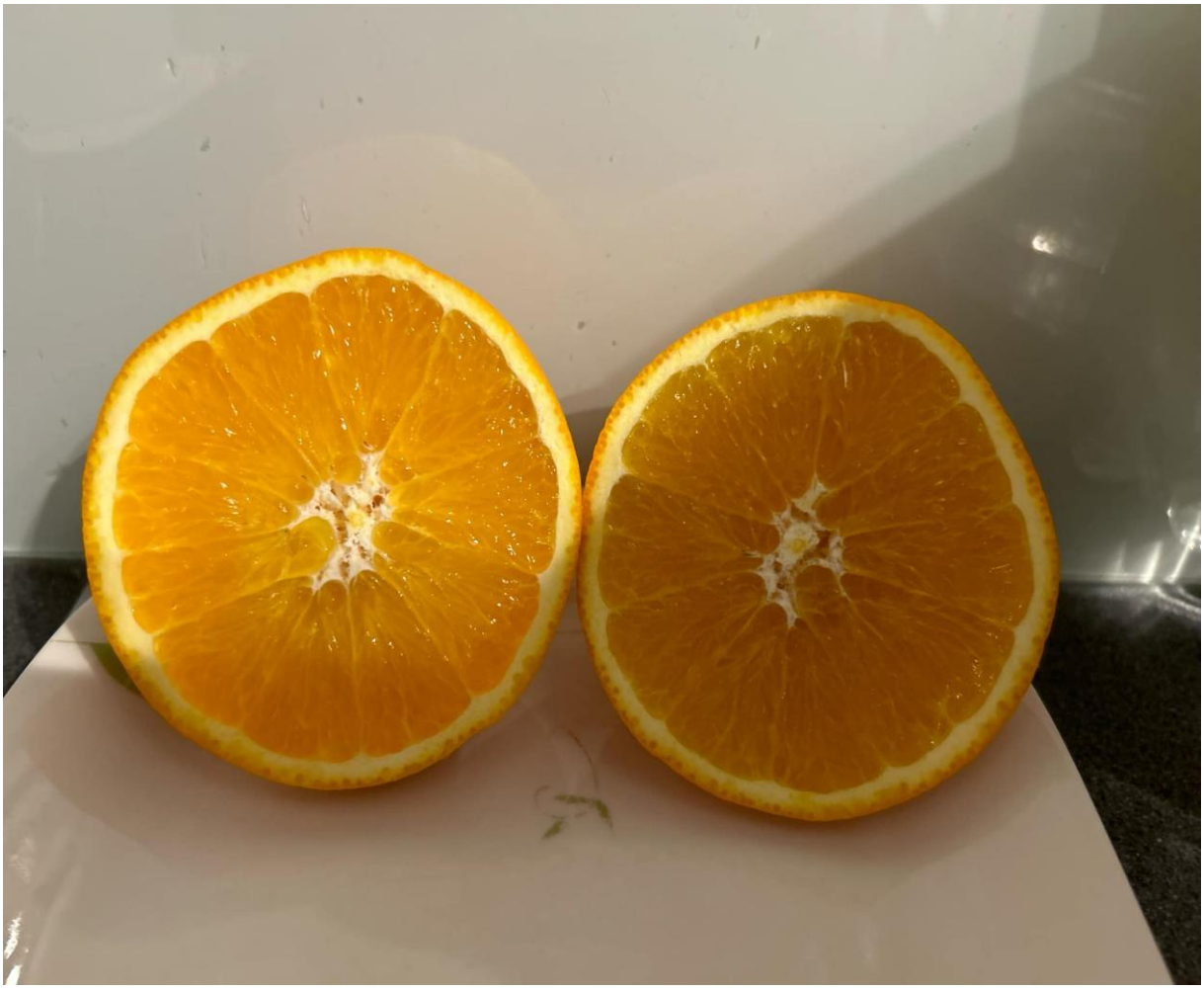
Fotografia 32

Barbara „ Różnobarwne prostokąty”

Zdjęcie ilustruje ścianę murowaną zbudowaną z cegieł. Układają się one w rzędy i kolumny. Mają różne kolory. Są one prostokątami z kątami prostymi, wierzchołkami i ramionami. Możemy wskazać na nich odcinki równoległe i prostopadłe. Z białych fug możemy wyodrębnić oprócz prostokątów, łamane, odcinki, odcinki prostopadłe i równoległe, kąty i wielokąty. Na ścianie znajduje się też okno, które ma kształt prostokąta, podobnie jak cegły.

Jest wiele możliwości wykorzystania tej fotografii w procesie nauczania-uczenia się np.: liczenia, dodawania liczb, określania kierunków, szacowania, opisu prostokątów, mierzenia długości odcinków, porównywania.

Fotografia ta, jak również inne wykorzystane na lekcji, rozwija kulturę matematyczną zarówno w zakresie kształtowania sprawności matematycznej, jak również języka matematycznego, wyobraźni, twórczości i elegancji matematycznej.



Fotografia 33

Benjamin „Pomarańcza kołem się toczy”

Ta fotografia pomarańczy może posłużyć do skonstruowania interesującej, twórczej lekcji. Jest ona przecięta na dwie części. Obie są identyczne. Każda połowa będzie lustrzanym odbiciem drugiej. W środku pomarańczy znajdują się małe, okrągłe ziarnka. Wytrawny obserwator dostrzeże kształt zbliżony do koła, okręgi oraz promienie.

Fotografia ta może być pomocą w odnajdywaniu symetrii, mierzeniu długości odcinków. Wzbogaca też kulturę matematyczną uczniów w zakresie sprawności matematycznej, języka, wyobraźni, twórczości oraz elegancji matematycznej.



Fotografia 34

Franciszek „Koła na bogato”

Na fotografii widoczny jest napis FOTOMATMA ułożony z monet różnej wielkości. Każda z nich to koło. Po głębszej analizie dzieci odnajdą w literach np.: odcinki, łamane otwarte, kąty, zbiory.

Ta fotografia, jak i poprzednie- jest materiałem wspomagającym proces uczenia się, np.: liczenia, wykonywania działań na liczbach, tworzenia zbiorów, mierzenia kątów i odcinków. Tym samym służy rozwijaniu koniecznych i wspomagających elementów kultury matematycznej.



Fotografia 35

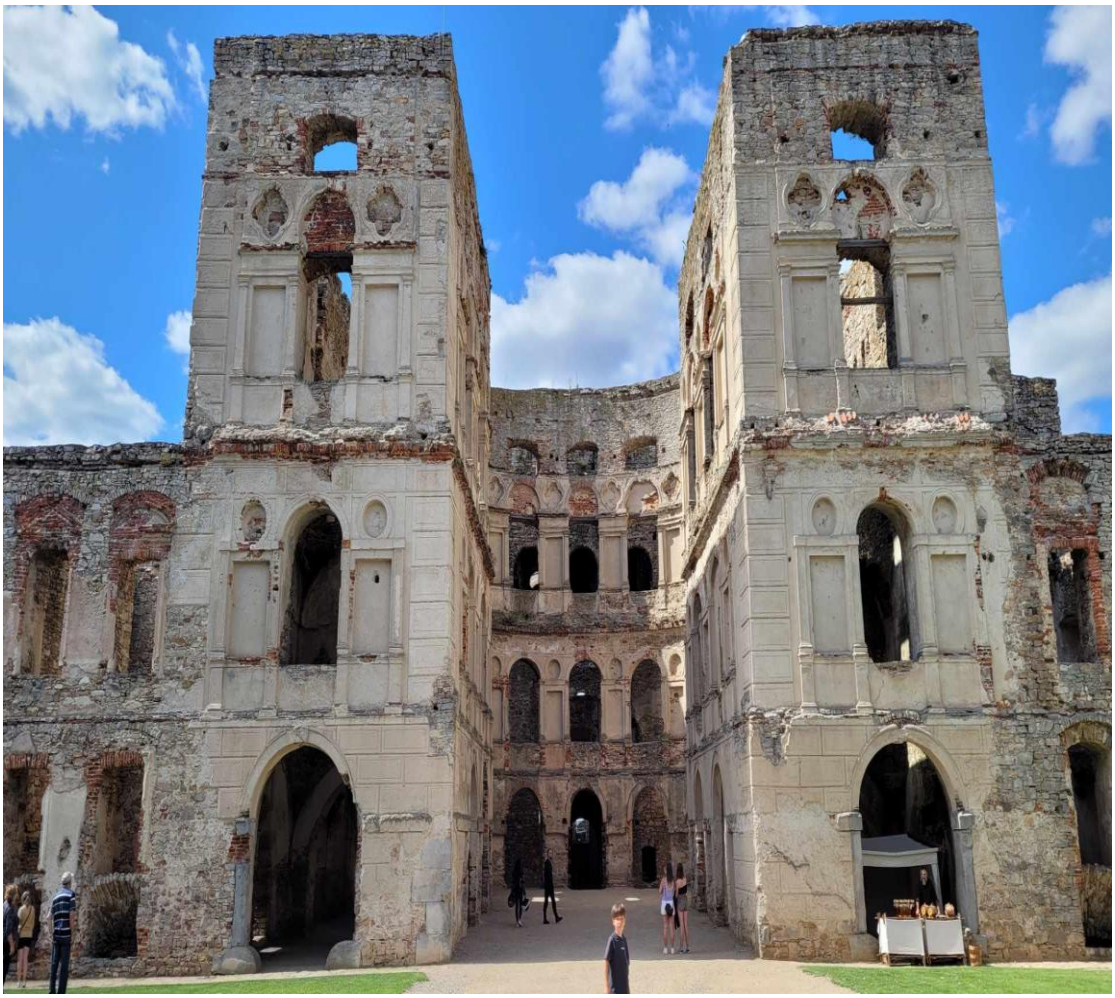
Wojciech „Symetria na niebiesko”

Most sfotografowany przez Wojtka jest wiszący, długi i wąski, w kolorze niebiesko-szarym. Jest on podtrzymywany przez długie liny łączące się w jednym miejscu- na szczycie. Każda lina ma swoją długość. Po obu stronach mostu umieszczone są niebieskie barierki, które wyglądają jak płot, który ogradza dom.

Na moście można odnaleźć wiele figur geometrycznych, np.: trójkąty, prostokąty, kwadraty, odcinki, proste prostopadłe i równoległe, kąty, prostokąty.

Informacje, które odczytujemy z fotografii, możemy użyć do np.: konstruowania lub powtórzenia wiadomości o figurach płaskich, liczenia, dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia liczb naturalnych, określania położenia, mierzenia kątów, mierzenia odcinków, poszukiwania prostych prostopadłych i równoległych.

Praca z tym zdjęciem wpłynie na rozwój kultury matematycznej w zakresie sprawności i języka matematycznego, wyobraźni, twórczości i elegancji matematycznej.



Fotografia 36

Franciszek „Symetria ruin”

Fotografia Franciszka przedstawia, ruiny zamku. Widać na niej drzwi i okna, w których można wyznaczyć osie symetrii. Zamek ma też dwie wieże, które są symetrycznie ułożone względem siebie i zawierają w sobie , też elementy symetryczne oraz figury płaskie. Na zdjęciu ukryte są też: prostokąty, koła, łuki, łamane zamknięte.

Fotografia ta może być narzędziem do wprowadzania i doskonalenia wiadomości o figurach geometrycznych i symetrii, liczenia i wykonywania działań na liczbach, porównywania zbiorów. Wiadomości i umiejętności konstruowane przez dzieci, dzięki użyciu tej fotografii, wpływają dodatnio na kształtowanie i doskonalenie sprawności matematycznej, języka matematycznego, rozwijanie wyobraźni i twórczości matematycznej oraz zauważanie elegancji w matematyce.



Fotografia 37

Wojciech „Tajemniczy trapez”

Oglądając zdjęcie studni, pokazujemy, jak wygląda trapez, ponieważ jego dach ma ten kształt. Podstawą studni jest szary walec. Za studnią znajdują się słupki ogrodzeniowe w kształcie prostokątów.

Fotografia „Tajemniczy trapez” daje nauczycielom możliwość skomponowania wielu rozwiązań motywujących uczniów do pracy, dzięki którym dzieci z pełnym zaangażowaniem poznają trapez, walec, własności prostokątów oraz prostych prostopadłych i równoległych. Będą mogły też doskonalić liczenie oraz wykonywanie działań na liczbach, jak również dokonywać obliczeń obwodów.

Fotografia ta jest drogą, która w twórczy sposób rozwija sprawność i język matematyczny, pobudza wyobraźnię, kształtuje matematyczną twórczość i elegancję.



Fotografia 38

Julia „Strefa kolorowych prostokątów”

Patrząc na fotografię Julii, zauważamy piękne kolorowe pola. Mają one kształt prostokątów o różnych wymiarach. Boki ich są do siebie równoległe parami oraz prostopadłe, co obrazuje ich własności.

Fotografia jest źródłem do doskonalenia: liczenia, porównywania i analizowania kształtów, wprowadzenia pojęć np.: wielokąt, prostokąt, obliczania obwodów, konstruowania wiedzy na temat: prostych prostopadłych i równoległych, kształtowania orientacji przestrzennej: bliżej , dalej, przed, za, obok.

Wykorzystując to zdjęcie, kształtujemy kulturę matematyczną uczniów w zakresie rozwijania sprawności i języka matematycznego, pobudzania wyobraźni oraz kształtowania matematycznej kreatywności i elegancji.



Fotografia 39
Nel „Symetria plam żaby rogatej”

Fotografia żaby rogatej – na pierwszy rzut oka, pokazuje także oś symetrii. Dzieci, będąc dobrymi i kreatywnymi odbiorcami, stwierdziły, że jeśli poprowadzimy linię prostą przez środek tułowia żaby rogatej, plamy nałożą się na siebie i prosta będzie osią symetrii. Na zdjęciu żaby można dostrzec jeszcze np. koła w oczach, owale w ciele. Zdjęcie łączy w sobie piękno natury z matematycznymi wzorami.

Fotografia kształtuje również elementy kultury matematycznej w zakresie: sprawności matematycznej, języka matematycznego, wyobraźni, twórczości matematycznej i elegancji matematycznej.



Fotografia 40
Julia „Symetria w zamku w Lublinie”

Autorka fotografii „ Symetria w zamku w Lublinie” uchwyciła piękno zamku, zwracając szczególną uwagę na symetrię. Zdobienia górnej części fasady zamku to przecinające się łuki. W centralnej części widoczne są koła i okręgi. Gdy się bacznie przyjrzymy zobaczymy ponadto: kąty, odcinki, odcinki prostopadłe i równoległe, prostokąty, kule.

Zdjęcie może być w kreatywny sposób do mierzenia kątów i odcinków. Doskonalenia wiedzy na temat figur geometrycznych: koła, okręgu, kwadratu i ich własności. Może posłużyć również do liczenia elementów i wykonywania czterech działań na liczbach oraz układania zadań z treścią.

Fotografia Juli „Symetria w zamku w Lublinie” doskonali u dzieci sprawność matematyczną, język, wyobraźnię, twórczość i elegancję matematyczną.



Fotografia 41

Mateusz „Symetria w liściu”

Uczeń w liściu uchwycił symetrię, którą jest żyłka przebiegająca przez środek liścia, od której odchodzą symetrycznie odgałęzienia. Dwie strony liścia są identyczne pod względem kształtu i struktury. Gdy dokładnie wpatrzymy się w fotografię, można ujrzeć również odcinki, odcinki równoległe, kąty.

Dzięki pracy z tą fotografią uczniowie mogą poznać własności czworokątów, symetrię, mierzyć odcinki, wskazywać odcinki równoległe i prostopadłe oraz wykonywać działania na liczbach naturalnych.

W rezultacie kształtują kulturę matematyczną w zakresie sprawności matematycznej, języka matematycznego, wyobraźni, twórczości i piękna matematyki.



Fotografia 42

Wojciech „Owalny most”

Dzięki aparatowi fotograficznemu możemy uchwycić niezwykłe sytuacje matematyczne. Fotografia Wojtka jest tego przykładem. Zarejestrował on odbicie mostu w tafli wody. Na zdjęciu zauważamy również np.: łuki, prostokąty, odcinki, odcinki prostopadłe i równoległe.

Ta fotografia może posłużyć nie tylko do wskazywania i analizy własności prostokątów i symetrii ale wskazywania odcinków równoległych i prostopadłych ale i mierzenia odcinków i wykonywania działań arytmetycznych.

Poprzez te działania rozwijamy u uczniów sprawność matematyczną, język, wyobraźnię, twórczość matematyczną i elegancję.



Fotografia 43

Piotr „Wiszące prostokąty”

Prostokąt to czworokąt, który ma wszystkie wewnętrzne kąty proste oraz dwie pary boków równoległych i równych. Ta i poniższa fotografia, mogą posłużyć do wskazania nie tylko prostokątów, ale również określenia ich liczby, a także zaznaczenia prostych równoległych, prostopadłych, dłuższych i krótszych boków, a także kątów prostych. Zauważyć możemy również symetrię.

Dzięki tej fotografii uczeń rozwija wyobraźnię, kreatywność oraz uczy się obserwować i analizować to, co widzi. Konstruuje lub doskonali wiadomości dotyczące: pojęcie prostokąta, prostej, symetrii. Można też ćwiczyć liczenie, porównywanie i mierzenie.

Wykorzystanie tego zdjęcia oddziałuje na rozwój kultury matematycznej ucznia, obejmującej sprawność matematyczną, język matematyczny, zdolności wyobrażeniowe, twórczość i piękno w matematyce.



Fotografia 8

Alicja „ Czworokątna harmonia okien”

Na zdjęciu tym widać: prostokąty, odcinki prostopadłe i równoległe , symetrię. Może ono być inspiracją dla uczniów do poprowadzenia zajęć dotyczących porównywania figur geometrycznych, liczenia, wykonywania działań, konstruowania wiedzy na temat odcinków równoległych i prostopadłych. Może posłużyć też do mierzenia odcinków.

Wykorzystanie fotografii Alicji na lekcji sprzyja rozwojowi kultury matematycznej, obejmującej sprawność matematyczną, język matematyczny, wyobraźnię i twórczość matematyczną i estetykę.



Fotografia 9

Mia „Dzień dobry kwadracie, prostokątów bracie”

Zdjęcie uczennicy jest bardzo interesującym materiałem do obserwacji matematycznej. Możemy na nim zobaczyć wiele figur geometrycznych. Są to prostokąty i kwadraty o różnych wymiarach, odcinki, walec, okręgi, prostopadłościan, trójkąt.

Dzięki tej fotografii uczniowie konstruują lub doskonalą wiadomości dotyczące: pojęcia prostokąta, kwadratu, prostej i symetrii. Mogą też ćwiczyć liczenie i porównywanie liczb. Mierzyć odcinki, wskazywać odcinki prostopadłe i równoległe.

Zatem fotografia Mii , oddziałuje na rozwijanie aspektów kultury matematycznej, takich jak: sprawność matematyczną, język, wyobraźnię, twórczość i elegancję matematyczną.



Fotografia 46

Maja „Owocowy trójkąt”

Uczennica fotografię nazwała „Owocowy trójkąt”. Widać na niej prostokąty, kule, trójkąty, odcinki, kąty. Fotografia ta pozwala na rozwijanie wyobraźni, utrwalenie pojęć i kształtów prostokąta, koła i trójkąta, ćwiczenie liczenia, porównywania i mierzenia.

Można ją wykorzystać do liczenia elementów, wykonywania działań, rozpoznawania kształtów figur czy odnajdowania odcinków i mierzenia ich- czyli kształtowania elementów kultury matematycznej w zakresie sprawności matematycznej, języka matematycznego, wyobraźni, twórczości i elegancji matematycznej.



Fotografia 47

Weronika „Koło czasu”

Analizując fotografię Weroniki, dzieci muszą zastanowić się, czy są na niej koła, czy okręgi, a może i koła i okręgi? Jest na niej również wiele innych kształtów, które dzieci już wcześniej poznały, np.: koło, odcinki, liczby, znaki rzymskie, prostokąty.

Sposób wykorzystania fotografii do konstruowania wiedzy matematycznej zależy od inwencji twórczej nauczyciela. Może być ona inspirującą i angażującą metodą, dzięki której dzieci doskonalić będą wiedzę z zakresu własności prostokątów, kół i okręgów. Poznają znaki rzymskie. Modą też mierzyć odcinki, jak również liczyć i wykonywać działania na liczbach.

Dzięki tej fotografii kształtujemy zarówno niezbędne, jak i wspomagające elementy kultury matematycznej ucznia.



Fotografia 48

Lilianna „Odlotowa kula”

Fotografia uczennicy „Odlotowa kula”, która jest piłką do grania, może być pretekstem do wprowadzenia pojęcia kuli, symetrii, jak również kształtowania elementów kultury matematycznej w zakresie języka matematycznego, wyobraźni, twórczości matematycznej i elegancji.



Fotografia 49

Mateusz „Wysoko, wyżej, najwyżej prostokącie”

Fotografia Mateusza obrazuje zdjęcia trzech samochodów powieszonych na prostokątnej ścianie na różnych wysokościach. Samochody oprawione są w ramki.

Zdjęcie może być interesującą pomocą, dzięki której zaangażujemy dzieci do konstruowania i doskonalenia wiedzy na temat własności prostokątów, kształtowania orientacji przestrzennej. Można ją też zastosować do mierzenia długości odcinków, liczenia i wykonywania czterech działań na liczbach naturalnych, doskonalenia umiejętności z zakresu odcinków prostopadłych i równoległych.

Wykorzystanie tej fotografii wzbogaca kulturę matematyczną dzieci w zakresie sprawności matematycznej, języka, wyobraźni przestrzennej, twórczości oraz zauważania piękna matematyki.



Fotografia 50

Zofia „ Zaczarowane koła wokół nas”

Zdjęcie tego pięknego, rzadko spotykanego już budzika jest aktywizującym narzędziem do pracy na lekcjach edukacji matematycznej.

Tarcza zegara jest dużym kołem z umieszczonymi od 1 do 12 liczbami. Wewnątrz tego dużego koła umieszczone są trzy mniejsze, z różną konfiguracją liczb. Wskazówki głównej tarczy są odcinkami. Zwieńczeniem zegara są dwa półkola z małymi kulkami, połączone łukiem. Obok zegara leżą okulary. W tle znajduje się okno, którego ramy mają kształt prostokątów. Na fotografii z można odszukać punkty, odcinki, ujrzeć symetrię, odcinki prostopadłe i równoległe, liczy od 12 do 24 oraz pełne dziesiątki od 0 do 60.

Fotografię tę możemy wykorzystać do konstruowania wiedzy o liczbach parzystych i nieparzystych, obliczeń zegarowych, wykonywania czterech działań na liczbach, porównywania liczb, omawiania własności koła, doskonalenia własności prostokątów oraz prostych prostopadłych i równoległych i mierzenia odcinków.

Fotografia, posłuży nam do kształtowania kultury matematycznej w obszarze sprawności matematycznej i języka, wyobraźni matematycznej, twórczości i elegancji matematycznej.



Fotografia 51

Jan „Krajobrazowa oś liczbowa”

Jaś na swojej fotografii uchwycił piękno krajobrazu i odnalazł oś liczbową. Gdy wpatrzymy się w obraz oprócz osi liczbowej, dostrzec możemy m.in. prostokąty, proste prostopadłe i równoległe.

Zdjęcie to można wykorzystać do wprowadzenia pojęcia osi liczbowej, prostych prostopadłych i równoległych, opisu prostokąta, mierzenia odcinków.

Zastosowanie tego zdjęcia przyczynia się do doskonalenia posługiwania się językiem matematycznym, rozwijania wyobraźni matematycznej, doskonalenia sprawności matematycznej. Inspiruje również dzieci do twórczości i postrzegania piękna matematyki.



Fotografia 10

Gerard „Historyczne walce”

Na zdjęciu widzimy historyczne kolumny, które mają różną wysokość i są w kształcie walca. Stoją one na postumentach. Na pierwszym planie, patrząc od strony prawej, kolumny ułożone są od największej do najmniejszej. Za nimi widoczne są prostopadłościenne schody, murek i mniejsze kolumny.

Zastosowanie tej fotografii w edukacji matematycznej wspomaga uczniów w liczeniu, porównaniu, mierzeniu, kształtowaniu wiedzy dotyczącej prostych prostopadłych i równoległych.

Wpływa też na kształtowanie sprawności matematycznej, języka matematycznego, wyobraźni, twórczości oraz elegancji matematycznej.



Fotografia 53

Dominik „Matematyka w naturze”

Dominik swojej fotografii nadał tytuł „Matematyka w naturze”, który jest adekwatny do jej zawartości. W ogrodzie na pierwszy plan wysuwa się drzewo z licznymi gałęziami tworzącymi kąty, wielokąty rzymskie, znaki. Na drugim planie jest dom z widocznymi oknami.

Dzięki temu zdjęciu możemy uczyć dzieci określania kierunku, odszukiwania prostych równoległych, mierzenia odcinków i porównywania ich, znajdowania kątów oraz przeliczania elementów.

Skutkiem zastosowania tego zdjęcia jest kształtowanie kultury matematycznej dzieci w zakresie sprawności matematycznej, posługiwania się językiem matematycznym, wyobraźni, twórczości i postrzegania piękna matematyki.



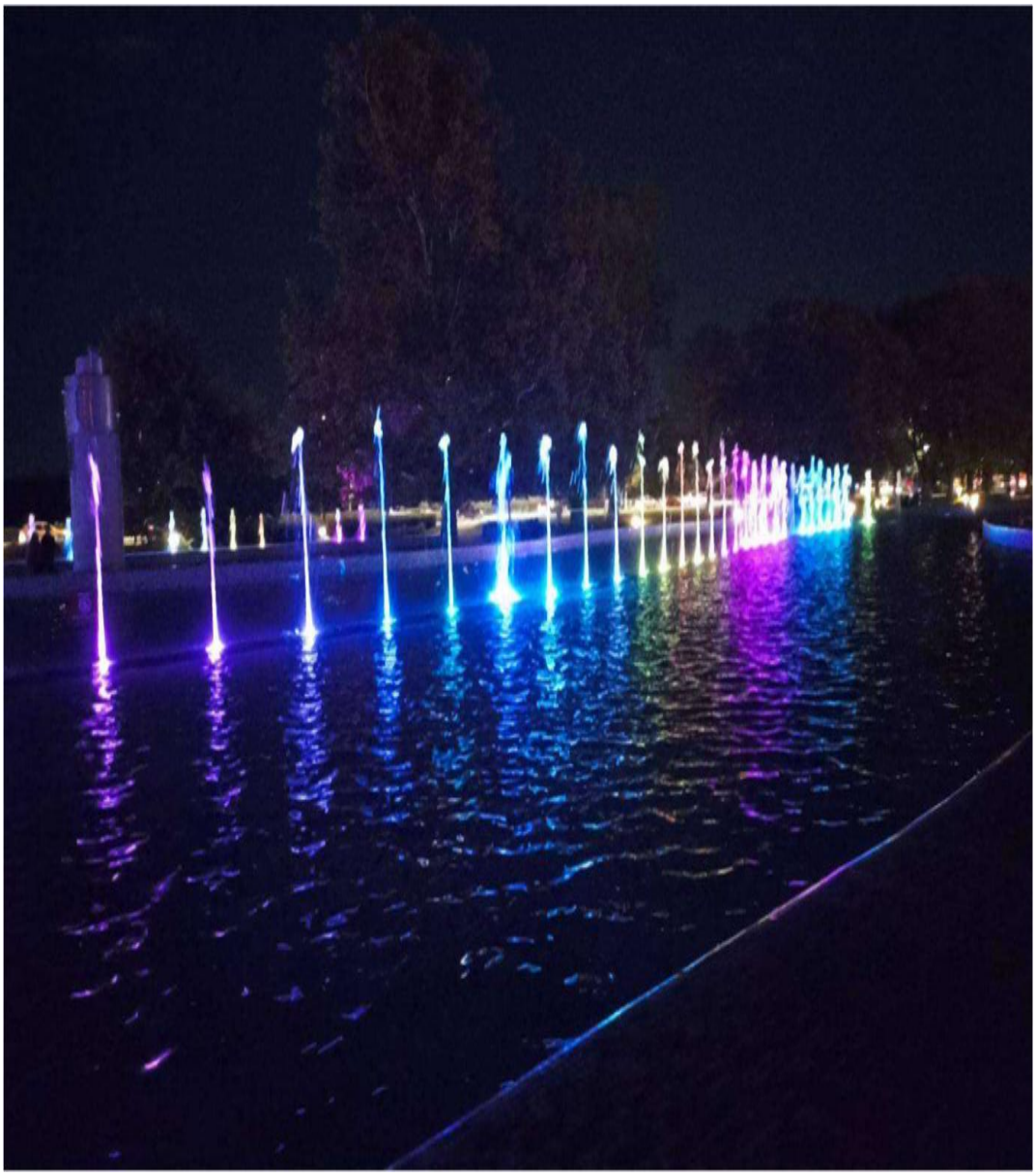
Fotografia 11

Amelia „Podróżujące kwadraty”

Fotografia Amelii uwidacznia torbę podróżną. Na pierwszy rzut oka, na widocznej części ściany, która ma kształt prostokąta, zauważamy różnokolorowe kwadraty, które są dominującymi figurami. Torba posiada dwa uchwyty. Pierwszy, tuż przy brzegu walizki jest łukiem, natomiast drugi to trzy połączone walce.

Zdjęcie to jest kreatywnym sposobem na doskonalenie przez dzieci techniki liczenia, porównywania, segregowania oraz wprowadzenie własności kwadratu.

Przeprowadzenie zajęć z wykorzystaniem fotografii „Podróżujące kwadraty” wpływa na kształtowanie kultury matematycznej uczniów oraz czyni je ciekawymi, pozwalającymi dzieciom na konstruowanie wiedzy w miły, inspirujący i kreatywny sposób.



Fotografia 12

Tymon „ Kolorowa nieskończoność”

Na zdjęciu Tymona, możemy podziwiać piękne kolorowe fontanny nocą, których strumienie układają się pionowo do tafli wody i przypominają odcinki. Usytuowane są one w jednakowych odstępach i odbijają się w wodzie, tworząc rytm.

Fotografią „Kolorowa nieskończoność” możemy się posłużyć do konstruowania wiedzy na temat symetrii, mierzenia odcinków, odkrywania rytmów przez dzieci, wykonywania czterech działań na liczbach, wprowadzania pojęcia liczb parzystych i nieparzystych.

Wykorzystanie opisanej fotografii daje nam możliwość kształcenia kultury matematycznej w zakresie sprawności matematycznej, języka matematycznego, wyobraźni, twórczości i elegancji matematycznej.

Wykorzystanie opisanej fotografii daje nam możliwość kształcenia kultury matematycznej w zakresie sprawności matematycznej, języka matematycznego, wyobraźni, twórczości i elegancji matematycznej.

Załącznik nr 11

Arkusze scenariuszy zajęć z edukacji matematycznej w klasach 1-3

1.Scenariusz zajęć z edukacji matematycznej w klasie 1 z wykorzystaniem fotografii[32]



Klasa 1

Temat zajęć: Odkrywamy tajemnicę prostokątów wokół nas.

Czas trwania zajęć: 45 min.

Metody: obserwacja, praktyczne działanie, opis fotografii językiem matematycznym, mapa myśli, projekt.

Formy pracy: indywidualna, grupowa, zbiorowa.

Środki dydaktyczne: fotografia, patyki, sznurek, kamyki, żołędzie, ekran multimedialny, kolorowe pisanki, kartki do drukarki, papier kolorowy, telefon komórkowy.

Cele ogólne zajęć:

[32] Wykorzystane zdjęcie pochodzi z galerii prac wysłanych na XV Międzynarodowy Konkurs „Matematyka w obiektywie".

- Kształtowanie rozumienia definicji prostokąta i jego własności.
- Rozpoznawanie prostokąta na fotografiach i w najbliższym otoczeniu.
- Skonstruowanie przez uczniów modelu robota i zrobienie zdjęcia.
- Rozwijanie zainteresowania fotografią.
- Rozwijanie kultury matematycznej w zakresie: sprawności matematycznej, języka, wyobraźni, elegancji matematycznej i twórczości.
- Doskonalenie płynności i oryginalności myślenia.

Cele szczegółowe (operacyjne) zajęć:

Uczeń:

- wymieni, ile boków ma prostokąt
- opisze, jakie katy ma prostokąt
- wskaże co najmniej 4 prostokąty na fotografii
- wskaże kąty w prostokącie
- wskażę boki równoległe w prostokącie
- wskaże boki prostopadłe w prostokącie
- wskażę co najmniej 5 prostokątów w otaczającej rzeczywistości
- wykona i sfotografuję robota zbudowanego z prostokątów

Kryterium sukcesu ucznia

Lp.	Nazwa kryterium	Stopień opanowania kryterium
1.	Wiem, ile boków ma prostokąt	
2.	Potrafię powiedzieć, jakie katy ma prostokąt	
3.	Wskazuję co najmniej 4 prostokąty na fotografii	
4.	Wskazuję kąty w prostokącie	
5.	Wskazuję boki równoległe w prostokącie	
6.	Wskazuję boki prostopadłe w prostokącie	
7.	Wskażę co najmniej 5 prostokątów w otaczającej rzeczywistości	
8.	Wykonam i sfotografuję robota zbudowanego z prostokątów	

Realizacja każdego kryterium monitorowana jest różnymi metodami. Można zastosować emotikony np. żab. Uczniowie przyklejają przygotowane przez nauczyciela, rodziców lub dzieci emotikonę obrazującą ich poziom wiedzy.



Niski poziom opanowania wiedzy (dziecko nie rozumie tematu, czuje się zagubione i ma wiele pytań bez odpowiedzi)



Umiarkowany poziom wiedzy (uczeń wie trochę, ale są jeszcze zagadnienia, na które nie zna odpowiedzi.)



Wysoki poziom wiedzy skonstruowany przez dziecko (wie wszystko**)**

Przebieg zajęć:

Aktywność nr 1: Czynności organizacyjne, podanie tematu zajęć, celu oraz kryteriów sukcesu, nawiązanie do tematu zajęć. Zadanie:1 – praca indywidualna i w parach. Rozwiązanie zagadki. Nauczyciel prosi dzieci, żeby zamknęły oczy i wyobraziły sobie wielokąt, który ma cztery boki i cztery kąty wewnętrzne proste. Uczniowie odtwarzają w myślach dany kształt, co pozwala na uruchomienie procesu interioryzacji pojęcia prostokąta. Następnie w parach opowiadają o wyobrażonej figurze i nazywają ją.

Monitoring: wypowiedzi uczniów dotyczące nazwy wyobrażonego wielokąta.

Nauczyciel informuje dzieci, że na dzisiejszej lekcji poznają tajemnicę prostokątów.

Aktywność nr 2: Działania praktyczne z fotografią: Każde dziecko otrzymuje taką samą fotografię.

Zadanie: 1– praca grupowa.

Opisz fotografię językiem matematycznym, a następnie podziel się swoimi spostrzeżeniami z kolegą z ławki.

Monitoring: Nauczyciel prosi o opis fotografii przez kilka par lub tworzy wspólną mapę myśli.

Zadanie: 2 – praca samodzielna.

Zaznacz kolorem zielonym wielokąty, które mają 4 boki i 4 kąty proste, czerwonym kolorem inne wielokąty.

Monitoring: pokazanie przez wybranych uczniów i zaznaczenie wielokątów na zdjęciu przedstawionym na ekranie multimedialnym.

Aktywność nr 3: Mierzenie długości boków prostokątów - praca grupowa.

Zadanie: 1

Zmierz długości wszystkich boków co najmniej 4 prostokątów. Wyniki wpisz do tabelki

Długości boków prostokąta	**Długości boków prostokąta**	**Długości boków prostokąta**	**Długości boków prostokąta**	**Długości boków prostokąta**	**Długości boków prostokąta**	**Długości boków prostokąta**
1 boku						
2 boku						
3 boku						
4 boku						

Na podstawie obserwacji uczniowie odkrywają własności prostokąta.

Aktywność nr 4*:* Zabawa w detektywa. Każdy uczeń odnajduje prostokąty na fotografii i zaznacza je – praca indywidualna.

Zadanie:1

Odnajdź, policz i zaznacz, ile małych prostokątów ukryło się w fotografii?

Odkryj, największą liczbę prostokątów na zdjęciu?

Monitoring: Pytanie skierowane do uczniów**.** Wybór uczniów, którzy udzielą odpowiedzi na zadane pytania.

Aktywność nr 5: Działania praktyczne - praca grupowa.

Zadanie:1

Zabawa w „Poszukiwaczy prostokątów" – praca w grupie 4-osobowej.

Każda grupa w szkole szuka prostokątów i zapisuje na kartce nazwy przedmiotów.

Monitoring: stworzenie mapy myśli z przedmiotami znalezionymi w szkole i mającymi kształt prostokąta.

Zadanie:2 – praca w parach

Skonstruuj wspólnie z kolegą z ławki z prostokątów robota, który pomaga w nauce matematyki. Wykorzystaj posiadane materiały.

Monitoring: obserwacja nauczyciela, robienie fotografii robotów, klasowa wystawa fotografii.

10. Ewaluacja zajęć.

Jakie emocje towarzyszyły Ci w trakcie zajęć z wykorzystaniem fotografii?

(Nauczyciel przykleja na tablicy emotikony, natomiast uczniowie pod nią zaznaczają swoje emocje).

- ***Zachwyt i zainteresowanie*** [33]



- ***Nudę***[34]



- ***Strach i lęk*** [35]



[33]Źródło pobrania emotikona https://pl.freepik.com/darmowe-zdjecie-wektory/emotikon, dostęp: 01.08.2025r.
[34] Źródło pobrania emotikona https://www.pngegg.com/pl/png-vyiif, dostęp: 01.08.2025r.
[35] Źródło pobrania emotikona, https://www.istockphoto.com/pl/ilustracje/emotki-strachu, dostęp: 01.08.2025r.

2.Scenariusz lekcji z edukacji matematycznej z wykorzystaniem fotografii[36] w klasie 1



Klasa 1

Temat zajęć: Doskonalenie dodawania i odejmowania liczb w zakresie 20.

Czas trwania zajęć: 45 min.

Metody: obserwacja, praktycznego działania, projektu.

Formy pracy: indywidualna, grupowa, zbiorowa.

Środki dydaktyczne: fotografia, ekran multimedialny, rzutki, kostka do gry.

Cele ogólne zajęć:

- Doskonalenie techniki czytania liczb oraz dodawania i odejmowania w zakresie 20.
- Rozwijanie zainteresowania fotografią.
- Rozwijanie kultury matematycznej w zakresie: sprawności matematycznej – dodawania i odejmowania liczb w zakresie 20, języka matematycznego, wyobraźni, elegancji matematycznej i twórczości.
- Doskonalenie kreatywności i rozwiązywania problemów.
- Optymalizowanie pracy w grupach, samooceny i oceny koleżeńskiej.

[36] Wykorzystane zdjęcie pochodzi z galerii prac wysłanych na XV Międzynarodowy Konkurs „Matematyka w obiektywie".

Cele szczegółowe (operacyjne) zajęć:

Uczeń:

- prawidłowo odczyta liczby w zakresie 20
- doda liczby w zakresie 20
- odejmie liczby w zakresie 20
- rozwiąże proste zadania tekstowe

Kryteria sukcesu ucznia:

L.p	Kryteria sukcesu	Poziom opanowania kryterium
1.	Prawidłowo czytam liczby w zakresie 20	
2.	Dodaję prawidłowo liczby w zakresie 20	
3.	Odejmuję poprawnie liczby w zakresie 20	
4.	Rozwiązuję proste zadania tekstowe	

Przebieg zajęć:

Aktywność nr 1: Czynności organizacyjne, podanie tematu zajęć , celów, kryteriów sukcesu oraz nawiązanie do tematu zajęć.

Aktywność nr 2: Działania praktyczne z fotografią**:** Obserwacja fotografii w parach pod kątem wykorzystania do wykonywania działań na liczbach naturalnych: Każde dziecko otrzymuje fotografię.

Zadanie:1- liczenie elementów zbiorów**.**

Opisz fotografię językiem matematycznym. Praca zbiorowa. Burza mózgów. Proszę podać, jakie zbiory widoczne są na fotografii. Policz liczbę elementów każdego zbioru.

Monitoring: przedstawienie pracy grup przez liderów.

Zadanie: 2 - czytanie liczb.

Przeczytaj wszystkie liczby znajdujące się na tarczy. Praca w parach.

Monitoring: ocena koleżeńska. Prawidłowe przeczytanie wszystkich liczb oznacza sukces.

Aktywność nr 3: Dodawanie liczb w zakresie 20

Zadanie: 1 – gra w parach. Każda para ma zdjęcie oraz kostkę sześcienną. Grę rozpoczyna uczeń, który pierwszy wyrzuci 6 oczek. Wybiera on wtedy liczbę na tarczy i prosi kolegę o dodanie do niej takiej liczby, aby suma ich wynosiła 20. Za prawidłową

odpowiedź jest 1 punkt. Dzieci wykonują 5 działań. Wygrywa ten uczeń, który ma większą ilość punktów.

Monitoring: ocena koleżeńska.

Zadanie: Odejmowanie liczb w zakresie 20. Praca indywidualna.

Nauczyciel na ekranie multimedialnym pokazuje zadania, a uczniowie na indywidualnych tabliczkach zapisują różnicę.

1. Jaka jest różnica między największą a najmniejszą liczbą na tarczy?
2. Jaką liczbę należy odjąć od 16, aby otrzymać 7?
3. Ile wynosi różnica liczb 17 i 2?
4. Od jakiej liczby należy odjąć 5, aby otrzymać 13?

Monitoring: ocena nauczyciela.

Zadanie:5

Napisz zadanie do wybranego jednego przez siebie działania:

a) 3+ 9
b) 20 - 7
c) 19 -5 -4
d) 20 -13 + 2

Monitoring: odczytanie zadań i rozwiązań przez wybranych uczniów.

Ewaluacja zajęć z wykorzystaniem niedokończonych zdań.

Dokończ podane niżej zdania(ustnie)

- Na dzisiejszej lekcji podobało mi się……..
- Na dzisiejszej lekcji nauczyłam/em się……..

3.Scenariusz zajęć z edukacji matematycznej w klasie 2 z wykorzystaniem fotografii[37]



Klasa 2

Temat zajęć: Rozpoznajemy i rysujemy koła

Czas trwania zajęć: 45 min.

Metody: obserwacja, praktycznego działania, opis fotografii językiem matematycznym, projekt.

Formy pracy: indywidualna, grupowa, zbiorowa.

Środki dydaktyczne: fotografia, patyki, sznurek lub nitka, wykałaczki lub gwóźdź, ekran multimedialny, kolorowe pisanki, kredki.

Cele ogólne zajęć:

[37] Wykorzystane zdjęcie pochodzi z galerii prac wysłanych na XV Międzynarodowy Konkurs „Matematyka w obiektywie".

- Kształtowanie rozumienia definicji koła oraz jego własności.
- Rozwijanie zainteresowania fotografią.

- Rozwijanie kultury matematycznej w zakresie: sprawności matematycznej, języka, wyobraźni, elegancji matematycznej oraz twórczości.
- Kształtowanie umiejętności rozwiązywania problemów.
- Doskonalenie dodawania liczb.

Cele szczegółowe (operacyjne)

Uczeń:

- wskaże co najmniej trzy koła,
- obliczy obwody co najmniej 3 kół
- wskaże promień,
- wskaże średnicę kół oraz okręgów

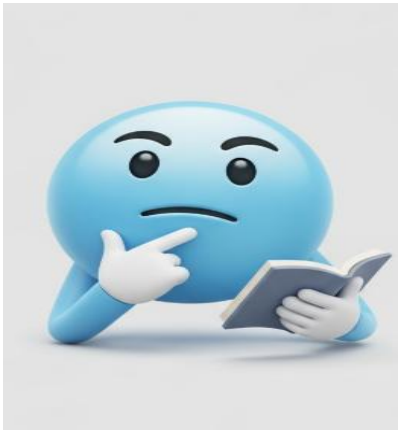
Kryteria sukcesu ucznia:

L.p.	Kryterium sukcesu	Stopień realizacji
1.	Wskazuję co najmniej 3 koła	
2.	Obliczam obwody co najmniej 3 kół.	
3.	Wskazuję 3 promienie koła	
4.	Wskazuję 3 średnice koła	

Uczniowie zaznaczają za pomocą emotikona stopień realizacji celu.



Wiem wszystko



Muszę jeszcze popracować

Aktywność nr 1: Czynności organizacyjne, podanie tematu zajęć, celu oraz kryteriów sukcesu, nawiązanie do tematu zajęć.

Aktywność nr 2: Działania praktyczne z fotografią: Każde dziecko otrzymuje taką samą fotografię .

Zadanie:1

Wskaż i policz wszystkie koła na fotografii.

Monitoring: uczniowie wymieniają się spostrzeżeniami w parach. Następnie na fotografii widocznej na monitorze interaktywnym , wyznaczony uczeń prezentuje wyniki obserwacji

Zadanie:2

Każde koło na fotografii zamaluj innym kolorem. Praca samodzielna. Czy liczba kół jest liczbą parzystą? Odpowiedz uzasadnij.

Monitoring: ocena koleżeńska.

Zadanie:3

Wskaż na fotografii średnicę i promień koła. Średnicę zaznacz kolorem zielonym, a promień czerwonym. Praca samodzielna.

Monitoring: Pokazanie przez 3 uczniów średnicy i promienia na ekranie interaktywnym. Następnie samoocena uczniów.

Zadanie:4

Uszereguj koła w kolejności od najmniejszego do największego. Najmniejszemu przypisz liczbę 1.

Monitoring:

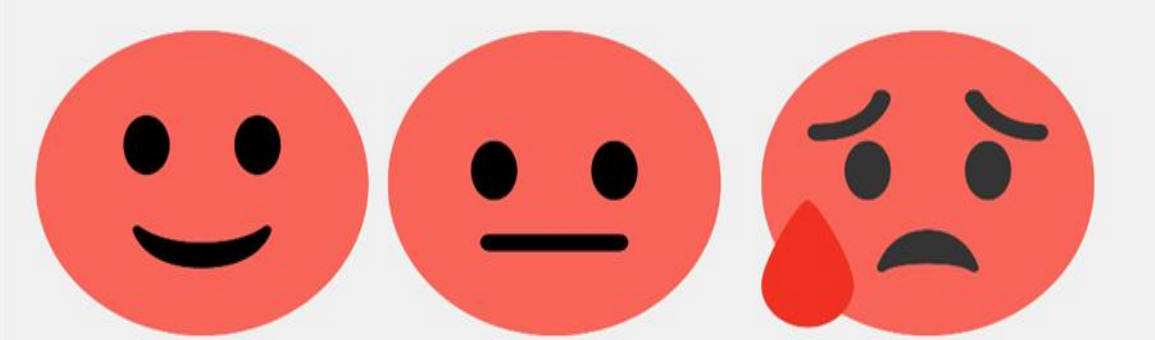
Pokaz kół i ich segregacja przez wybrane dzieci na monitorze interaktywnym, następnie samoocena dzieci.

Zadanie: 3

Za pomocą tasiemki zmierz obwody 2 kół .

Monitoring: ocena koleżeńska

Ewaluacja: Czy podobała Ci się lekcja z wykorzystaniem fotografii?



Tak **Nie wiem** **Nie**

Dokończ zdanie:

Na zajęciach z wykorzystaniem fotografii dowiedziałem się……..

4.Scenariusz lekcji z edukacji matematycznej z wykorzystaniem fotografii[38] w klasie 2



Klasa: 2

Temat: Poznajemy proste równoległe i prostopadłe.

Czas trwania: 45 min

Pomoce: fotografia dla każdego ucznia, ekran multimedialny, kredki, patyki lub słomki do picia.

Metody: pokaz, czytanie fotografii, rozwiązanie problemu.

Formy pracy: indywidualna, grupowa, zbiorowa.

Cele ogólne:

- Zapoznanie uczniów z definicją prostych prostopadłych i prostych równoległych.
- Kształtowanie umiejętności rysowania prostych równoległych i prostopadłych.
- Kształtowanie u uczniów zainteresowania fotografią.
- Rozwijanie kultury matematycznej w zakresie: sprawności matematycznej, języka, wyobraźni, elegancji matematycznej i twórczości.
- Doskonalenie kreatywności i rozwiązywania problemów.

Cele szczegółowe (operacyjne):

[38] Wykorzystane zdjęcie pochodzi z galerii prac wysłanych na XV Międzynarodowy Konkurs „Matematyka w obiektywie".

- na podanej fotografii wskaże proste równoległe, proste prostopadłe
- w najbliższym otoczeniu wskaże proste równoległe i proste prostopadłe

Kryteria sukcesu ucznia:

Lp.	Nazwa kryterium	Stopień opanowania kryterium
9.	Potrafię wskazać proste równoległe	
10.	Wskazuję proste prostopadłe	
11.	Umiem w swoim otoczeniu wskazać proste równoległe i proste prostopadłe	

Zadania realizujące kryteria sukcesu:

Aktywność nr 1: Czynności organizacyjne, podanie tematu zajęć , celu oraz kryteriów sukcesu, nawiązanie do tematu zajęć.

Aktywność nr 2: Działania praktyczne z fotografią: Każde dziecko otrzymuje taką samą fotografię .

Zadanie:1

Wskaż na zdjęciu 4 pary prostych, które leżą w równej odległości od siebie. Czy ta odległość w każdym miejscu jest taka sama? Każdą parę tych prostych zaznacz na zdjęciu innym wybranym kolorem - praca samodzielna.

Monitorowanie: wskazanie na monitorze wybranych przez nauczyciela uczniów, par prostych , które leżą w równej odległości od siebie.

Zadanie:2

Ułóż patyczki lub kredki w taki sposób, aby odległość między nimi w każdym punkcie była taka sama. Do odmierzania odległości użyj linijki. Sprawdzanie poprawności wykonania zadania przez kolegę.

Poprzez działanie i rozwiązanie problemu - dzieci same konstruują wiedzę na temat prostych równoległych.

Zadanie:3

W klasie wskaż 4 przykłady prostych równoległych.

Monitorowanie: ocena eksperta.

Zadanie:4

Weź do ręki ekierkę i pokaż kąt prosty. Następnie wskaż i zaznacz na zdjęciu 4 pary prostych prostopadłych.

Monitorowanie: ocena koleżeńska.

Zadanie:5

Ułóż patyczki lub kredki w taki sposób, aby powstały proste prostopadłe. Użyj ekierki do sprawdzenia kątów prostych.

Dzieci na podstawie podanych zadań konstruują wiedzę na temat prostych prosto-padłych.

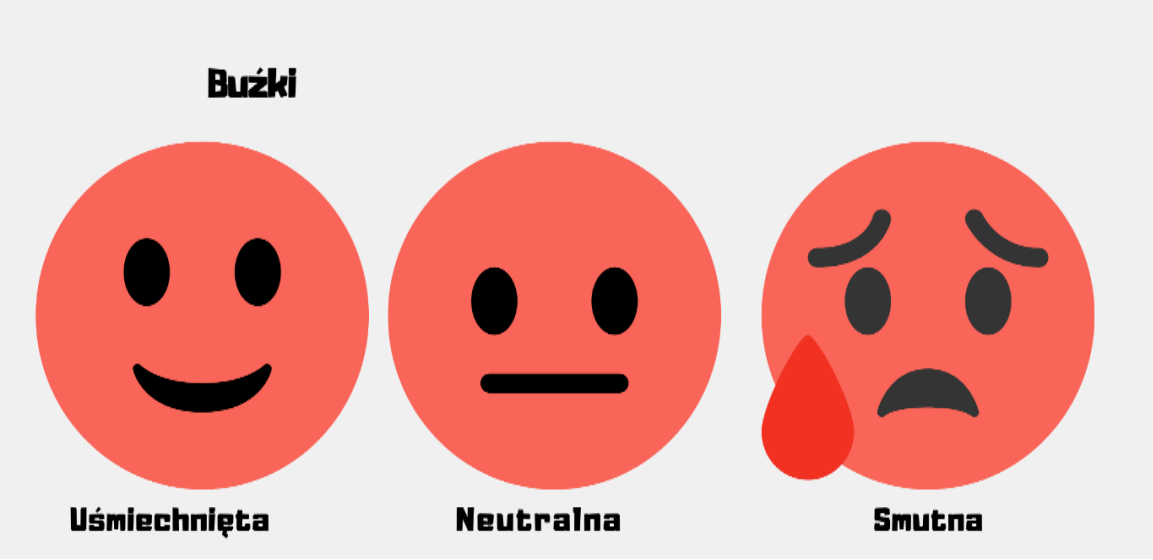
Monitorowanie: wyświetlenie na ekranie prac wzorcowych.

Zadanie: 6 - praca grupowa.

Zbuduj szkołę swoich marzeń, stosując tylko odcinki równoległe i prostopadłe.

Monitorowanie: wystawa prac, zrobienie fotografii.

Ewaluacja zajęć z zastosowaniem buziek .



Zaznacz, jak czułaś/eś się na zajęciach z zastosowaniem fotografii ?

Buzia uśmiechnięta oznacza, że zajęcia były ciekawe, uczeń osiągnął cel lekcji, czuł radość i zainteresowanie.

Neutralna: uczeń nie mam zdania na temat zajęć, nie wie czy osiągnął cel lekcji, czuł znudzenie

Smutna: zajęcia były nudne, uczeń nie osiągnął celu lekcji, czuł lęk i strach

5.Scenariusz zajęć z edukacji matematycznej w klasie 3 z wykorzystaniem fotografii[39]



1. Klasa 3.
2. Temat zajęć: Powtórzenie wiadomości o figurach geometrycznych.
3. Czas trwania zajęć: 2 godziny lekcyjne.
4. Metody : obserwacja, praktycznego działania, projektu, analizy prac, dyskusji.
5. Formy pracy: indywidualna, grupowa, zbiorowa.
6. Środki dydaktyczne: fotografia, patyki, sznurek, kamyki, żołędzie, ekran multimedialny, kolorowe pisanki, kartki do drukarki, papier kolorowy.
7. Cele ogólne zajęć:

- Utrwalenie wiadomości o figurach geometrycznych.
- Budzenie zainteresowania fotografią.
- Rozwijanie kultury matematycznej w zakresie: sprawności matematycznej, języka, wyobraźni, elegancji matematycznej i twórczości.
- Doskonalenie kreatywności i rozwiązywania problemów.
- Optymalizowanie pracy w grupach, samooceny i oceny koleżeńskiej.

8. Kryteria sukcesu: (dla każdej grupy)

[39] Wykorzystane zdjęcie pochodzi z galerii prac wysłanych na XV Międzynarodowy Konkurs „Matematyka w obiektywie".

l.p.	NACOBEZU	Ocena
1.	Potrafię wskazać koło na fotografii	
	Znajduję klocek o kształcie koła	
	Odrysowuję okrąg i zamalowuję	
	Rysuję koło przy pomocy posiadanych materiałów	
2.	Potrafię wskazać kwadrat. (nie wie ile	
	Znajduję klocek o kształcie kwadratu	
	Układam kwadrat z patyków	
	Rysuję kwadrat przy pomocy linijki	
3.	Potrafię wskazać 4 wielokąty i zaznaczyć je kolorową kredką	
	Ułóż z patyczków jeden wielokąt	
	Rysuję wielokąt używając linijki	
4.	Wskazuję zdjęciu 4 kąty proste i zaznaczam ich zieloną kredką	
	Wskazuję 4 kąty ostre i zaznaczam ich czerwoną kredką	
	Układam z patyczków kąt prosty	
	Układam z patyczków kąt ostry.	
	Narysuje kąt prosty za pomocą linijki.	
	Narysuję kąt ostry za pomocą linijki	
5.	Wyszukam na zdjęciu 10 odcinków i zaznaczę ich kolorową kredką.	
	Ułożę z patyczków odcinek.	
	Narysuję odcinek za pomocą linijki.	
6.	Wyszukam na zdjęciu 4 linie krzywe i zaznaczcie je kolorową kredką	
	Ulepię z plasteliny linię krzywą.	
	Narysuję linię krzywą	
7.	Wyszukam na zdjęciu 3 linie łamane i zaznacz je kolorową kredką.	

	Ułożę z patyczków linię łamaną.	
	Narysuję linię łamaną za pomocą linijki	
8.	Wyszukam na zdjęciu odcinki równoległe i zaznacz je kolorową kredką.	
	Ułożę z patyczków odcinki równoległe.	
	Narysuj odcinki równoległe za pomocą linijki.	
9.	Wyszukam na zdjęciu dwie pary odcinków prostopadłych i zaznacz je kolorową kredką.	
	Ułożę z patyczków odcinki prostopadłe.	
	Narysuję odcinki prostopadłe za pomocą linijki.	

10. Przebieg zajęć:

Aktywność nr 1: Czynności organizacyjne, podanie tematu zajęć , celu oraz kryteriów sukcesu, nawiązanie do tematu zajęć .

Aktywność nr 2: Działania praktyczne z fotografią: Każde dziecko otrzymuje taką samą fotografię.

Aktywność nr 3: Działania praktyczne z fotografią: Praca grupowa z fotografią. Uczniowie podzieleni są na grupy i pracują na tej samej fotografii. Losują zadania. Pracują nad ich wykonaniem 20 minut.

Zestaw zadań dla poszczególnych grup:

I grupa

Popatrzcie uważnie na zdjęcie.

1. Wyszukajcie na niej koło i zaznaczcie go kolorową kredką.
2. Wyszukaj wśród klocków – klocek okrągły i połóż go obok zdjęcia.
3. Odrysuj okrągły klocek i pokoloruj go.

II grupa

Popatrzcie uważnie na zdjęcie.

1. Wyszukajcie na zdjęciu kwadraty i zaznaczcie je kolorową kredką.
2. Wyszukajcie wśród klocków – klocek kwadratowy i połóżcie go obok zdjęcia.
3. Ułóżcie z patyczków kwadrat.
4. Narysujcie kwadrat używając linijki.

III grupa

Popatrzcie uważnie na zdjęcie.

1. Wyszukajcie na zdjęciu 4 wielokąty i zaznaczcie je kolorową kredką.
2. Ułóżcie z patyczków wielokąt.
3. Narysujcie wielokąt używając linijki.

IV grupa

Popatrzcie uważnie na zdjęcie.

1. Wyszukajcie na zdjęciu 4 kąty proste i zaznaczcie ich zieloną kredką.
2. Wyszukajcie na zdjęciu 4 kąty ostre i zaznaczcie ich czerwoną kredką.
3. Ułóżcie z patyczków kąt prosty i kąt ostry.
4. Narysujcie kąt prosty i kąt ostry za pomocą linijki.

V grupa

Popatrzcie uważnie na zdjęcie.

1. Wyszukajcie na zdjęciu 10 odcinków i zaznaczcie ich kolorową kredką.
2. Ułóżcie z patyczków odcinek.
3. Narysujcie odcinek za pomocą linijki.

VI grupa

1. Wyszukajcie na zdjęciu 4 linie krzywe i zaznaczcie je kolorową kredką.
2. Ulepcie z plasteliny linię krzywą.
3. Narysujcie linię krzywą.

VII grupa

Popatrzcie uważnie na zdjęcie.

1. Wyszukajcie na zdjęciu 3 linie łamane i zaznaczcie je kolorową kredką.
2. Ułóżcie z patyczków linię łamaną.
3. Narysujcie linię łamaną za pomocą linijki.

VIII grupa

Popatrzcie uważnie na zdjęcie.

1. Wyszukajcie na zdjęciu odcinki równoległe i zaznaczcie je kolorową kredką.
2. Ułóżcie z patyczków odcinki równoległe.
3. Narysujcie odcinki równoległe za pomocą linijki.

IX. grupa

1. Wyszukajcie na zdjęciu dwie pary odcinków prostopadłych i zaznaczcie je kolorową kredką.
2. Ułóżcie z patyczków odcinki prostopadłe.
3. Narysujcie odcinki prostopadłe za pomocą linijki.

Monitorowanie pracy grup: prezentacja i ocena koleżeńska rozwiązania problemu przez poszczególne grupy.

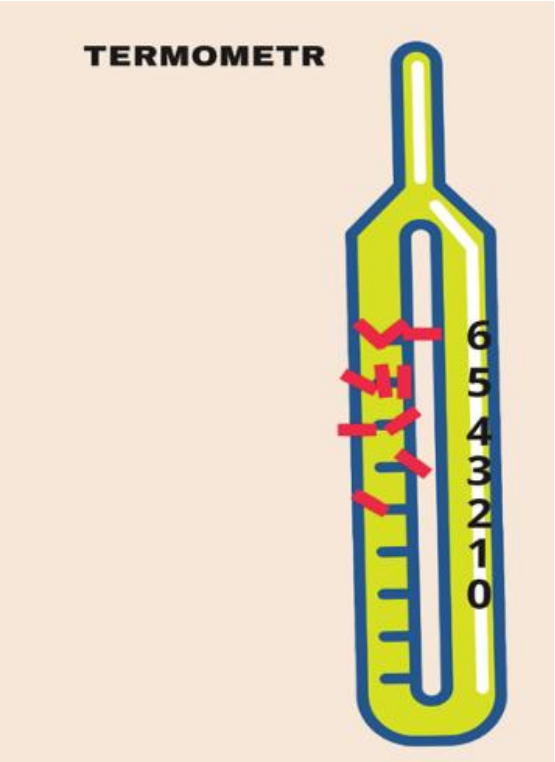
Aktywność nr 2: Prezentacja efektów pracy każdej z grupy przez liderów.

Grupy pokazują wyszukane przez siebie figury geometryczne na zdjęciu wyświetlonym na tablicy multimedialnej oraz prezentują ułożone i narysowane przez siebie figury geometryczne.

Monitoring: ocena koleżeńska

10. Ewaluacja i refleksja zajęć: za pomocą termometru i niedokończonych zdań (praca indywidualna).

Zaznacz na termometrze Twój stopień zaangażowania na lekcji (im wyższy , tym wyższa liczba).



Dokończ zdanie

Na dzisiejszych zajęciach z fotografią nauczyłam/em się:

……..

6.Scenariusz zajęć z edukacji matematycznej w klasie 3 z wykorzystaniem fotografii[40]



Klasa 3.

Temat zajęć: Mierzenie odcinków.

Czas trwania zajęć: 45 minut.

Metody : obserwacja, praktycznego działania, dyskusja.

Formy pracy: indywidualna, grupowa, zbiorowa.

Środki dydaktyczne: fotografia, patyki, plastelina, ekran multimedialny, kolorowe pisanki, kredki, linijki, magiczna tabela, aparat.

Cele ogólne zajęć:

[40] Wykorzystane zdjęcie pochodzi z galerii prac wysłanych na XV Międzynarodowy Konkurs „Matematyka w obiektywie".

- Doskonalenie techniki mierzenia odcinków.
- Rozwijanie zainteresowania fotografią.
- Rozwijanie kultury matematycznej w zakresie: sprawności matematycznej odnośnie mierzenia odcinków, języka matematycznego, wyobraźni matematycznej, elegancji i twórczości.
- Doskonalenie kreatywności i rozwiązywania problemów.
- Optymalizowanie pracy w grupach, samooceny i oceny koleżeńskiej.

Cele szczegółowe (operacyjne)

Uczeń:

- zmierzy odcinki
- wymieni pięć jednostek długości
- narysuje trzy odcinki o podanej długości
- obliczy różnicę miedzy długością dwóch odcinków.

Kryteria sukcesu ucznia:

Kryteria sukcesu:	**Stopień realizacji danego kryterium**
1. Potrafię zmierzyć 3 odcinki.	
2. Wymieniam 5 jednostek długości.	
3. Rysuję co najmniej 3 odcinki o podanej długości.	
4. Obliczam różnicę między długością dwóch odcinków.	

Przebieg zajęć:

Aktywność nr 1: Czynności organizacyjne, podanie tematu zajęć, celu oraz kryteriów sukcesu, nawiązanie do tematu zajęć.

Aktywność nr 2: Działania praktyczne z fotografią: Każde dziecko otrzymuje taką samą fotografię . Mierzenie długości odcinków.

Zadanie:1 – praca indywidualna.

Zmierz linijką i podaj w cm wysokość poszczególnych kolumn.

Monitorowanie: Zapisywanie długości kolumn pod zdjęciem na ekranie multimedialnym. Jeśli uczeń zmierzył prawidłowo 3 kolumny, w kolumnie stopień realizacji w pierwszym wierszu zaznacza prostokąt kolorem zielonym, jeśli nie, to kolorem czerwonym, który oznacza, że uczeń powinien jeszcze popracować nad mierzeniem odcinków.

Aktywność nr 3: Rozpoznawanie i nazywanie jednostek długości**.** Praca indywidualna.

Wykonaj jedno wybrane przez siebie zadanie.

Zadanie: 1- praca indywidualna.

Konstruktor Jakub przygotowuje budę dla swojego psa. Niestety, jego papuga Klara rozrzuciła zapiski z tajnymi miarami. Pomóżcie mu, proszę, odnaleźć wyrazy, podkreślając tylko te, które są jednostkami długości.

Rozrzucone słowa: kilogram, milimetr, litr, centymetr, sekunda, metr, minuta, godzina, kilometr, kwadrans.

Zadanie: 2 – praca indywidualna

Poniżej znajduje się magiczna tabela. Pokoloruj na zielono tylko te prostokąty, w których znajdują się nazwy jednostek długości.

metr	**kilogram**
centymetr	**godzina**
minuta	**milimetr**
decymetr	**dekagram**
kilometr	**sekunda**

Monitorowanie: ocena koleżeńska, praca wzorcowa zaprezentowana na ekranie multimedialnym.

Aktywność nr. 4: Rysowanie odcinków o danej długości.

Zadanie:1- praca samodzielna.

Zmierz długości wszystkich kolumn i oblicz ich sumę.

Monitoring: Pokazanie wyników na indywidualnych tabliczkach uczniów. Informacja słowna nauczyciela.

Zadanie:2 - praca samodzielna.

Mrówka Ala musi przejść przez rzekę, która ma 10 cm. Narysuj odcinek długości 10 cm, który będzie mostem, przez który ma przejść mrówka.

Monitoring: Ocena koleżeńska.

Zadanie: 3 – praca indywidualna.

Jesteście poszukiwaczami skarbów. Aby dojść do niego, musicie pokonać drogę według szyfru. Narysuj ją.

Szyfr:

Droga jest łamaną otwartą składającą się z trzech odcinków:

1. Pierwszy odcinek: 5 cm.
2. Drugi odcinek: 4 cm i 5 mm.
3. Trzeci odcinek: 65 mm.

Monitoring: ocena koleżeńska.

Zadanie: 4

Z danych patyków zbudujcie magiczny zamek. Zmierzcie długości wykorzystanych patyków.

Monitoring: wystawa prac uczniów i fotografii.

Ewaluacja zajęć za pomocą tarczy strzelniczej.

Za pomocą strzałki zaznacz swoje zaangażowanie na lekcji.



Streszczenie

Nauczanie matematyki na pierwszym etapie edukacyjnym ma duże znaczenie w kontekście dalszego kształcenia się. Powinno zapewnić uczniom rudymentarne wiadomości i umiejętności, które staną się podstawą dla bardziej rozbudowanych treści matematycznych, realizowanych w kolejnych latach edukacji. Nauczanie - uczenie się matematyki to aktywne radzenie sobie z informacją, która jest przedmiotem działania poznawczego. To identyfikowanie jej, a także kategoryzowanie w ramach posiadanych struktur pojęciowych, czy organizowanie pola poszukiwań, badań, doświadczeń obejmujących ciąg czynności prowadzących do wychwycenia regularności, odkrycia prawidłowości, skonstruowania pojęć matematycznych, rozwiązania problemów z użyciem modelowania matematycznego[41]. Niestety, kiedy edukacja matematyczna zaczyna być uwikłana w szkolne procedury, zanika uczniowska ciekawość poznawcza, satysfakcja z rozwiązywania zagadek logicznych, z posługiwania się liczbami, czy z wymyślania autorskich strategii mierzenia się z problemami matematycznymi. Uczniowie przestają pytać, analizować czy zgłębiać temat. Jest to wynikiem braku rozmowy nauczyciela z uczniami podczas lekcji, na których wyposaża się ich tylko w gotowy zestaw pojęć i modeli matematycznego działania. Stąd ważne jest, aby nauczyciele poszukiwali efektywnych i atrakcyjnych dla dzieci metod i form pracy, które należy dostosować do możliwości rozwojowych uczniów w klasach młodszych. Dlatego tematyka niniejszej dysertacji dotyczy wspierania rozwoju wybranych składników kultury matematycznej uczniów klas 1-3 szkoły podstawowej za pomocą fotografii, która może być formą wyrażania własnej osoby poprzez interpretowanie otaczającej rzeczywistości. Fotografowanie obiektów związanych z matematyką pozwoli dziecku zobaczyć matematykę w realnej przestrzeni, czyli zacznie ono postrzegać liczby, kształty, symetrię czy wzory na przykład w przyrodzie, architekturze, w przedmiotach codziennego użytku. To z kolei może determinować rozwój myślenia matematycznego. Fotografowanie matematyki sprzyja łączeniu wiadomości z różnych dziedzin, takich jak matematyka, sztuka i technologia. Sprzyja także uczeniu się poprzez działanie, a tym samym lepsze zapamiętywanie pojęć matematycznych, Nauczanie matematyki nie może ograniczać się tylko do przekazywania wiadomości i algorytmów, ale powinno prowadzić do budowania szeroko rozumianej kultury matematycznej uczniów. W niniejszej dysertacji przedmiotem badań empirycznych uczyniono wybrane skład-

[41] Dylak S., Architektura wiedzy w szkole, Warszawa 2013, s. 55.

niki kultury matematycznej uczniów klas 1-3 szkoły podstawowej. Poszukiwano relacji zachodzących pomiędzy fotoedukacją matematyczną i rozwojem wybranych elementów kultury matematycznej. Sformułowany główny problem naukowy zmierzał do pokazania: *w jakim stopniu wprowadzenie do procesu realizacji zajęć z obszaru edukacji matematycznej fotoedukacji determinuje rozwój wybranych elementów kultury matematycznej uczniów klas I-III szkoły podstawowej?* Natomiast problemy szczegółowe miały zobrazować: *w jakim stopniu zajęcia z wykorzystaniem fotoedukacji determinują poziom sprawności matematycznej uczniów klas I-III szkoły podstawowej? w jakim stopniu zajęcia z wykorzystaniem fotoedukacji matematycznej kształtują język matematyczny uczniów klas I-III szkoły podstawowej? w jakim stopniu zajęcia z wykorzystaniem fotoedukacji matematycznej kształtują wyobraźnię matematyczną uczniów klas I-III szkoły podstawowej? w jakim stopniu zajęcia z wykorzystaniem fotoedukacji matematycznej determinują rozwój elegancji matematycznej uczniów klas I-III szkoły podstawowej? w jakim stopniu zajęcia z wykorzystaniem fotoeduakcji matematycznej determinują rozwój twórczości matematycznej uczniów klas I-III szkoły podstawowej?* Diagnoza i ocena wybranych składników kultury matematycznej uczniów klas 1-3 szkoły podstawowej została dopełniona eksperymentem pedagogicznym, który był realizowany techniką grup równoległych. Istotnym etapem realizacji eksperymentu było opracowanie, we współpracy z nauczycielami edukacji wczesnoszkolnej, innowacyjnych scenariuszy zajęć opartych na koncepcji fotoedukacji matematycznej autorstwa prof. Małgorzaty Makiewicz[42].

Praca składa się z pięciu rozdziałów. W rozdziale pierwszym szczegółowo opisano między innymi wybrane teorie nauczania matematyki, a także zagadnienie dojrzałości szkolnej w kontekście trudności i niepowodzeń w uczeniu się tego przedmiotu. Zaprezentowano także te rozwiązania dydaktyczne, które, sprzyjają rozwijaniu zainteresowań uczniów. Rozdział drugi to szczegółowa analiza zjawiska kultury matematycznej i charakterystyka poszczególnych komponentów kultury matematycznej. Zaprezentowano także koncepcję dydaktyczną, którą jest fotoedukacja matematyczna. To nowatorskie podejście do nauczania-uczenia się matematyki. Łączy fotografię z różnorodnymi zagadnieniami matematycznymi. W kolejnym rozdziale scharakteryzowano system edukacji i podkreślono jego znaczenie w rozwoju kultury matematycznej. Omówiono także podstawę programową, która jako ważny dokument systemowy określa cele, treści oraz wymagania edukacyjne, a także wyznacza kierunki pracy nauczyciela i rozwoju ucznia. Jej analiza pozwoliła zaprezentować znaczenie matematyki w edukacji uczniów

[42]Makiewicz M., O fotografii w edukacji matematycznej. Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów, Szczecin 2013.

klas I-III w procesie budowania kultury matematycznej. Na koniec tego rozdziału przedstawiono krytyczną refleksję nad stanem edukacji matematycznej realizowanej, w przedszkolu oraz w klasach początkowych. W rozdziale czwartym szczegółowo opisano założenia metodologiczne badań własnych. Ostatni, piaty rozdział to szczegółowa analiza oraz interpretacja wyników uzyskanych w trakcie badań własnych. Podjęta w niniejszej dysertacji problematyka ma istotne znaczenie zarówno poznawcze, jak i praktyczne. Uzyskane wyniki mogą stanowić podstawę do dalszych badań nad kulturą matematyczną uczniów oraz inspirować nauczycieli do poszukiwania nowych, bardziej efektywnych rozwiązań dydaktycznych, wspierających rozwój kompetencji matematycznych dzieci na etapie edukacji wczesnoszkolnej. Szczegółowa analiza otrzymanych wyników, z przeprowadzonych przeze mnie badań i obserwacji, pozwala rekomendować fotoedukację matematyczną jako wartościowy i trwały element koncepcji nauczania w edukacji wczesnoszkolnej.

Abstract

Teaching mathematics at the first stage of education is of paramount importance for a student's further education. It should provide young learners with the rudimentary knowledge and skills that serve as the foundation for more complex mathematical content introduced in subsequent years of schooling. Teaching and learning mathematics requires actively engaging with information that becomes the subject of cognitive activity. This process involves identifying and categorizing data within existing conceptual structures, as well as organizing fields of inquiry, research, and experimentation. Such a sequence of activities leads to detecting regularities, discovering patterns, constructing mathematical concepts, and solving problems through mathematical modeling [1]. Unfortunately, when mathematics education becomes entangled in rigid school procedures, students' cognitive curiosity and the satisfaction derived from solving logical puzzles, using numbers, or devising original problem-solving strategies often disappear. Students stop asking questions, analyzing, and exploring the subject. This is a direct result of the lack of teacher-student dialogue during lessons, where children are merely provided with a ready-made set of mathematical concepts and instructional algorithms. Therefore, it is crucial for teachers to seek effective and engaging methods and forms of work tailored to the developmental abilities of early childhood students.

Consequently, the subject of this dissertation focuses on supporting the development of selected components of mathematical culture in students in grades 1–3 of primary school through photo-education, which can serve as a form of self-expression by interpreting the surrounding reality. Photographing objects related to mathematics allows children to see math in

real-world spaces, enabling them to perceive numbers, shapes, symmetry, or patterns in nature, architecture, and everyday objects. This, in turn, can foster the development of mathematical thinking. Furthermore, photographing mathematics facilitates the integration of knowledge across various fields, such as mathematics, art, and technology. It also promotes learning-by-doing, which enhances the retention of mathematical concepts. Math education cannot be limited to merely transmitting information and algorithms; it should actively lead to building a broadly understood mathematical culture in students.

This dissertation focuses on empirical research regarding selected components of mathematical culture among primary school students in grades 1–3. The study explores the relationships between mathematical photo-education and the development of selected elements of mathematical culture. The main research problem was formulated as follows: *To what extent does the introduction of photo-education into the instructional process of mathematical education determine the development of selected elements of mathematical culture in students in grades I–III of primary school?*

The specific research problems aimed to illustrate:

- To what extent do photo-education activities determine the level of students' mathematical proficiency in grades I–III of primary school?
- To what extent do activities utilizing mathematical photo-education shape the mathematical language of students in grades I–III of primary school?
- To what extent do activities utilizing mathematical photo-education shape the mathematical imagination of students in grades I–III of primary school?
- To what extent do activities utilizing mathematical photo-education determine the development of mathematical elegance in students in grades I–III of primary school?
- To what extent do activities utilizing mathematical photo-education determine the development of mathematical creativity in students in grades I–III of primary school?

The diagnosis and assessment of the selected components of mathematical culture in primary school students in grades 1–3 were complemented by a pedagogical experiment conducted using the parallel groups technique. A significant stage of this experiment involved collaborating with early childhood education teachers to develop innovative lesson plans based on the concept of photo-education in mathematics originated by Professor Małgorzata Makiewicz [2].

The dissertation consists of five chapters. The first chapter describes in detail, among other topics, selected theories of mathematics didactics, as well as the issue of school readiness (ma-

turity) in the context of difficulties and failures in learning the subject. It also presents instructional solutions that foster students' interests. The second chapter provides a detailed analysis of the phenomenon of mathematical culture and characterizes its individual components. It also introduces the didactic concept of mathematical photo-education as an innovative approach to teaching and learning mathematics that combines photography with various mathematical topics. The third chapter characterizes the education system and highlights its importance in the development of mathematical culture. It also analyzes the national core curriculum, which, as a vital systemic document, defines educational goals, content, and requirements, while directing the teacher’s work and student’s development. Its analysis demonstrated the significance of mathematics in the education of students in grades I–III within the process of building mathematical culture. This chapter concludes with a critical reflection on the current state of mathematics education implemented in kindergarten and early grades. The fourth chapter describes in detail the methodological assumptions of the author's own research. The final, fifth chapter provides a comprehensive analysis and interpretation of the results obtained during the empirical study.

The issues addressed in this dissertation carry both cognitive and practical significance. The results obtained can serve as a foundation for further research on students' mathematical culture and can inspire teachers to seek new, more effective didactic solutions that support the development of children's mathematical competencies at the early childhood education stage. A detailed analysis of the results obtained from the conducted research and observations allows for the recommendation of mathematical photo-education as a valuable and permanent element of the instructional concept in early childhood education.

Footnotes:

[1] S. Dylak, *Architektura wiedzy w szkole* [Architecture of Knowledge at School], Warszawa 2013, p. 55.

[2] M. Makiewicz, *O fotografii w edukacji matematycznej. Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów* [On Photography in Mathematics Education. How to Shape Students' Mathematical Culture], Szczecin 2013.